



อากาศพลศาสตร์

เรียบเรียงโดย

นาวาอากาศเอก ผู้ช่วยศาสตราจารย์ กนก ทองสว่าง

Master of Science (Aerospace Dynamics)

กองการศึกษา

โรงเรียนนายเรืออากาศนวมินทกษัตริยาธิราช

อากาศพลศาสตร์

เรียบเรียงโดย

นาวาอากาศเอก ผู้ช่วยศาสตราจารย์ กนก ทองสว่าง

Master of Science (Aerospace Dynamics)

กองการศึกษา

โรงเรียนนายเรืออากาศนวมินทกษัตริยาธิราช

คำนำ

ตำรานี้จัดทำขึ้นเพื่อใช้ประกอบการเรียนการสอน ในวิชาอากาศพลศาสตร์ สำหรับนักเรียน นายเรืออากาศ หลักสูตรระดับปริญญาตรี สาขาวิชาวิศวกรรมอากาศยาน (หลักสูตรปรับปรุง พ.ศ.2568) โรงเรียน นายเรืออากาศนวมินทกษัตริยาธิราช เนื้อหาได้จัดทำเพื่อให้ครอบคลุมตามคำอธิบายรายวิชา ได้แก่ สมบัติของชั้นบรรยากาศ ชั้นบรรยากาศมาตรฐาน การคำนวณแรงและโมเมนต์อากาศพลศาสตร์ สมบัติของแรงและโมเมนต์ ความคล้ายคลึงของการไหล เลขเรย์โนลด์และเลขมัค หลักความถาวรของมวลและโมเมนตัม สมการการไหลต่อเนื่อง สมการเนเวียร์-สโตค ฟังก์ชันเส้นกระแส ศักย์ความเร็ว การหมุนวน แนวคิดชั้นขีดผิว พื้นฐานการไหลไร้แรงหนืดไร้การอัดตัว ทฤษฎีของคุตต้า-จูโกวสกี ทฤษฎีแผนอากาศบาง วิธีแผนปีกยาวจำกัด และวิธีวอร์เทคแลททิส ซึ่งแต่ละบทมีตัวอย่างและแบบฝึกหัดท้ายบท เพื่อให้ผู้เรียนได้ฝึกฝนและตรวจสอบความเข้าใจในเนื้อหาวิชา โดยเนื้อหาที่เขียนในเล่มนี้ส่วนใหญ่แปลและเรียบเรียงจากหนังสือที่หลากหลาย ซึ่งเป็นตำราที่ใช้ในการอ้างอิงสำหรับการเรียนการสอนวิชานี้ ในการจัดทำตำรานี้พยายามทำให้ทฤษฎีมีรายละเอียดค่อนข้างมาก เพื่อให้ผู้เรียนมีความเข้าใจได้ดีขึ้น

ผู้จัดทำหวังว่าตำรานี้จะเป็นประโยชน์ต่อผู้เรียนในการเรียนวิชาอากาศพลศาสตร์ ให้มีความเข้าใจมากยิ่งขึ้นและสามารถนำความรู้ที่ได้ไปใช้ต่อยอดในการศึกษาวิชาอื่น ๆ ในสาขาวิชา วิศวกรรมอากาศยาน เพราะหลายวิชาต้องใช้ความรู้ในวิชานี้เป็นพื้นฐาน ในการจัดทำตำราเล่มนี้อาจจะมีข้อผิดพลาดอยู่บ้าง ผู้จัดทำยินดีรับคำแนะนำจากทุกท่านเพื่อนำมาปรับปรุงแก้ไขตำรานี้ให้มีความสมบูรณ์ และเป็นประโยชน์แก่ผู้ใช้ตำราเล่มนี้ยิ่ง ๆ ขึ้นไป

นาวาอากาศเอก ผู้ช่วยศาสตราจารย์ กนก ทองสว่าง

กองวิชาวิศวกรรมอากาศยานและเทคโนโลยีการบิน

กองการศึกษา โรงเรียนนายเรืออากาศนวมินทกษัตริยาธิราช

สารบัญ

	หน้า
คำนำ	ข
สารบัญ	ค
คำอธิบายสัญลักษณ์	ฉ
บทที่ 1 ความรู้ทั่วไปเกี่ยวกับอากาศพลศาสตร์	1
1.1 ความหมายและความสำคัญของอากาศพลศาสตร์	1
1.2 คุณสมบัติของก๊าซ	3
1.3 บรรยากาศมาตรฐาน	9
1.4 ความเร็วของการไหล	14
1.5 แรงและโมเมนต์ทางอากาศพลศาสตร์	15
1.6 จุดศูนย์กลางความดัน	27
1.7 การวิเคราะห์มิติและทฤษฎี Buckingham Pi	29
1.8 ความคล้ายคลึงของการไหล	35
1.9 กลศาสตร์ของไหลสถิตและแรงลอยตัว	38
1.10 การจำแนกชนิดของการไหล	42
1.11 ย่านเลขมัค	45
1.12 อากาศพลศาสตร์ประยุกต์	48
แบบฝึกหัดบทที่ 1	61
บทที่ 2 หลักการพื้นฐานและสมการ	63
2.1 ความนำ	63
2.2 ทบทวนพีชคณิตของเวกเตอร์	63
2.3 คุณสมบัติของสนาม	66
2.4 สนามของสเกลาร์ และสนามของเวกเตอร์	67
2.5 เกรเดียนของสนามสเกลาร์	70
2.6 ไดเวอร์เจนส์ของสนามเวกเตอร์	74
2.7 เคอร์ของสนามเวกเตอร์	75
2.8 ความหมายของอนุพันธ์(derivative)ของสนามความเร็วในทางกายภาพ	75
2.9 อนุพันธ์สับสแตนเชียล	83
2.10 สมการการไหลต่อเนื่อง: สมการพื้นฐานอันแรก	86

	หน้า
2.11 สมการโมเมนต์: สมการพื้นฐานตัวที่ 2	86
2.12 สมการพลังงาน: สมการพื้นฐานตัวที่ 3	90
2.13 การพิจารณาความสัมพันธ์ตามกฎเกณฑ์พื้นฐานโดยใช้ปริมาตรควบคุม	95
2.14 เส้นทางและเส้นกระแสของการไหล	105
2.15 การหมุนวน	108
2.16 ฟังก์ชันกระแส	111
2.17 ศักย์ความเร็ว	114
2.18 ความสัมพันธ์ระหว่างฟังก์ชันกระแส และ ศักย์ความเร็ว	116
2.19 สรุป	117
แบบฝึกหัดบทที่ 2	118
บทที่ 3 พื้นฐานการไหลไร้ความหนืดไร้การอัดตัว	120
3.1 ความนำ	120
3.2 สมการเบอร์นูลี	121
3.3 การไหลไร้การอัดตัวในท่อ : ท่อเวนทูรี และ อุโมงค์ลม	124
3.4 ท่อปีโตต์ (Pitot tube) : อุปกรณ์วัดความเร็วลม	131
3.5 สมประสิทธิความดัน	134
3.6 เงื่อนไขของความเร็วสำหรับการไหลไร้การอัดตัว	136
3.7 สมการกำกับสำหรับ การไหลไร้การหมุนไร้การอัดตัว สมการลาปลาซ	137
3.8 การไหลเอกรูป (Uniform Flow) : การไหลพื้นฐานอันแรก	141
3.9 การไหลจากแหล่งกำเนิด (Source Flow) : การไหลพื้นฐานอันที่ 2	143
3.10 การรวมการไหลเอกรูป กับ การไหลจากแหล่งกำเนิด	146
3.11 การไหลจากจุดซ้อน (Doublet Flow) : การไหลพื้นฐานอันที่ 3	150
3.12 การไหลผ่านทรงกระบอกกลมที่ไม่เกิดแรงยก	154
3.13 การไหลวอร์เทค (Vortex Flow) : การไหลพื้นฐานที่ 4	159
3.14 การไหลผ่านทรงกระบอกที่เกิดแรงยก	161
3.15 ทฤษฎีของคุดต้าและจูคอฟสกี(Kutta-Joukowski Theorem): การกำเนิดแรงยก	172
3.16 การแจกแจงแหล่งกำเนิดการไหลบนเส้น	174
3.17 การใช้วิธีเชิงตัวเลขแบบการแจกแจงจุดซ้อนบนเส้น	185
3.18 วิธีซอร์สเพนเนล (Source panel method)	191
แบบฝึกหัดบทที่ 3	205

	หน้า
บทที่ 4 การไหลไร้การอัดตัวผ่านแพนอากาศ	208
4.1 ความนำ	208
4.2 การกำหนดรูปร่างแพนอากาศ	209
4.3 คุณลักษณะเฉพาะตัวของแพนอากาศ	212
4.4 แผ่นวอร์เทค	216
4.5 เงื่อนไขของจุดต่ำ	221
4.6 ทฤษฎีการหมุนวนและวอร์เทคเริ่มต้นของเคลวิน	224
4.7 ทฤษฎีแพนอากาศบาง : แพนอากาศสมมาตร	227
4.8 แพนอากาศบางที่มีความโค้ง	242
4.9 แพนอากาศที่ติดตั้งแฟลป	251
4.10 แพนอากาศที่มีความหนาและความโค้ง : วิธีเพนเนล	255
4.11 โปรแกรมคอมพิวเตอร์	264
4.12 แพนอากาศสำหรับความเร็วต่ำสมัยใหม่	268
4.13 การไหลผ่านแพนอากาศในกรณีตามความเป็นจริง	270
แบบฝึกหัดบทที่ 4	284
บทที่ 5 การไหลไร้การอัดตัวผ่านปีกยาวจำกัด	285
5.1 ความนำ	285
5.2 รูปร่างของปีก	290
5.3 เส้นใยวอร์เทค กฎของปีโอท์และซาวาร์ต และทฤษฎีของเฮล์มโฮลท์	295
5.4 ทฤษฎีแนวแรงยกของพรานด์	300
5.5 การคำนวณแรงยกเพิ่มเติมโดยประมาณ	344
5.6 คุณลักษณะอื่นของปีก	347
5.7 การพิจารณาแรงยกของปีกด้วยวิธีวอร์เทคเลททิส	350
แบบฝึกหัดบทที่ 5	355
บรรณานุกรม	356
ภาคผนวก	357
ผนวก ก ตารางบรรยากาศมาตรฐานสากล	358
ผนวก ข เฉลยแบบฝึกหัด	363
ผนวก ค ดัชนี	368

คำอธิบายสัญลักษณ์

สัญลักษณ์

- A = พื้นที่หรือพื้นที่อ้างอิง (Area or reference area)
- A_n = สัมประสิทธิ์ฟูเรียร์ในทฤษฎีแพนอากาศบาง (Fourier coefficient in thin airfoil theory)
- AR = อัตราส่วนเรียวปีก (Aspect ratio)
- a = ความเร็วเสียง (Speed of sound)
- b = ระยะกางปีก (Wingspan)
- c = ความยาวคอร์ด (chord length)
- c_d = สัมประสิทธิ์แรงต้านของแพนอากาศ (Airfoil drag coefficient)
- c_l = สัมประสิทธิ์แรงยกของแพนอากาศ (Airfoil lift coefficient)
- c_m = สัมประสิทธิ์โมเมนต์ของแพนอากาศ (Airfoil moment coefficient)
- C_D = สัมประสิทธิ์แรงต้านของวัตถุ หรือปีก (Drag coefficient)
- C_L = สัมประสิทธิ์แรงยกของวัตถุ หรือปีก (Lift coefficient)
- C_M = สัมประสิทธิ์โมเมนต์ (Moment coefficient)
- C_p = สัมประสิทธิ์ความดัน (Pressure coefficient)
- D = แรงต้าน (Drag force)
- D_i = แรงต้านเหนี่ยวนำ (Induced drag)
- E = โมดูลัสเชิงปริมาตร หรือความยืดหยุ่นตัว (Bulk modulus or elasticity)
- F = แรงลัพธ์ (Resultant force)
- h = ระยะสูงหรือความสูง (Altitude or height)
- L = แรงยก (Lift force)
- L' = แรงยกต่อหน่วยความยาวปีก (Lift per unit span)
- M = เลขมัค หรือโมเมนต์ ตามบริบท (Mach number or Moment, depending on context)
- M_{ac} = โมเมนต์รอบจุดศูนย์กลางอากาศพลศาสตร์ (Moment about aerodynamic center)
- M_{LE} = โมเมนต์รอบชายหน้า (Moment about leading edge)

- p = ความดันสถิต (Static pressure)
 p_0 = ความดันที่ระดับน้ำทะเลมาตรฐาน หรือความดันรวมตามบริบท (Standard sea-level pressure or Total pressure)
 q = ความดันพลวัต (Dynamic pressure)
 R = ค่าคงที่ของก๊าซ (Gas constant)
 Re = เลขเรย์โนลด์ (Reynolds number)
 S = พื้นที่ปีกหรือพื้นที่อ้างอิง (Wing area or Reference area)
 T = อุณหภูมิสัมบูรณ์ (Absolute temperature)
 T_0 = อุณหภูมิที่ระดับน้ำทะเลมาตรฐาน หรืออุณหภูมิรวมตามบริบท (Standard sea-level temperature or Total temperature)
 u, v, w = องค์ประกอบความเร็วในทิศ x, y, z (Velocity components in x, y, z directions)
 V = ความเร็ว (Velocity)
 V_∞ = ความเร็วกระแสอิสระ (Freestream velocity)
 W = น้ำหนัก (Weight)
 x, y, z = พิกัดคาร์ทีเซียน (Cartesian coordinates)
 x_{ac} = ตำแหน่งจุดศูนย์อากาศพลศาสตร์ (Aerodynamic-center location)
 x_{cp} = ตำแหน่งจุดศูนย์ความดัน (Center-of-pressure location)
 r = ระยะรัศมี (Radial distance)
 s = ครึ่งระยะกางปีก (Semispan)
 α = มุมปะทะ (Angle of attack)
 α_{eff} = มุมปะทะสัมฤทธิ์ผล (Effective angle of attack)
 α_i = มุมปะทะเหนี่ยวนำ (Induced angle of attack)
 $\alpha_{L=0}$ = มุมปะทะที่แรงยกเป็นศูนย์ (Zero-lift angle of attack)
 β = มุม หรือพารามิเตอร์เบตา ตามบริบท (Beta angle or Parameter, depending on context)
 γ = อัตราส่วนความร้อนจำเพาะ (ratio of specific heats)

- Γ = การหมุนวนของการไหล (Circulation)
 δ = มุมเบี่ยงเบน หรือค่าปรับแก้ตามบริบท (Deflection angle or Correction factor)
 ϵ = มุมดาวนัววช หรือค่าขนาดเล็ก (Downwash angle or small parameter)
 θ = มุมพิกัดเชิงขั้ว (Polar angular coordinate)
 λ = อัตราสอบปีก หรือระยะเคลื่อนที่อิสระเฉลี่ย ตามบริบท (Taper ratio or Mean free path)
 Λ = มุมลู่อหลังของปีก (Sweep angle)
 μ = ความหนืดเชิงพลศาสตร์ (Dynamic viscosity)
 ν = ความหนืดจลน์ (Kinematic viscosity)
 ρ = ความหนาแน่น (Density)
 τ = แรงเค้นเฉือน (Shear stress)
 ϕ = ศักย์ความเร็ว (Velocity potential)
 ψ = ฟังก์ชันกระแส (stream function)
 ω = เวกเตอร์วอร์ทิซิตีหรืออัตราการหมุน (Vorticity vector or Angular velocity)
 ∇ = ตัวดำเนินการเดล (Del operator)
 Δ = ค่าการเปลี่ยนแปลง (Change in quantity)

ตัวห้อย

- ∞ = ค่าที่กระแสอิสระ (Freestream condition)
 0 = ค่ามาตรฐานหรือค่าที่อ้างอิงเริ่มต้น (Standard or reference initial condition)
 ac = จุดศูนย์กลางอากาศพลศาสตร์ (Aerodynamic center)
 cp = จุดศูนย์กลางความดัน (Center of pressure)
 LE = ขาหน้า (Leading edge)
 TE = ขาหลัง (Trailing edge)
 max = ค่าสูงสุด (Maximum value)
 min = ค่าต่ำสุด (Minimum value)
 ref = ค่าอ้างอิง (Reference value)

w = ค่าที่ผนังหรือผิววัตถุ (Wall or surface value)

อักษรย่อ

AC = จุดศูนย์กลางอากาศพลศาสตร์ (Aerodynamic center)

CFD = พลศาสตร์ของไหลเชิงคำนวณ (Computational Fluid Dynamics)

CP = จุดศูนย์กลางความดัน (Center of pressure)

ISA = บรรยากาศมาตรฐานสากล (International standard atmosphere)

NACA = คณะกรรมการที่ปรึกษาแห่งชาติเพื่อการบินของสหรัฐอเมริกา (National Advisory Committee for Aeronautics)

บทที่ 1

ความรู้ทั่วไปเกี่ยวกับอากาศพลศาสตร์

1.1 ความหมายและความสำคัญของอากาศพลศาสตร์

อากาศพลศาสตร์ (Aerodynamics) เป็นสาขาวิชาที่แตกแขนงมาจากวิชากลศาสตร์ของไหล เป็นการศึกษาพฤติกรรมของไหลของของไหลโดยเฉพาะอากาศหรือก๊าซ และผลที่เกิดขึ้นจากการเคลื่อนไหวย่านบนพื้นผิวที่อากาศไหลผ่าน โดยทั่วไปวิชาอากาศพลศาสตร์จะเน้นเนื้อหาที่เกี่ยวข้องกับการบินในชั้นบรรยากาศ ซึ่งวิชาอากาศพลศาสตร์เข้าไปมีบทบาทอยู่เกือบทั้งหมด ตั้งแต่การอธิบายถึงกลไกพื้นฐานของการเกิดแรงยกและแรงต้านบนวัตถุรูปทรงต่างๆ หรือเรื่องที่ซับซ้อนกว่า เช่น รายละเอียดของแรงและโมเมนต์ทางอากาศพลศาสตร์บนอากาศยาน ที่มีผลต่อการกำหนดคุณลักษณะเฉพาะตัวด้านสมรรถนะกับเสถียรภาพและการบังคับของอากาศยานเหล่านั้น รวมทั้งใช้ในการพิจารณาเป็นภาระกรรมเพื่อใช้ในการออกแบบโครงสร้างอากาศยานที่ต้องมีน้ำหนักเบาแต่ความแข็งแรงสูง นอกจากนี้ อากาศพลศาสตร์ยังมีความสำคัญในงานวิศวกรรมด้านอื่นๆ เช่น การศึกษาผลของแรงลมที่มีต่อโครงสร้างตึกสูงหรือสะพาน การศึกษากระแสอากาศในเครื่องยนต์หรือท่อทางเพื่อออกแบบเครื่องยนต์จรวดและเครื่องยนต์ไอพ่น การไหลผ่านใบพัด การศึกษาหลักการเบาะอากาศของยานไฮเวอร์คราฟท์ แม้แต่การพยายามลดแรงต้านทานของอากาศของนักปั่นจักรยานโอลิมปิกโดยหมวกและจักรยานรูปร่างแปลกๆ การออกแบบเรือใบที่ใช้ในการแข่งขันและอื่นๆ อีกมากที่แม้ไม่เกี่ยวกับการบินโดยตรงแต่ล้วนเป็นปัญหาเกี่ยวกับอากาศพลศาสตร์ทั้งสิ้น ที่ยกมาเป็นตัวอย่าง แม้เป็นเพียงส่วนน้อยแต่ชี้ให้เห็นความสำคัญและประโยชน์ของวิชาอากาศพลศาสตร์ต่องานวิศวกรรมด้านต่างๆ ได้เป็นอย่างดี

จากตัวอย่างข้างต้น จะเห็นว่าวิชาอากาศพลศาสตร์เป็นวิทยาศาสตร์ประยุกต์ที่มีการนำไปใช้ในงานวิศวกรรมหลายด้าน แต่ไม่ว่าปัญหาเหล่านี้จะเกี่ยวกับทฤษฎีที่ละเอียดอ่อน สมการทางคณิตศาสตร์ที่ซับซ้อนหรือเกี่ยวข้องกับการทดสอบทดลองที่ยุ่งยากเพียงใดก็ตาม ความพยายามทั้งหมดที่ใช้หาคำตอบของปัญหาจะเน้นไปที่เป้าหมายหลักที่แบ่งออกได้ดังนี้ คือ 1) การทำนายแรงและโมเมนต์ และ/หรือการถ่ายเทความร้อนที่เกิดบนผิววัตถุที่จมอยู่ในกระแสอากาศ ตัวอย่างเช่นที่เกิดบนลำตัว ปีก หาง ของอากาศยาน หรือการทำนายผลของแรงลมปะทะที่เกิดกับอาคารสูง เรือ และผิวนานพาหนะอื่นๆ 2) การทำนายรูปแบบและคุณสมบัติที่เปลี่ยนแปลงของการไหล เช่น ความดัน อุณหภูมิ ความเร็ว และอื่นๆ หรือคำนวณแรงขับเคลื่อนที่เกิดจากการไหลผ่านท่อทางปิด เช่น ในท่อน้ำเชื้อเพลิงหรือในเครื่องยนต์กังหันก๊าซ การพิจารณาปัญหาในกลุ่มที่หนึ่งเป็นการพิจารณาการไหล

ภายนอก (External flow) ปัญหาเกี่ยวกับการบินของอากาศยานส่วนใหญ่จะจัดไว้ในกลุ่มนี้ ส่วนปัญหาในกลุ่มที่สองจะรวมเรียกเป็นการไหลภายใน (Internal flow) ปัญหาในกลุ่มหลัง แม้ไม่เกี่ยวกับการบินโดยตรง แต่บางกรณีจะเป็นข้อมูลพื้นฐานสำคัญที่ต้องนำมาร่วมพิจารณากับการไหลแบบแรก เช่น การไหลในท่อกลมแบบปั่นป่วน (Turbulent flow in pipe) ซึ่งถูกนำมาเป็นต้นแบบของการไหลในชั้นขีดผิวแบบปั่นป่วน (Turbulent boundary layer flow) และนำมาใช้ศึกษาการเกิดแรงเสียดทานผิวของวัตถุในกระแสอากาศ

เนื้อหาวิชาในเอกสารฉบับนี้ส่วนใหญ่จะเป็นการศึกษาการไหลภายนอก และให้ความสำคัญกับปัญหาที่เกี่ยวข้องกับการบินย่านความเร็วต่ำกว่าเสียง เนื้อหาหลักจะเป็นการศึกษาแรงกระทำของกระแสอากาศต่อวัตถุที่กระแสอากาศไหลผ่าน ในส่วนของการบินจะเป็นการหาคำตอบจากปัญหาใหญ่ 3 ปัญหา (Anderson, 2016) คือ

- 1) แรงที่จำเป็นต่ออากาศยานเพื่อให้ลอยตัวอยู่ได้ในชั้นบรรยากาศเกิดได้อย่างไร และแรงนี้เปลี่ยนแปลงอย่างไรกับรูปร่างของอากาศยาน ความสูง ความเร็ว และคุณสมบัติต่างๆ ของอากาศ ข้อนี้คือปัญหาของ **แรงยก (Lift)**
- 2) แรงฉุดรั้งที่เกิดขึ้นบนอากาศยานเมื่อเคลื่อนที่ไปข้างหน้าเป็นผลมาจากอะไรและจะลดลงได้อย่างไร ข้อนี้เป็นปัญหาของ **แรงต้าน (Drag)** และเป็นพื้นฐานสำคัญของการศึกษา **สมรรถนะของอากาศยาน**
- 3) แรงและการแจกแจงของแรงที่กระทำต่ออากาศยานมีรายละเอียดอย่างไรและเปลี่ยนแปลงไปอย่างไรขณะทำการบิน ข้อนี้เป็นปัญหาของ **แรงและโมเมนต์อากาศพลศาสตร์ (Aerodynamic forces and moments)** ที่เกี่ยวข้องกับปัญหาเสถียรภาพและการบังคับอากาศยาน

การหาคำตอบจากปัญหาเหล่านี้สามารถทำได้ โดยต้องคำนึงถึงคุณสมบัติและพฤติกรรมของอากาศและกระแสอากาศ การเรียนรู้ลักษณะเฉพาะและการเปลี่ยนแปลงในสถานะต่างๆ ของกระแสอากาศ ถือว่าเป็นอากาศพลศาสตร์พื้นฐานที่ต้องศึกษาให้เข้าใจเสียก่อน จากนั้นจึงเริ่มต้นศึกษาปัญหาหลัก 3 ข้อของการบินซึ่งอาจถือว่าเป็นอากาศพลศาสตร์ประยุกต์ โดยปัญหาของแรงต้านจะเกี่ยวข้องกับการพิจารณาสมรรถนะของอากาศยาน ปัญหาของแรงยกและโมเมนต์อากาศพลศาสตร์จะนำไปใช้พิจารณาเสถียรภาพและการบังคับอากาศยาน ดังนั้นส่วนหนึ่งของเนื้อหาในเอกสารนี้จะเป็นเรื่องของอากาศพลศาสตร์พื้นฐานเพื่อปูพื้นความเข้าใจในส่วนแรก ส่วนที่สองจะทำการศึกษาอากาศพลศาสตร์ประยุกต์ของปัญหาการเกิดแรงยกในย่านความเร็วต่ำ และส่วนสุดท้ายจะเป็นการศึกษาอากาศพลศาสตร์ประยุกต์ของการไหลในชั้นขีดผิวหรือปัญหาแรงต้าน สำหรับการศึกษาอากาศพลศาสตร์ในขั้นที่สูงกว่านี้คืออากาศพลศาสตร์ความเร็วเหนือเสียง สมรรถนะของอากาศยาน เสถียรภาพและการบังคับอากาศยาน จะเป็นเนื้อหาวิชาเฉพาะซึ่งไม่ได้รวมอยู่ในเนื้อหาวิชานี้

1.2 คุณสมบัติของก๊าซ

ก๊าซมีโครงสร้างประกอบด้วยโมเลกุลจำนวนมากที่ต่างเคลื่อนที่ไปมาแบบอิสระ ความหนาแน่นของโมเลกุลกำหนดจากกฎของอาโวกาโดร (Avogadro's law) ที่กำหนดว่า ทุก 1 kg-mole ของก๊าซทุกชนิดจะบรรจุโมเลกุลจำนวน 6.025×10^{26} โมเลกุล อากาศเป็นส่วนผสมของก๊าซหลายชนิดประกอบด้วย ไนโตรเจน (N_2) 78.08% ออกซิเจน (O_2) 20.95% อาร์กอน (Ar) 0.93% คาร์บอนไดออกไซด์ (CO_2) 0.03% นีออน (Ne) 0.0018% และก๊าซอื่น เช่น ฮีเลียม (He) คริปทอน (Kr) ซีซีนอน (Xe) ไฮโดรเจน (H_2) มีเทน (CH_4) ฯลฯ รวมกัน 0.001% โดยประมาณ ในสภาวะมาตรฐาน (ดูหัวข้อ 1.3) ความหนาแน่นโมเลกุลสำหรับอากาศคือ 2.7×10^{19} โมเลกุลต่อปริมาตร 1 ลบ.ซม. ถึงแม้จะมีจำนวนมหาศาลแต่เนื่องจากโมเลกุลของก๊าซมีขนาดเล็กมาก โมเลกุลของก๊าซจึงไม่ได้บรรจุอยู่เต็มในปริมาตร แต่จะมีที่ว่างระหว่างโมเลกุลทำให้โมเลกุลของก๊าซเคลื่อนไหวได้อย่างอิสระ โมเลกุลจะมีระยะห่างกันมากเมื่อเทียบกับขนาดของโมเลกุลจนไม่ต้องคำนึงถึงแรงยึดเหนี่ยวระหว่างโมเลกุล (Intermolecular forces) ยกเว้นที่อุณหภูมิต่ำหรือสูงมากๆ ในสภาพปกตินี้ ก๊าซจะแสดงพฤติกรรมใกล้เคียงกับก๊าซอุดมคติ (Ideal gas) โมเลกุลอิสระนี้จะชนกันหลังจากเคลื่อนที่ไปเป็นระยะทางอันหนึ่งเสมอ ระยะเฉลี่ยของการเคลื่อนที่ของโมเลกุลก่อนเกิดการชน เรียกว่า ระยะเคลื่อนที่อิสระเฉลี่ย (Mean free path) ใช้สัญลักษณ์แทนด้วยอักษรกรีก λ (อ่านว่า “แลมดา”, Lambda) การชนกันของโมเลกุลที่เกิดขึ้นต่อเนื่องทำให้เกิดการแลกเปลี่ยนพลังงานจลน์ไปมาจนกระทั่งแต่ละโมเลกุลมีความเร็วเฉลี่ยของการเคลื่อนที่ (c) ใกล้เคียงกัน λ และ c กับมวล m ของโมเลกุลสามารถนำมาใช้แสดงคุณสมบัติของก๊าซได้ดังนี้ (Anderson, 2016)

1.2.1 ความหนาแน่น (Density)

ความหนาแน่นของสาร คือ จำนวนมวลของสารนั้นต่อหน่วยปริมาตร ดังนั้นความหนาแน่นของก๊าซคือมวลของโมเลกุลของก๊าซต่อหน่วยปริมาตร มีมิติเป็นมวลต่อปริมาตร มีหน่วยเป็นกิโลกรัมต่อลูกบาศก์เมตร (kg/m^3) ในระบบ SI ใช้สัญลักษณ์แทนด้วยอักษรกรีก ρ (อ่านว่า “โร”, rho) เช่น ถ้ามวลของอากาศในห้องที่มีปริมาตร 250 ลูกบาศก์เมตร (m^3) เท่ากับ 306.25 กิโลกรัม (kg) และสมมติว่าอากาศกระจายทั่วห้องอย่างสม่ำเสมอจะได้ว่า $\rho = 306.25 \text{ kg}/250 \text{ m}^3 = 1.225 \text{ kg/m}^3$ แต่ความหนาแน่นของก๊าซอาจเปลี่ยนแปลงจากจุดหนึ่งไปยังอีกจุดหนึ่งภายในปริมาตรของก๊าซ ดังนั้นถ้าพิจารณาปริมาตรเล็กๆ ΔV ล้อมรอบจุด B ใดๆในปริมาตร Δm เป็นมวลของก๊าซในปริมาตร ΔV อาจนิยามให้ความหนาแน่นของก๊าซ ณ จุด B เป็น

$$\rho = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta m}{\Delta V} = \frac{dm}{dV} \quad (1.1)$$

ขีดจำกัดปริมาตรเข้าสู่ศูนย์ในสมการทำให้การใช้นิยามในทางปฏิบัติกับก๊าซที่มีโครงสร้างเป็นโมเลกุลอิสระที่เคลื่อนที่ไปมาพบปัญหายุ่งยากเมื่อ ΔV เข้าสู่ขีดจำกัดใกล้ขนาดของโมเลกุล ภายในปริมาตร

ΔV อาจมีหรือไม่มีโมเลกุลของก๊าซบรรจุอยู่ก็ได้เพราะโมเลกุลมีการเคลื่อนที่ผ่านเข้าออกปริมาตร ΔV ตลอดเวลา ขณะที่ไม่มีโมเลกุลอยู่ใน ΔV ค่าความหนาแน่นจะมีค่าสูง แต่ในขณะที่ไม่มีโมเลกุลอยู่ใน ΔV ค่าความหนาแน่นจะเป็นศูนย์ เพื่อหลีกเลี่ยงปัญหานี้ขีดจำกัดของ ΔV จะไม่เล็กลงจนเป็นศูนย์แต่จะลดลงจนมีขนาดเล็กมากเทียบกับขนาดที่เกี่ยวข้องของปัญหา เช่น ปีกของอากาศยาน แต่ยังคงมีขนาดใหญ่พอที่จะบรรจุโมเลกุลจำนวนมากจำนวนหนึ่งซึ่งในทางสถิติจำนวนโมเลกุลที่เคลื่อนที่เข้าออกปริมาตรโดยเฉลี่ยจะหักล้างกันจนไม่เกิดความผันผวนต่อจำนวนโมเลกุลที่มีอยู่ในปริมาตร ΔV ตัวอย่างเช่นปริมาตรของลูกบาศก์ที่มีความยาวด้านละ 0.01 มม. ซึ่งเป็นเพียงจุดเล็กๆ ในปัญหาทั่วไปทางอากาศพลศาสตร์ แต่ปริมาตรอากาศขนาดนี้มีจำนวนโมเลกุลอยู่ถึง 2.7×10^{13} โมเลกุล ซึ่งเพียงพอที่จะไม่ทำให้เกิดปัญหาความแปรปรวนของค่าความหนาแน่นเนื่องจากการเคลื่อนที่ของโมเลกุลเข้าออกปริมาตร ในปัญหาอากาศพลศาสตร์ทั่วไป สภาวะที่จำนวนโมเลกุลของก๊าซมีความหนาแน่นมากเช่นนี้ อาจทิ้งการพิจารณาโครงสร้างโมเลกุลตามธรรมชาติที่เป็นจริงของก๊าซ และสมมติให้ก๊าซเป็นตัวกลางที่มีเนื้อต่อเนื่อง (Continuum media) ได้อย่างสมเหตุผล ในทางคณิตศาสตร์หมายความว่าสามารถกำหนดให้ความหนาแน่นเป็นฟังก์ชันที่มีค่าต่อเนื่อง (Continuous function) ในขอบเขตของการพิจารณาได้

1.2.2 ความดัน (Pressure)

ความดัน คือ แรงกดตั้งฉากต่อหน่วยพื้นที่บนพื้นผิวที่จมในของไหล ใช้สัญลักษณ์ p พื้นที่นี้อาจเป็นพื้นที่จริง เช่น ผนังภาชนะบรรจุของไหล ผนังท่อทาง หรือพื้นผิววัตถุที่ของไหลไหลผ่านหรือเป็นพื้นผิวสมมุติภายในเนื้อของไหลก็ได้ สำหรับก๊าซแรงกดนี้เกิดจากการระดมชนเมื่อโมเลกุลของก๊าซวิ่งชนผิววัตถุหรือชนกับโมเลกุลที่วิ่งมาจากอีกด้านของพื้นที่สมมุติและสะท้อนกลับ จากกฎข้อสองของนิวตันแรงนี้จะเท่ากับการเปลี่ยนแปลงโมเมนตัมเทียบต่อเวลาของโมเลกุลทั้งหมดที่ชนและสะท้อนกลับบนพื้นที่รวมกัน ในสภาวะปกติจำนวนโมเลกุลที่มีมหาศาลทำให้การชนของโมเลกุลจะมีความถี่มากจนเสมือนแรงกระทำต่อเนื่องตลอดเวลาไม่ใช่เป็นการชนของแต่ละโมเลกุลแยกจากกัน การทดลองแสดงให้เห็นว่าการชนของแต่ละโมเลกุลเป็นแบบ ดังนั้น การเปลี่ยนแปลงโมเมนตัมเฉลี่ยจะอยู่ในแนวตั้งฉากกับผิวโดยไม่ขึ้นกับมุมชนของแต่ละโมเลกุล แรงกระทำจึงเป็นแรงกดตั้งฉากกับผิวเสมอ เรียกแรงกระทำต่อหน่วยพื้นที่นี้ว่า ความดันสถิต (Static pressure) ของของไหล ความดันบนพื้นผิววัตถุ เช่น แพนอากาศที่มีกระแสอากาศไหลผ่าน อาจมีค่าเปลี่ยนแปลงไปได้ตามตำแหน่งบนผิว แรงลัพธ์จากความดันรอบแพนอากาศนี้เป็นส่วนหนึ่งของแรงอากาศพลศาสตร์ที่จะศึกษาต่อไป จากนั้นนิยามของความดันให้ ΔA เป็นพื้นที่เล็กรอบจุด B ใดๆ บนผิววัตถุ และ $\Delta \vec{F}$ เป็นแรงกระทำตั้งฉากจะได้

$$p = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{F}}{\Delta A} \quad (1.2)$$

ทำนองเดียวกับนิยามของความหนาแน่น พื้นที่ ΔA จะไม่ลดขนาดลงเป็นศูนย์แต่จะมีขนาดเล็กมาก รอบจุด B เมื่อเทียบกับปัญหาแต่ยังคงมีขนาดใหญ่มากเมื่อเทียบกับขนาดโมเลกุลด้วยเหตุผลเดียวกัน ความดันสถิตมีหน่วยวัดเป็น นิวตันต่อตารางเมตร (N/m^2) ในระบบ SI

1.2.3 อุณหภูมิ (Temperature)

คนทั่วไปคุ้นเคยกับอุณหภูมิที่เป็นตัววัดความร้อนเย็นของสิ่งรอบตัว ในทางฟิสิกส์ โมเลกุลของสารจะมีพลังงานสะสมในรูปการเคลื่อนที่ ในของแข็งโมเลกุลจะสั่นกลับไปกลับมา ในของเหลวและก๊าซโมเลกุลจะเคลื่อนไหวไปมาอยู่ตลอดเวลาบางทีก็ชนกันเอง เนื่องจากแต่ละโมเลกุลเคลื่อนที่อยู่นิ่งจึงมีพลังงานจลน์ อุณหภูมิสูงหรือต่ำจะควบคุมกับการเคลื่อนที่มากน้อยของโมเลกุล อาจสรุปได้ว่าอุณหภูมิของก๊าซคือสิ่งบ่งชี้ระดับพลังงานจลน์เฉลี่ยสะสมของโมเลกุลของก๊าซ ตามทฤษฎีจลน์ของก๊าซอุณหภูมิสมบูรณ์จะเป็นสัดส่วนกับพลังงานจลน์เฉลี่ยของก๊าซที่เคลื่อนไหวไปมา ความจริงเรานิยามอุณหภูมิดังนี้ “อุณหภูมิเป็นจำนวนพลังงานจลน์เฉลี่ยของโมเลกุลในก๊าซ” ถ้า KE เป็นค่าพลังงานเฉลี่ยของโมเลกุลจะได้อุณหภูมิจากสมการ $KE = \frac{3}{2}kT$ เมื่อ k เป็นค่าคงที่โบลซ์มาน (Boltzman constant) มีค่าเท่ากับ 1.38×10^{-23} จูลล์ต่อเคลวิน (Joule/Kelvin, J/K) สำหรับก๊าซอุดมคติ อุณหภูมิสมบูรณ์แสดงความสัมพันธ์กับความดันและความหนาแน่นโดยสมการของสถานะ (Equation of state)

$$p = \rho RT \quad (1.3)$$

เมื่อ T คืออุณหภูมิสมบูรณ์เป็นองศาเคลวิน (K) มีค่าเท่ากับ $^{\circ}C + 273.15$, R คือค่าคงที่ของก๊าซซึ่งเป็นค่าเฉพาะขึ้นอยู่กับชนิดและส่วนผสมของก๊าซสำหรับอากาศมีค่า 287.074 J/kg·K อุณหภูมิของก๊าซเป็นคุณสมบัติที่สำคัญในการศึกษาการไหลที่มีการอัดตัว เช่นเดียวกับความหนาแน่นและความดัน อุณหภูมิเป็นคุณสมบัติของจุดและอาจมีค่าเปลี่ยนแปลงจากจุดหนึ่งไปยังอีกจุดหนึ่งได้ในปริมาตรของก๊าซ

1.2.4 ความยืดหยุ่นตัว (Elasticity)

ความยืดหยุ่นตัวของก๊าซหมายถึงการเปลี่ยนแปลงความดันที่ต้องใช้เพื่อให้เกิดการเปลี่ยนแปลงปริมาตรหนึ่งหน่วยความเครียด (Unit volume strain) นิยามความยืดหยุ่นตัวว่า คือการเปลี่ยนแปลงความดันต่อการเปลี่ยนแปลงปริมาตรเทียบกับปริมาตรเดิม ดังนั้น

$$E = \frac{-dp}{dV/V} \quad (1.4a)$$

เมื่อ E คือความยืดหยุ่นตัว (Bulk modulus) และ V คือปริมาตร เครื่องหมายลบในสมการมีเพื่อให้สอดคล้องกับการที่ความดันเพิ่มขึ้นทำให้ปริมาตรลดลง ก๊าซต่างจากของเหลวและของแข็งที่การเปลี่ยนความดันเพียงเล็กน้อยสามารถเปลี่ยนปริมาตรของก๊าซจนเห็นได้ ค่า E ของก๊าซจึงมีค่าน้อยเทียบกับค่า E ของของแข็งและของเหลว คือ ก๊าซเป็นตัวกลางที่มีการอัดตัวได้และส่วนกลับของค่า E

อาจจะใช้เป็นตัวชี้วัดการอัดตัวของก๊าซได้ ในบทที่สองจะแสดงให้เห็นว่า $\frac{dV}{V} = -\frac{dp}{\rho}$ ดังนั้นสมการ (1.4a) จะเขียนได้ใหม่เป็น

$$E = \rho \frac{dp}{d\rho} \quad (1.4b)$$

เนื่องจาก $dp/d\rho$ มีความสัมพันธ์โดยตรงกับค่าความเร็วเสียงของก๊าซ ผลของการอัดตัวจึงอาจแสดงให้เห็นได้ว่า ขึ้นกับตัวแปรที่มีค่าขึ้นอยู่กับอัตราส่วนความเร็วของการไหลกับความเร็วเสียงในของไหล ที่เรียก “เลขมัค” (Mach number) ค่าความเร็วเสียงในก๊าซสมบูรณ์คำนวณได้จากสมการ

$$a = \sqrt{\gamma RT} \quad (1.5)$$

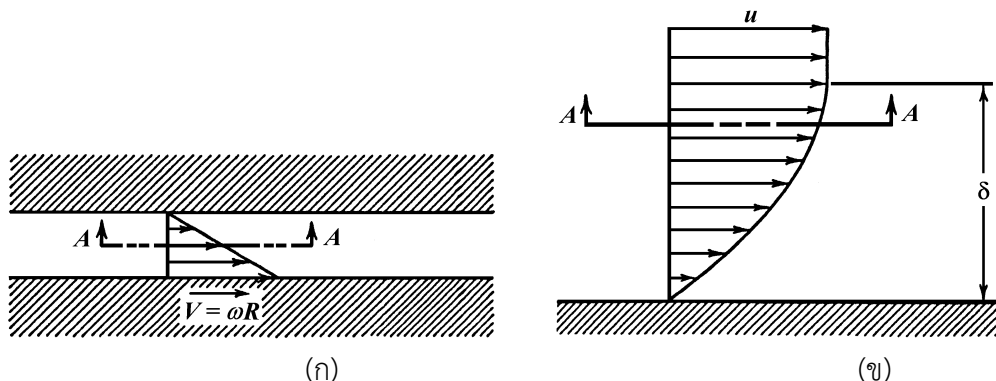
เมื่อ a คือความเร็วเสียง γ คืออัตราส่วนความร้อนจำเพาะ R คือค่าคงที่ของก๊าซ T คืออุณหภูมิสมบูรณ์ สำหรับอากาศ γ มีค่าประมาณ 1.4 ในย่านอุณหภูมิปกติ

1.2.5 ความหนืด (Viscosity)

ความหนืด คือ ความสามารถต้านทานการไหลของของไหล ในก๊าซความหนืดเป็นปรากฏการณ์ทางฟิสิกส์เนื่องจากการส่งผ่านโมเมนตัมเพราะการชนกันของโมเลกุลอิสระที่เคลื่อนที่แบบสุ่มไปมา ในก๊าซความเร็ว ณ จุดใดๆ เป็นผลลัพธ์ของเวกเตอร์ความเร็ว c ของทุกๆ โมเลกุลที่ผ่านจุดนั้นไปมาเฉลี่ยกัน เนื่องจากความเร็ว c เป็นแบบสุ่มทั้งขนาดและทิศทาง ดังนั้นในก๊าซที่อยู่นิ่งค่าเฉลี่ยของ c จะเป็นศูนย์ ในก๊าซที่มีการเคลื่อนที่ ความเร็วของแต่ละโมเลกุลที่ผ่านจุดที่มีความเร็ว $\vec{V}$ จะเป็นผลบวกของเวกเตอร์ความเร็วตรงจุดนั้นกับความเร็วสุ่มของโมเลกุล $\vec{V} + c$ ถ้าก๊าซเคลื่อนที่โดยมีชั้นการไหลที่ความเร็วต่างกัน โมเลกุลก๊าซในชั้นที่มีความเร็วสูงกว่าจะมีโมเมนตัมเฉลี่ยสูงกว่าโมเลกุลก๊าซในชั้นที่มีความเร็วต่ำกว่า เนื่องจากโมเลกุลของก๊าซเคลื่อนที่สะเปะสะปะไปมาจึงมีโมเลกุลอิสระเคลื่อนที่ข้ามไปมาระหว่างชั้นที่มีความเร็วต่างกัน โมเลกุลอิสระนี้เมื่อข้ามไปชนกับโมเลกุลในชั้นที่มีความเร็วสูงกว่าจะส่งผ่านโมเมนตัมในลักษณะที่จะทำให้ตัวเองเร็วขึ้นและดึงให้โมเลกุลที่ถูกชนช้าลงหรือกลับกันเมื่อวิ่งข้ามไปชั้นที่มีความเร็วต่ำกว่าเพราะการชนกันมีแนวโน้มจะทำความเร็วที่ต่างกันให้เท่ากัน กระบวนการที่เกิดขึ้นส่งผลให้เสมือนเกิดแรงเฉือนขึ้นระหว่างชั้นการไหลที่มีความเร็วต่างกัน เรียกว่าแรงเฉือนเนื่องจากความหนืด (Viscous shear force) แรงเฉือนหนืดต่อหน่วยพื้นที่ (Viscous shear stress) จะเท่ากับอัตราการส่งผ่านโมเมนตัมต่อพื้นที่และส่งผลกระทบระหว่างชั้นการไหลที่ติดกันเท่ากันแต่เกิดในทิศทางตรงข้าม โดยชั้นที่เร็วกว่าจะเสมือนถูกดึงให้ช้าลงจากแรงเฉือนและกลับกันชั้นที่ช้ากว่าจะเสมือนถูกลากให้เร็วขึ้นจากแรงเฉือนที่เท่ากัน

ผลจากความหนืดทำให้เกิดเงื่อนไขสำคัญที่ผิวสัมผัสของวัตถุกับของไหล เรียกว่า สภาพไม่มีการลื่นไถล (No-slip condition) ตามที่แสดงไว้ในรูป 1.1 ก สำหรับการไหลระหว่างแผ่นระนาบสองแผ่นวางขนานกัน แผ่นบนตรึงอยู่กับที่ แผ่นล่างเคลื่อนที่ด้วยความเร็ว $\vec{V}$ ภาพการแจกแจงความเร็วเขียนเป็นลูกศรให้เห็นระหว่างระนาบทั้งสอง เกิดขึ้นจากเงื่อนไขของการไม่ลื่นไถลที่ผิวสัมผัส

ทั้งสองด้าน คือ ความเร็วของชั้นบางๆ ที่ติดกับผิวจะมีความเร็วสัมผัสกับผิวเป็นศูนย์เสมอ (ไม่มีการลื่นไถลไปบนผิว) เพราะโมเลกุลของก๊าซที่ชนกับผิวระนาบจะถ่ายเทโมเมนตัมจนเมื่อสะท้อนออกมา



รูป 1.1 ก) แรงเฉือนหนืดในชั้นการไหล ข) การไหลในชั้นขีตผิว (Anderson, 2016)

จะมีความเร็วเฉลี่ยเท่ากับความเร็วของผิว ความเร็วของโมเลกุลที่สะท้อนมาจากด้านที่ตรงอยู่กับที่ จะมีความเร็วเฉลี่ยเป็นศูนย์ ส่วนที่สะท้อนจากด้านที่มีความเร็ว V จะมีความเร็วเฉลี่ยเป็น V ด้วย ในสภาพความหนาแน่นปกติระยะที่โมเลกุลเหล่านี้สะท้อนมาจากผนังก่อนจะชนกับโมเลกุลอื่นสั้นมาก เทียบกับระยะห่างระหว่างระนาบทั้งสอง (อยู่ในลำดับ 10^{-8} m) โมเลกุลที่สะท้อนออกมาเมื่อชนกับโมเลกุลที่อยู่ในชั้นถัดไปจะถ่ายเทโมเมนตัมตามกระบวนการที่ได้กล่าวมาแล้ว การชนกันของโมเลกุลจำนวนมากจะเกิดต่อเนื่องไปทุกชั้นเป็นผลให้เกิดการถ่ายโอนโมเมนตัมจนเกิดเป็นการแจกแจงความเร็วเป็นชั้นต่อเนื่องกันไป ผลจากการทดลองแสดงว่าแรงเฉือนต่อพื้นที่ที่กระทำต่อระนาบจะแปรผกผันกับระยะห่างระหว่างแผ่น Δh และแปรผันตรงกับขนาดความเร็ว V ตามสมการ

$$\tau = \mu \frac{V}{\Delta h} \quad (1.6)$$

เมื่อ μ (อ่านว่า “มิว”, mu) คือค่าคงที่ของการแปรผันขึ้นอยู่กับชนิดของของไหล เรียกว่า “ค่าสัมประสิทธิ์ความหนืด (Coefficient of viscosity)” หรือเรียกสั้นๆ ว่า ความหนืด (Viscosity) ของของไหล τ (อ่านว่า “ทาว”, tau) คือค่าแรงเค้นเฉือนเนื่องจากความหนืด (Viscous shear stress) สมการ (1.6) อาจเปลี่ยนให้อยู่ในรูปทั่วไปได้โดยพิจารณาค่าแรงเค้นเฉือนที่เกิดขึ้นระหว่างชั้นการไหลสองชั้นที่ติดกัน เช่น ระหว่างชั้นที่อยู่ด้านบนและด้านล่างพอดีของหน้าตัด AA ในรูป 1.1 ก ในกรณีนี้ความเร็วสัมผัสของชั้นการไหลคือ dV และระยะห่างระหว่างชั้นจะเปิดชิดกันจนมีค่าน้อยมาก dy ดังนั้น อาจเขียนสมการ (1.6) ใหม่เป็น

$$\tau = \mu \frac{dV}{dy} \quad (1.7)$$

ขอให้เข้าใจว่าในสมการ (1.7) ค่าอนุพันธ์หรือเกรเดียนของความเร็วจะอยู่ในทิศทางตั้งฉากกับระนาบที่คำนวณแรงเค้นเฉือนเสมอ ในกระแสอากาศที่มีความเร็ว u ไหลผ่านผิววัตถุ ผลของความหนืดจะก่อให้เกิดการการจับตัวเป็นชั้นบางๆ ของการไหลที่อยู่ติดกับผิวเรียก “ชั้นขีตผิว” ตามแนวคิด

ของ “Ludwig Prandtl” เช่นที่แสดงในรูป 1.1 ข แต่ละหน้าตัดในชั้นของการไหลนี้เราอาจนึกภาพของชั้นบางมากๆ ติดกันสองชั้นที่เคลื่อนตัวเหลื่อมกันและแรงเค้นเฉือนที่เกิดขึ้นบนหน้าตัดการไหลก็สามารถคำนวณได้โดยใช้สมการ (1.7) อันที่จริงเราสามารถคำนวณแรงเค้นเฉือนหรือแรงเสียดทานที่เกิดขึ้นที่ผิวเนื่องจากความหนืดได้จาก

$$\tau_w = \mu \left. \frac{du}{dy} \right|_{y=0} \quad (1.8)$$

สมการ (1.8) คือสมการ (1.7) ที่เราแทนค่าเกรเดียนต์ของความเร็ว du/dy ตรงที่ $y = 0$ หรือตรงที่ผิวสัมผัสนั่นเอง τ_w หมายถึงแรงเค้นเฉือนที่เกิดขึ้นที่ผิวสัมผัสหรือที่ผนัง

จากสมการ (1.6) มิติของความหนืดจะเป็นมวล/ระยะทาง-เวลา มีหน่วยเป็น kg/m-s หรือ N-s/m² ความหนืดของก๊าซเป็นคุณสมบัติที่เปลี่ยนแปลงไปกับอุณหภูมิและความดันแต่ที่อุณหภูมิต่ำกว่า 3000 K ความหนืดเปลี่ยนแปลงน้อยมากเมื่อความดันเปลี่ยน ดังนั้นโดยทั่วไปวิชาอากาศพลศาสตร์จะสมมุติให้ความหนืดขึ้นอยู่กับอุณหภูมิเพียงอย่างเดียว ความสัมพันธ์ระหว่างความหนืดและอุณหภูมิของอากาศกำหนดได้ตามสูตรของซัสเธอร์แลนด์ (Sutherland’s formula)

$$\frac{\mu}{\mu_r} = \left(\frac{T}{T_r} \right)^{\frac{3}{2}} \frac{T_r + 110}{T + 110} \quad (1.9)$$

เมื่อ T_r และ μ_r คืออุณหภูมิและความหนืดอ้างอิงมีค่าเท่ากับ 288.15 K และ 1.7894×10^{-5} kg/m-s ตามลำดับ หรืออาจใช้สูตรของไรย์เลห์ (Rayleigh’s formula) ที่ง่ายกว่าตามสมการ

$$\frac{\mu}{\mu_r} = \left(\frac{T}{T_r} \right)^{\frac{3}{4}} \quad (1.10)$$

เมื่อ T_r และ μ_r คืออุณหภูมิและความหนืดอ้างอิงมีค่าเท่ากับ 350 K และ 2.075×10^{-5} kg/m.s ตามลำดับ สมการ (1.10) สามารถใช้ได้ในช่วงอุณหภูมิ 200 K ถึง 500 K ซึ่งครอบคลุมย่านการบินความเร็วต่ำกว่าเสียงที่เราพิจารณา สังเกตด้วยว่าสมการ (1.9) และ (1.10) ได้มาจากการปรับผลการวัดในห้องทดลองเป็นสูตรสำเร็จจึงเป็นค่าโดยประมาณและต้องนำไปใช้อย่างเหมาะสม

บ่อยครั้งในการพิจารณาการไหลอัตราส่วนระหว่างสัมประสิทธิ์ความหนืดกับความหนาแน่นของของไหลเป็นคุณสมบัติที่สะดวกในการใช้งาน เราเรียกคุณสมบัตินี้ว่า “ความหนืดจลน์” (Kinematic viscosity) ใช้สัญลักษณ์แทนด้วยอักษรกรีก ν (อ่านว่า “นู”, nu)

$$\nu = \frac{\mu}{\rho} \quad (1.11)$$

1.3 บรรยากาศมาตรฐาน (The Standard Atmosphere)

มวลอากาศที่ล้อมรอบผิวโลกเรียกว่าชั้นบรรยากาศ อากาศยานและยานอวกาศ (Aerospace vehicle) ทั้งที่ทำการบินอยู่ในชั้นบรรยากาศเช่น เครื่องบิน เครื่องร่อน เฮลิคอปเตอร์ และที่ต้องบินฝ่าบรรยากาศของโลกตอนทะยานขึ้นและบินกลับคืนสู่ผิวโลกเช่น ดาวเทียม กระสวยอวกาศ โพรบ (probe) จะมีลักษณะอาการที่ขึ้นกับคุณสมบัติของอากาศในชั้นบรรยากาศที่ล้อมรอบอยู่ รายละเอียดคุณสมบัติของอากาศ เช่น อุณหภูมิ ความดัน ฯลฯ ในชั้นบรรยากาศจึงมีความสำคัญในการศึกษาวิชาอากาศพลศาสตร์ เนื่องจากบรรยากาศของโลกที่เคลื่อนไหวยู่ตลอดเวลาคุณสมบัติเหล่านี้จึงมีการเปลี่ยนแปลง ขึ้นอยู่กับระยะสูง ตำแหน่งบนพื้นโลก (เส้นรุ้ง เส้นแวง) เวลา ฤดูกาล แม้แต่จุดดับบนดวงอาทิตย์ยังมีอิทธิพลต่อชั้นบรรยากาศ การพิจารณาตัวแปรเหล่านี้ทั้งหมดมาคิดพิจารณาจึงทำได้ยากและไม่เหมาะสมในทางปฏิบัติ เพื่อให้เกิดความเป็นหนึ่งเดียวกันในการนำเสนอข้อมูลจากการบินทดสอบ ผลการทดลองในอุโมงค์ลม และอื่นๆกับสิ่งอ้างอิงเดียวกัน บรรยากาศมาตรฐานจึงถูกกำหนดขึ้นใช้ร่วมกัน เป็นค่าเฉลี่ยของความดัน อุณหภูมิ ความหนาแน่นและสมบัติอื่นๆ เป็นฟังก์ชันของระยะสูง ค่าเหล่านี้มาจากการวัดผสมกับแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ของบรรยากาศซึ่งเป็นค่าเฉลี่ยที่ดีพอสมควรเพื่อใช้เป็นตารางสถานะอ้างอิงกลาง ตาราง 1.1 แสดงการเปลี่ยนแปลงตามระยะสูงของ อุณหภูมิ ความดัน ความหนาแน่น และความหนืดของอากาศถึงระยะสูง 30 กิโลเมตร (100,000 ฟุต) ซึ่งเป็นระยะสูงของน่านฟ้าที่อากาศยานบินเป็นปกติ ในบรรยากาศมาตรฐานระยะสูง 0 จะถูกอ้างอิงเป็นระดับน้ำทะเล ที่ระดับน้ำทะเลมาตรฐานคุณสมบัติของอากาศมีค่าที่ตกลงกันดังนี้ (Houghton & Carpenter, 2019)

$$p_0 = 101,325 \text{ N/m}^2 \text{ หรือ Pascals } (= 2116 .2 \text{ lb/ft}^2)$$

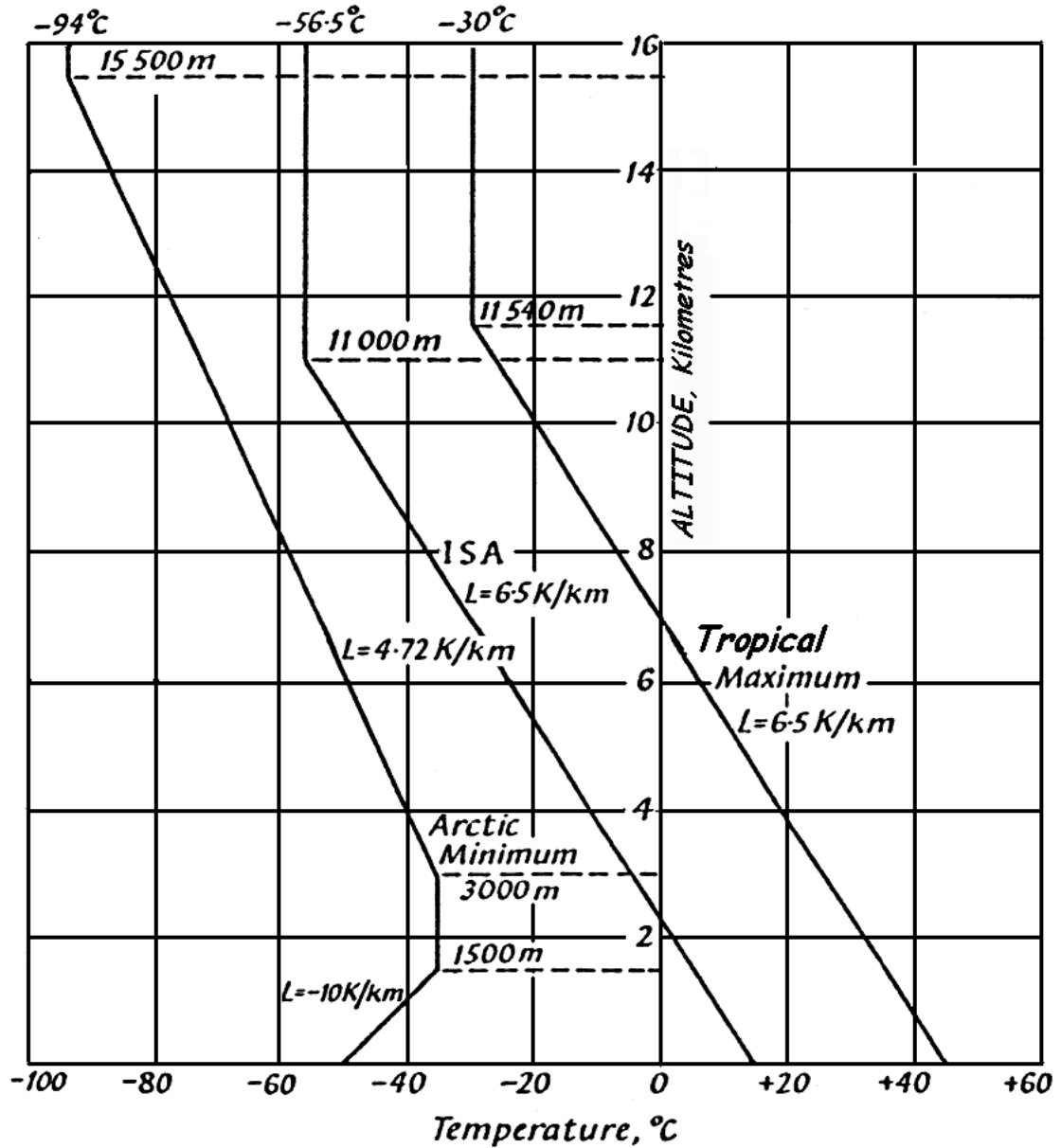
$$\rho_0 = 1.2250 \text{ kg/m}^3 \text{ } (= 0.0023769 \text{ slug/ft}^3)$$

$$T_0 = 273.15 + 15^\circ\text{C} = 288.15 \text{ K } (= 518.67 \text{ R})$$

$$\mu_0 = 1.7894 \times 10^{-5} \text{ kg/m}\cdot\text{s } (= 3.7372 \times 10^{-7} \text{ slug/ft}\cdot\text{s})$$

หลักสำคัญของบรรยากาศมาตรฐานคือการเปลี่ยนแปลงอุณหภูมิกับระยะสูง ดังแสดงในรูป 1.2 การเปลี่ยนแปลงอุณหภูมิกับระยะสูงเป็นไปโดยแนชดจากพื้นฐานการทดลอง ซึ่งประกอบด้วยชุดเส้นตรงหลายเส้นบางเส้นตั้งตั้ง (ย่านอุณหภูมิคงที่) บางเส้นทำมุมเอิน (ย่านเกรเดียน, gradient) จากระดับน้ำทะเลไปจนถึงระยะสูงประมาณ 11 กิโลเมตร อุณหภูมิจะลดลงตามระยะสูงในอัตราคงที่ 6.5°C ทุกระยะสูงที่เพิ่มขึ้น 1000 เมตร หลังจากนั้นอุณหภูมิจะมีค่าคงที่ -56.5°C ไปจนถึงระยะสูงประมาณ 25 กิโลเมตร สูงจากนั้นขึ้นไปอุณหภูมิจะเพิ่มขึ้นในอัตรา 3°C ทุกระยะสูงที่เพิ่มขึ้น 1000 เมตร จนมีค่า 9°C ที่ระยะสูง 47 กิโลเมตร อุณหภูมิจะมีค่าคงที่นี้ไปถึงระยะสูง 53 กิโลเมตรแล้วจะมีค่าลดลง คงที่ และเพิ่มขึ้นสลับไปมาจนสุดชั้นบรรยากาศ เมื่อกำหนด $T = T(h)$ ตามนิยามในรูป 1.2

ก็จะได้ $p = p(h)$ และ $\rho = \rho(h)$ จากกฎทางฟิสิกส์ดังต่อไปนี้



รูป 1.2 การเปลี่ยนแปลงของอุณหภูมิกับระยะสูงในชั้นบรรยากาศ (Houghton & Carpenter, 2019)

พิจารณาสมการไฮโดรสแตติก (จากหัวข้อ 1.9)

$$dp = -\rho g_0 dh \quad (1.69)$$

หารด้วยสมการสถานะ (1.3) ได้

$$\frac{dp}{p} = \frac{-\rho g_0 dh}{\rho RT} = -\frac{g_0}{RT} dh \quad (1.12)$$

ในชั้นบรรยากาศที่ระดับน้ำทะเลถึงระยะสูง 11 กิโลเมตร อุณหภูมิเปลี่ยนแปลงกับระยะสูงตามสมการ $T = T_0 + ah$ เมื่อ T_0 คืออุณหภูมิที่ระดับน้ำทะเล a คืออัตราเปลี่ยนแปลงของอุณหภูมิซึ่งเป็น

ค่าคงที่ในชั้นนี้มีค่า $-0.0065^{\circ}\text{C/m}$ h คือความสูงเป็นเมตร เมื่อนำไปแทนในสมการ (1.12) แล้วอินทิเกรตจาก h_0 ถึง h โดยใช้ความสัมพันธ์ $dT = a dh$ จะได้

$$\begin{aligned} \int_{h_0}^h \frac{dp}{p} &= \int_{h_0}^h -\frac{g_0}{RT} dh \\ \int_{p_0}^p \frac{dp}{p} &= -\frac{g_0}{aR} \int_{T_0}^T \frac{dT}{T} \\ \ln \frac{p}{p_0} &= -\frac{g_0}{aR} \ln \frac{T}{T_0} \\ \text{ดังนั้น} \quad \frac{p}{p_0} &= \left(\frac{T}{T_0} \right)^{-\frac{g_0}{aR}} \end{aligned} \quad (1.13)$$

จากสมการสถานะ $\frac{p}{p_0} = \frac{\rho T}{\rho_0 T_0}$ แทนในสมการ(1.13) ได้

$$\text{ดังนั้น} \quad \frac{\rho}{\rho_0} = \left(\frac{T}{T_0} \right)^{-\left(\frac{g_0}{aR} + 1 \right)} \quad (1.14)$$

ในชั้นบรรยากาศที่ระยะสูง 11 กิโลเมตรถึง 25 กิโลเมตร อุณหภูมิคงที่ $T_{11} = -56.5^{\circ}\text{C} = 216.15\text{ K}$ นำไปแทนในสมการ (1.12) แล้วอินทิเกรตจาก h_{11} ถึง h (ตัวห้อย 11 แทนคุณสมบัติที่ระยะสูง 11 กิโลเมตรที่เป็นค่าฐานของชั้นนี้)

$$\begin{aligned} \int_{p_{11}}^p \frac{dp}{p} &= -\frac{g_0}{RT_{11}} \int_{h_{11}}^h dh \\ \text{จะได้} \quad \ln \frac{p}{p_{11}} &= -\frac{g_0}{RT_{11}} (h - h_{11}) \\ \text{ดังนั้น} \quad \frac{p}{p_{11}} &= e^{-(g_0/RT_{11})(h-h_{11})} \end{aligned} \quad (1.15)$$

จากสมการสถานะ $\frac{p}{p_{11}} = \frac{\rho T_{11}}{\rho_{11} T_{11}}$ (ในชั้นนี้อุณหภูมิคงที่) แทนในสมการ (1.15) ได้

$$\frac{\rho}{\rho_{11}} = e^{-(g_0/RT_{11})(h-h_{11})} \quad (1.16)$$

สมการ (1.13) (1.14) (1.15) และ (1.16) คือสมการที่ใช้สร้างบรรยากาศมาตรฐาน เริ่มต้นจากระดับน้ำทะเล ($h = 0$) ใช้ค่าความดัน อุณหภูมิ ความหนาแน่นที่ระดับน้ำทะเลเป็นค่าฐานของชั้นบรรยากาศแรก หาค่าอุณหภูมิเป็นฟังก์ชันของความสูงโดยใช้ข้อมูลจากรูป 1.2 ใช้ค่า T นี้ในสมการ (1.13) และ (1.14) คำนวณค่า p และ ρ ที่ระยะสูงต่างๆจนถึงระยะสูง 11 กิโลเมตร จากนั้นใช้ค่าที่คำนวณได้ที่ 11 กิโลเมตรเป็นฐานของย่านอุณหภูมิคงที่ ใช้สมการ (1.15) และ (1.16) คำนวณค่า p และ ρ ที่ระยะสูงต่างๆจนถึงระยะสูง 25 กิโลเมตร ใช้ค่าที่คำนวณได้ที่ระยะสูงสุดของชั้นเป็นฐานของการคำนวณในชั้นบรรยากาศถัดไปโดยใช้สมการ (1.13) และ (1.14) ในย่านที่อุณหภูมิเปลี่ยนแปลง

และใช้สมการ (1.15) และ(1.16) ในย่านอุณหภูมิกึ่งที่ อย่างนี้เรื่อยไปก็สามารถสร้างตารางบรรยากาศมาตรฐานขึ้นมาได้ ตาราง 1.1 เป็นตารางดังกล่าวในหน่วย SI ช่องแรกเป็นระยะสูง ช่องถัดมาเป็น อุณหภูมิ ความดัน ความหนาแน่น ความหนืด ที่ระยะสูงต่าง ๆ ตามลำดับ ซึ่งหาได้ด้วยวิธีดัง ที่กล่าว

ตารางที่ 1.1 บรรยากาศมาตรฐาน (Anderson, 2016)

<i>Altitude</i> (m)	<i>T</i> (°C)	<i>p</i> N/ m ²	<i>Density (ρ)</i> kg/ m ³	<i>μ</i> × 10 ⁵ kg/ m s	<i>ν</i> × 10 ⁵ m ² / s
-500	16.3	107,477	1.2849	1.7957	1.3975
0*	15	101,325	1.2250	1.7894	1.4607
500	11.75	95,461	1.1673	1.7737	1.5195
1,000	8.5	89,876	1.1117	1.7579	1.5813
2,000	2	79,501	1.0066	1.7260	1.7147
3,000	-4.5	70,121	0.90926	1.6938	1.8629
4,000	-11	61,660	0.81935	1.6612	2.2075
5,000	-17.5	54,048	0.73643	1.6283	2.2110
6,000	-24	47,217	0.66011	1.5949	2.4162
7,000	-30.5	41,105	0.59002	1.5612	2.6460
8,000	-37	35,651	0.52578	1.5270	2.9043
9,000	-43.5	30,800	0.46706	1.4924	3.1954
10,000	-50	26,500	0.41351	1.4574	3.5245
11,100	-56.5	22,346	0.35932	1.4219	3.9573
12,000	-56.5	19,399	0.31194	1.4219	4.5584
14,000	-56.5	14,170	0.22785	1.4219	6.2247
15,000	-56.5	12,112	0.19475	1.4219	7.3014
16,000	-56.5	10,353	0.16647	1.4219	8.5417
18,000	-56.5	7,565.2	0.12165	1.4219	11.6888
20,000	-56.5	5,529.3	0.088909	1.4219	15.9933
25,000	-56.5	2,527.3	0.040639	1.4219	34.9896
30,000	-46.5	1,185.5	0.017861	1.4763	82.6562

* ระดับน้ำทะเลมาตรฐาน

ตารางบรรยากาศมาตรฐานเป็นเพียงบรรยากาศอ้างอิงไม่ใช่คุณสมบัติจริงของบรรยากาศ ณ เวลาใด สถานที่ใด เช่นในตาราง 1.1 บอกเราว่าที่ระยะสูง 3 กิโลเมตร $p = 70,121 \text{ N/m}^2$ $T = 268.65 \text{ K}$ $\rho = 0.90926 \text{ kg/m}^3$ แต่ในความเป็นจริงถ้าเราลอยตัวจากโรงเรียนนายเรืออากาศนวมินทกษัตริยาธิราช ตรงดิ่งขึ้นไปสูงจากระดับน้ำทะเล 3 กิโลเมตร จะรู้สึกถึงความดัน อุ่นหภูมิ และความหนาแน่นไม่เท่ากับค่าจากตาราง 1.1 แน่ บรรยากาศมาตรฐานเพียงแต่ช่วยให้เราสามารถทำข้อมูลการทดลองและการคำนวณให้ใช้เป็นสิ่งที่อ้างอิงที่สะดวกตามที่ได้ตกลงกันไว้เท่านั้น ดังจะให้เห็นในหัวข้อต่อไป

ตัวอย่าง 1.1 จงคำนวณหาค่า T , p และ ρ ของบรรยากาศมาตรฐานที่ระยะสูง 14 กิโลเมตร

วิธีทำ เนื่องจาก T เป็นตัวกำหนดการแปรเปลี่ยนบรรยากาศมาตรฐาน จึงอ้างอิงรูป 1.2 ได้ และพบว่าที่ $h = 14$ กิโลเมตร $T = 216.15 \text{ K}$ หา p และ ρ ได้โดยใช้สมการ (1.13) ถึง (1.16) ในช่วงๆจากระดับน้ำทะเลขึ้นไปจนถึงความสูงที่ต้องการ ช่วงแรกเป็นย่านเกรเดียน จาก $h = 0$ ถึง $h = 11 \text{ km}$ ซึ่งมีค่า $a = -0.0065 \text{ K/m}$ เพราะฉะนั้นใช้สมการ (1.13) และ (1.14) หาค่า p และ ρ ตามลำดับที่ $h = 11 \text{ km}$ ได้ว่า

$$\begin{aligned}\frac{p}{p_0} &= \left(\frac{T}{T_0} \right)^{-\frac{g_0}{aR}} \\ p &= p_0 \left(\frac{T}{T_0} \right)^{-\frac{g_0}{aR}} = (101325 \text{ N/m}^2) \cdot \left(\frac{216.15 \text{ K}}{288.15 \text{ K}} \right)^{-\frac{9.81 \text{ m/s}^2}{-0.0065^\circ\text{C/m} \times 287.05 \text{ J/kg}^\circ\text{C}}} \\ &= 2.236 \times 10^4 \text{ N/m}^2 \\ \frac{\rho}{\rho_0} &= \left(\frac{T}{T_0} \right)^{-\left(\frac{g_0}{aR} + 1 \right)} \\ \rho &= \rho_0 \left(\frac{T}{T_0} \right)^{-\left(\frac{g_0}{aR} + 1 \right)} \\ &= (1.225 \text{ kg/m}^3) \cdot \left(\frac{216.15 \text{ K}}{288.15 \text{ K}} \right)^{-\left(\frac{9.81 \text{ m/s}^2}{-0.0065^\circ\text{C/m} \times 287.05 \text{ J/kg}^\circ\text{C}} + 1 \right)} \\ &= 0.360 \text{ kg/m}^3\end{aligned}$$

ในที่นี้ $g_0 = 9.81 \text{ m/s}^2$ เป็นค่าความเร่งเนื่องจากแรงโน้มถ่วง ค่า p และ ρ ที่ได้นี้เป็นค่าฐานของย่านอุณหภูมิคงที่ขึ้นไป (ดูรูป 1.2) สมการในย่านนี้ คือ สมการ (1.15) และ (1.16) ซึ่งตอนนี้อยู่ที่ $p_{11} = 2.236 \times 10^4 \text{ N/m}^2$ และ $\rho_{11} = 0.360 \text{ kg/m}^3$ และที่ $h = 14 \text{ km}$ $h - h_{11} = 14 - 11 = 3 \text{ km} = 3000 \text{ m}$ จากสมการ (1.15)

ดังนั้น

$$\frac{p}{p_{11}} = e^{-(g_0/RT_{11})(h-h_{11})}$$

$$\begin{aligned}
 p &= p_{11} e^{-(g_0/RT_{11})(h-h_{11})} \\
 &= (2.236 \times 10^4 \text{ N/m}^2) \cdot e^{-\left(\frac{9.81 \text{ m/s}^2}{287.05 \text{ J/kg K} \times 216.15 \text{ K}}\right)(3000 \text{ m})} \\
 &= 1.4 \times 10^4 \text{ N/m}^2 \quad \text{ตอบ}
 \end{aligned}$$

จากสมการ (1.16)

$$\begin{aligned}
 \rho &= \rho_{11} e^{-(g_0/RT_{11})(h-h_{11})} \\
 &= (0.360 \text{ kg/m}^3) \cdot e^{-\left(\frac{9.81 \text{ m/s}^2}{287.05 \text{ J/kg K} \times 216.15 \text{ K}}\right)(3000 \text{ m})} \\
 &= 0.224 \text{ kg/m}^3 \quad \text{ตอบ}
 \end{aligned}$$

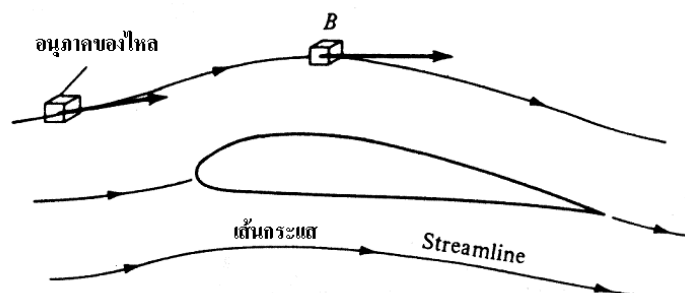
ค่าที่ได้ตรงกับตาราง 1.1 ในขอบเขตของการปิดเศษ ตัวอย่างนี้แสดงให้เห็นวิธีคำนวณค่าในตาราง และสามารถนำไปใช้คำนวณค่า p และ ρ ที่ระยะสูงที่ไม่อยู่ในตารางได้

1.4 ความเร็วของการไหล (Flow Velocity)

วิชาอากาศพลศาสตร์มีความสนใจหลักที่การเคลื่อนไหวยของกระแสอากาศ ดังนั้นความเร็วของการไหล (Flow velocity) จึงเป็นตัวแปรสำคัญในการพิจารณา แนวคิดเรื่องความเร็วของของไหลจะกินความลึกซึ้งกว่าความเร็วของวัตถุแข็งในวิชากลศาสตร์ เมื่อพิจารณาวัตถุที่เคลื่อนที่เลื่อนไหลไป(ไม่มีการหมุน) เช่นรถยนต์ที่วิ่งตรงไปด้วยความเร็ว 30 m/s ทุกส่วนที่ประกอบกันขึ้นเป็นรถยนต์จะเคลื่อนที่ไปพร้อมกันด้วยความเร็ว 30 m/s ในทิศทางเดียวกัน แต่ถ้าพูดถึงความเร็วของของไหลของกระแสอากาศที่เป็นธาตุที่ไม่มีรูปทรง ในขณะที่เคลื่อนที่ส่วนหนึ่งของของไหลอาจเคลื่อนที่ด้วยความเร็วที่ต่างจากอีกส่วนหนึ่งก็ได้ เราจึงต้องยอมรับมุมมองใหม่ดังต่อไปนี้ ลองพิจารณาการไหลของอากาศรอบๆ แพนอากาศ (Aerofoil หรือ Airfoil) ดังภาพสะเก้ชในรูป 1.3 แล้วจินตนาการว่ากำลังจับตามวลขนาดเล็กจิ๋วที่จำเพาะเจาะจงอันหนึ่งของของไหลที่เรียกว่าอนุภาคของไหล (Fluid particle) หรือส่วนย่อยของของไหล (Fluid element) และเฝ้ามองอนุภาคของไหลนี้เคลื่อนที่ไปกับเวลาจะพบว่าความเร็วของอนุภาคจะเปลี่ยนไปทั้งขนาดและทิศทางเมื่อมันผ่านจากจุดหนึ่งไปสู่อีกจุดหนึ่ง ที่นี้ลองเปลี่ยนมาจับตามดูเพียงจุดใดจุดหนึ่งเช่นจุด B ในรูป 1.3 เราจะสามารถให้ความหมายของความเร็วของการไหลได้ว่า “ความเร็วของการไหล(ไม่ใช่ความเร็วของอนุภาคของไหล) ณ จุดคงที่ B ใดๆในบริเวณการไหลคือความเร็วของอนุภาคของไหลขนาดเล็กจิ๋วขณะที่มันวิ่งผ่านจุดคงที่ B ไป”

ในรูป 1.3 อนุภาคของไหลจะวิ่งไปตามเส้นทางแน่นอนอันเดิมเสมอในบริเวณการไหลตรงราบเท่าที่การไหลเป็นแบบคงเส้นคงวา (Steady flow) นั่นคือที่แต่ละจุดความเร็วของการไหลไม่ขึ้นๆ ลงๆ กับเวลา (Steady – ไม่แปรเปลี่ยนไปตามกาลเวลา) เส้นทางนี้เรียกว่าเส้นกระแส (Streamline) ของ

การไหล ซึ่งมีความสำคัญเพราะการเขียนเส้นกระแสในบริเวณการไหลเป็นวิธีสร้างภาพการเคลื่อนที่ของของไหลได้ ดังรายละเอียดเรื่องเส้นกระแสในบทที่ 2

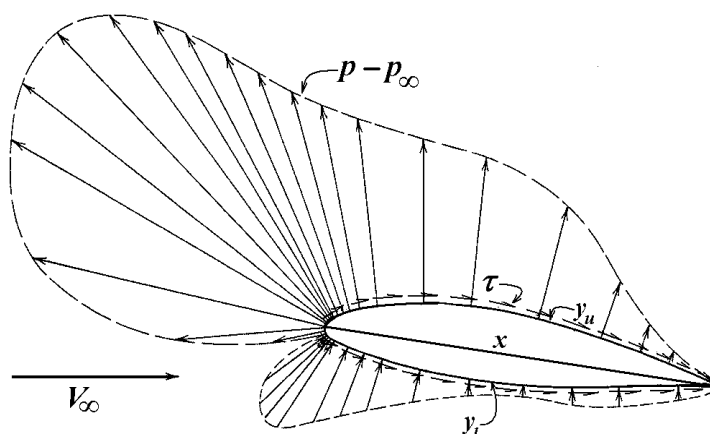


รูป 1.3 ภาพแสดงความเร็วของการไหลและเส้นกระแส

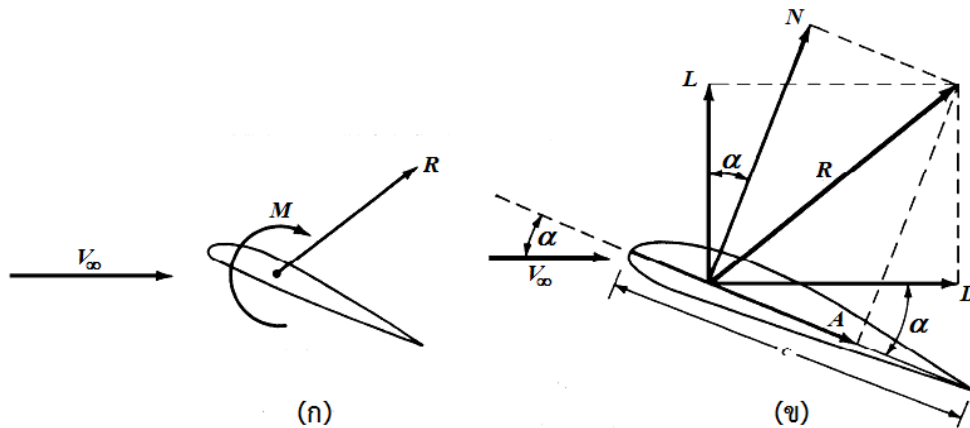
1.5 แรงและโมเมนต์ทางอากาศพลศาสตร์ (Aerodynamic Forces and Moments)

สำหรับผู้เริ่มต้นศึกษาวิชาอากาศพลศาสตร์ กำเนิดของแรงและโมเมนต์บนอากาศยานขณะทำการบินหรือ การคำนวณแรงต้านลมของรถยนต์ที่วิ่งด้วยความเร็ว 100 กม./ชม. บนทางหลวงดูจะเป็นปัญหาที่สลับซับซ้อนอย่างมาก โดยเฉพาะเมื่อคำนึงถึงว่าต้องพิจารณาการไหลของกระแสอากาศแบบสามมิติผ่านอากาศยาน หรือรถยนต์ ซึ่งเกี่ยวข้องกับรูปทรง กระแสอากาศ และสภาวะแวดล้อมที่สัมพันธ์กันดูจะเป็นเรื่องสลับซับซ้อนจะเข้าใจจนเหมือนเรื่องเหล่านี้และปัญหาทางอากาศพลศาสตร์อื่นๆอีกมากมายอยู่ในแดนสนธยา ปัญหาเหล่านี้แม้จะยากแต่ไม่ได้ซับซ้อนจนเข้าใจไม่ได้ อันที่จริงแรงกระทำที่เกิดขึ้นที่ผิวยานพาหนะหรือผิววัตถุที่มีกระแสอากาศไหลผ่านจะแยกออกเป็นสองส่วนเท่านั้น คือ แรงกดลงบนผิวเนื่องจากความดันของอากาศเหนือบริเวณนั้นกับแรงเสียดทานเนื่องจากความเค้นเฉือน (Shear stress) เนื่องจากความหนืด ทั้งความดัน (Pressure, p) และความเค้นเฉือน (Shear stress, τ) จะมีการแจกแจงไปทั่วบริเวณผิววัตถุทั้งหมดและมีค่าเปลี่ยนแปลงไปตามลักษณะการไหล

รูป 1.4 แสดงตัวอย่างการแจกแจงความดันและความเค้นเฉือนที่เกิดบนแพนอากาศ



รูป 1.4 การแจกแจงความดันและความเค้นเฉือนรอบแพนอากาศ (Anderson, 2016)



รูป 1.5 ก) แรงลัพท์อากาศพลศาสตร์ ข) การแตกแรงบนแพนอากาศ

ผลของความดันและความเค้นเฉือนที่กระทำรอบวัตถุรวมกันทั้งหมดคือแรงลัพท์ R และโมเมนต์ M ทางอากาศพลศาสตร์ที่เกิดขึ้นตามที่แสดงในรูป 1.5 ก แรงลัพท์ R สามารถแตกออกตามแนวต่างๆเพื่อความสะดวกในการพิจารณาได้ตามรูป 1.5 ข ให้ V_∞ เป็นความเร็วลมสัมพัทธ์หรือเรียกอีกอย่างว่าความเร็วกระแสลมอิสระ (Freestream velocity) ให้ความยาวคอร์ด c เป็นระยะวัดจากชายหน้าสุด (Leading edge) ถึงชายหลังสุด (Trailing edge) ของแพนอากาศในรูป จะได้

L = แรงยก (Lift) = ส่วนย่อยของแรง R ตั้งฉากกับ V_∞

D = แรงต้าน (Drag) = ส่วนย่อยของแรง R ขนานกับ V_∞

N = แรงตั้งฉาก (Normal force) = ส่วนย่อยของแรง R ตั้งฉากกับ c

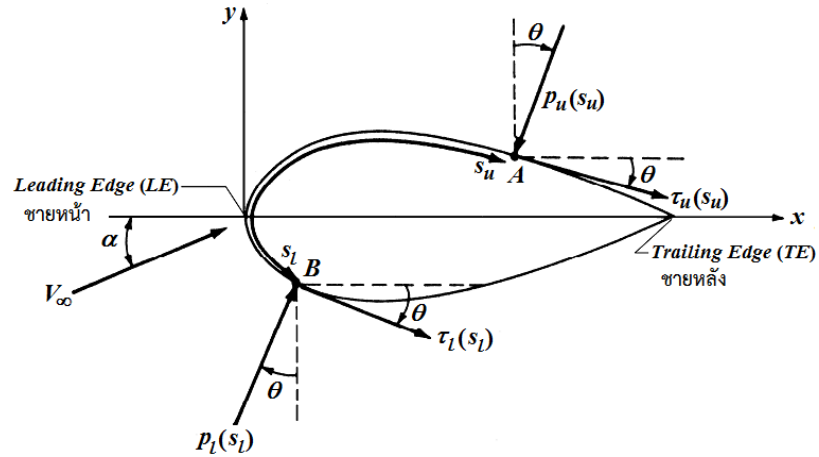
A = แรงขนานแกน (Axial force) = ส่วนย่อยของแรง R ขนานกับ c

ในรูป 1.5 ข มุมระหว่างแนวคอร์ดกับความเร็วลมสัมพัทธ์ เรียกว่ามุมปะทะ (Angle of attack) ใช้สัญลักษณ์แทนด้วยอักษรกรีก α และจะได้ความสัมพันธ์ระหว่าง L , D , N , A คือ

$$L = N \cos \alpha - A \sin \alpha \quad (1.17)$$

$$D = N \sin \alpha + A \cos \alpha \quad (1.18)$$

ตอนนี้จะพิจารณาในรายละเอียดการรวมแรงจากความดันและความเค้นเฉือนเพื่อให้ได้แรงลัพท์โดยวิธีอินทิเกรท เริ่มต้นจากการไหลสองมิติผ่านรูปทรงแพนอากาศดังในรูป 1.6 เมื่อใช้แนวคอร์ดเป็นหลัก



รูป 1.6 การกำหนดสัญลักษณ์สำหรับการอินทิเกรตแรงบนแผนอากาศสองมิติ (Anderson, 2016)

เลือกแกนพิกัด x และ y ให้อยู่ในแนวขนานและตั้งฉากกับคอร์ดเริ่มต้นจากชายหน้า แกน x ทำมุม α กับความเร็วลมสัมพัทธ์ V_∞ ให้ s_u เป็นระยะที่วัดไปตามผิวโค้งด้านบนจากชายหน้าถึงจุด A ใดๆ และให้ s_l เป็นระยะวัดตามผิวโค้งด้านล่างจากชายหน้าถึงจุด B ใดๆ กำหนดให้ความดันและความเค้นเฉือนที่กระทำบนตามผิวบนแทนด้วย p_u และ τ_u ซึ่งเป็นฟังก์ชันของ s_u ทำนองเดียวกันกำหนดให้ความดันและความเค้นเฉือนที่กระทำบนตามผิวล่างแทนด้วย p_l และ τ_l ซึ่งเป็นฟังก์ชันของ s_l ในรูป p กระทำตั้งฉากกับผิวและทำมุม θ กับแนวตั้ง τ กระทำขนานกับผิวและทำมุม θ กับแนวระดับ กำหนดให้มุม θ เป็นบวกเมื่อวัดจากตามเข็มนาฬิกาจากแนวตั้งถึงแนวของ p และจากแนวระดับถึงแนวของ τ ในรูป 1.6 แสดงตำแหน่งของ p และ τ ที่มุม θ เป็นบวก ถ้ารูปแผนอากาศในรูป 1.6 เป็นภาพตัดขวางของทรงกระบอกยาวมากที่มีหน้าตัดคงที่ ส่วนของทรงกระบอกยาวหนึ่งหน่วยแสดงในรูป 1.7 โดยพื้นที่ส่วนแลเงาเป็นพื้นที่บนผิวเล็กๆเป็นแถบกว้าง ds ยาวหนึ่งหน่วย ดังนั้นแรงกระทำเนื่องจากความดันและความเค้นเฉือนบนพื้นที่ผิว ds คือ pds และ τds ให้ N' และ A' เป็นแรงตั้งฉากและแรงขนานแก่อ่อนหน่วยความยาวทรงกระบอก ส่วนของแรงขนาดน้อยๆ dN'_u และ dA'_u เนื่องจาก p_u และ τ_u บนพื้นที่ ds_u ของทรงกระบอกจะเท่ากับ

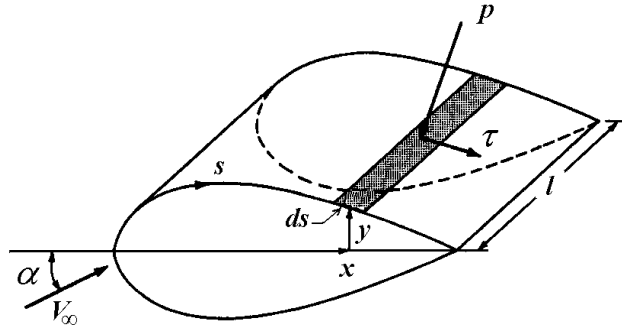
$$dN'_u = -p_u ds_u \cos \theta - \tau_u ds_u \sin \theta \quad (1.19)$$

$$dA'_u = -p_u ds_u \sin \theta + \tau_u ds_u \cos \theta \quad (1.20)$$

ส่วนของแรงขนาดน้อยๆ dN'_l และ dA'_l เนื่องจาก p_l และ τ_l บนพื้นที่ ds_l ของทรงกระบอกจะเท่ากับ

$$dN'_l = p_l ds_l \cos \theta - \tau_l ds_l \sin \theta \quad (1.21)$$

$$dA'_l = p_l ds_l \sin \theta + \tau_l ds_l \cos \theta \quad (1.22)$$



รูป 1.7 แรงอากาศพลศาสตร์บนส่วนย่อยของผิววัตถุ (Anderson, 2016)

ในสมการ (1.19) ถึง (1.22) เครื่องหมายของ N' และ A' จะมีทิศทางเป็นบวกตามแกนพิกัด x และ y ถ้ามุม θ ในสมการมีการวัดตามที่กำหนดไว้ตอนต้น ผลรวมของ N' และ A' ต่อหน่วยความยาวได้จากการอินทิเกรตสมการ (1.19) ถึง (1.22) จากชายหน้าถึงชายหลัง

$$N' = - \int_{LE}^{TE} (p_u \cos \theta + \tau_u \sin \theta) ds_u + \int_{LE}^{TE} (p_l \cos \theta - \tau_l \sin \theta) ds_l \quad (1.23)$$

$$A' = \int_{LE}^{TE} (-p_u \sin \theta + \tau_u \cos \theta) ds_u + \int_{LE}^{TE} (p_l \sin \theta + \tau_l \cos \theta) ds_l \quad (1.24)$$

N' และ A' ตามสมการ (1.23) และ (1.24) นำไปคำนวณหา L' และ D' ได้ตามสมการ (1.17) และ (1.18) ในส่วนของโมเมนต์ทางอากาศพลศาสตร์อาจหาได้โดยวิธีคล้ายๆกัน พิจารณาการเกิดโมเมนต์รอบจุดหน้าสุดของแผนอากาศ กำหนดให้โมเมนต์ที่พยายามหมุนให้มุมปะทะเพิ่มขึ้น (pitch up) เป็นบวก และ โมเมนต์ที่พยายามหมุนให้มุมปะทะลดลง (pitch down) เป็นลบ จะได้โมเมนต์รอบจุดหน้าสุดเนื่องจากความดันและความเค้นเฉือนที่ทำบนพื้นที่ ds ที่ห่างจากชายหน้าเป็นระยะ x และห่างจากแนวคอร์ดเป็นระยะ y

$$dM'_u = (p_u \cos \theta + \tau_u \sin \theta) x ds_u + (-p_u \sin \theta + \tau_u \cos \theta) y ds_u \quad (1.25)$$

$$dM'_l = (-p_l \cos \theta + \tau_l \sin \theta) x ds_l + (p_l \sin \theta + \tau_l \cos \theta) y ds_l \quad (1.26)$$



รูป 1.8 การกำหนดทิศทางของโมเมนต์อากาศพลศาสตร์ (Anderson, 2016)

อย่าลืมว่าเพื่อให้ได้เครื่องหมายของโมเมนต์ตามกำหนด มุม θ ต้องวัดตามที่ถูกกำหนดไว้ตอนต้น และระยะ y จะเป็นบวกเมื่ออยู่เหนือแนวคอร์ดและเป็นลบเมื่ออยู่ต่ำกว่าแนวคอร์ด อินทิเกรตสมการ (1.25) และ (1.26) แล้วนำมารวมกันจะได้ผลรวมของโมเมนต์รอบชายหน้า

$$\begin{aligned}
M'_{LE} = & \int_{LE}^{TE} [(p_u \cos \theta + \tau_u \sin \theta)x - (p_u \sin \theta - \tau_u \cos \theta)y] ds_u \\
& + \int_{LE}^{TE} [(-p_l \cos \theta + \tau_l \sin \theta)x + (p_l \sin \theta + \tau_l \cos \theta)y] ds_l
\end{aligned} \quad (1.27)$$

การคำนวณตามสมการ (1.23) (1.24) และ (1.27) ค่า x, y และ θ ถูกกำหนดให้เปลี่ยนแปลงไปตามส่วนโค้ง s ซึ่งกำหนดโดยรูปร่างของแพนอากาศ ดังนั้นถ้าเราทราบการแจกแจงของความดัน p และความเค้นเฉือน τ (จากการคำนวณหรือการทดลอง) ตามผิวแพนอากาศ ก็สามารถใช้สมการเหล่านี้คำนวณหาค่าแรงและโมเมนต์ที่กระทำได้ดังจะเห็นจากตัวอย่างต่อไป

การพิจารณาแรงและโมเมนต์ที่กระทำต่อวัตถุตรงๆ บางครั้งก็ไม่สะดวก ดังนั้นการพิจารณาแรงและโมเมนต์ในรูปไร้หน่วยซึ่งเรียกว่าค่าสัมประสิทธิ์ (Coefficient) มักถูกนำมาใช้บ่อยๆ ในวิชาอากาศพลศาสตร์ สัมประสิทธิ์ของแรงและโมเมนต์อากาศพลศาสตร์ มีนิยามกำหนดได้ดังนี้

สัมประสิทธิ์ของแรง = แรงหารด้วยความดันพลวัต (Dynamic pressure) กับพื้นที่อ้างอิง

สัมประสิทธิ์ของโมเมนต์ = โมเมนต์หารด้วยความดันพลวัตกับพื้นที่อ้างอิงและระยะแขนอ้างอิง
ดังนั้นจากนิยามจะได้ว่า

$$\text{สัมประสิทธิ์ของแรงยก (Lift coefficient)} : C_L = \frac{L}{q_\infty S} \quad (1.28a)$$

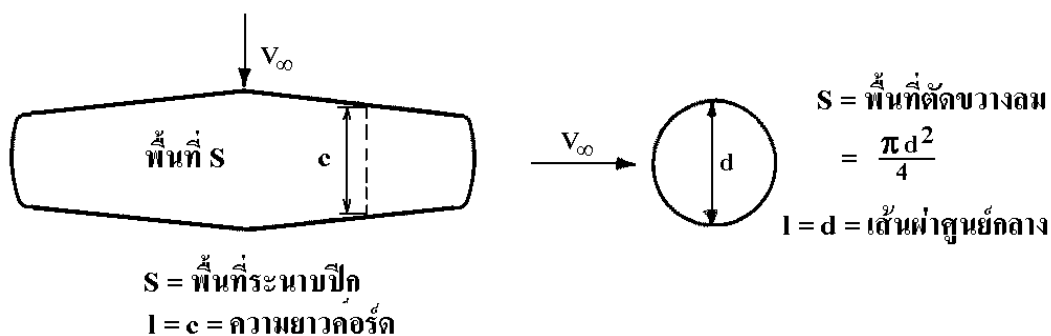
$$\text{สัมประสิทธิ์ของแรงต้าน (Drag coefficient)} : C_D = \frac{D}{q_\infty S} \quad (1.28b)$$

$$\text{สัมประสิทธิ์ของแรงตั้งฉาก (Normal force coefficient)} : C_N = \frac{N}{q_\infty S} \quad (1.28c)$$

$$\text{สัมประสิทธิ์ของแรงขนานแกน (Axial force coefficient)} : C_A = \frac{A}{q_\infty S} \quad (1.28d)$$

$$\text{สัมประสิทธิ์ของโมเมนต์ (Moment coefficient)} : C_M = \frac{M}{q_\infty Sl} \quad (1.28e)$$

ในสมการถ้าให้ ρ_∞ และ V_∞ เป็นความหนาแน่นและความเร็วของกระแสอิสระไกลออกไปก่อนถึงวัตถุ จะได้ q_∞ คือความดันพลวัตของกระแสอิสระมีค่าเท่ากับ $\frac{1}{2} \rho_\infty V_\infty^2$ โดย S เป็นพื้นที่อ้างอิง และ l เป็นระยะแขนอ้างอิงใดๆ การเลือก S และ l สำหรับอ้างอิงจะขึ้นกับรูปทรงของวัตถุและอาจแตกต่างกันไปตามแต่กรณีและความต้องการใช้งาน เช่น สำหรับปีกหรืออากาศยาน S จะเป็นพื้นที่ของระนาบปีก (Planform area) และ l จะเป็นความยาวคอร์ดเฉลี่ย สำหรับรูปทรงกลม S จะเป็นพื้นที่หน้าตัดขวางกลม (Projection area) ส่วน l จะเป็นเส้นผ่าศูนย์กลาง ตามที่แสดงในรูป 1.9



รูป 1.9 พื้นที่อ้างอิงและระยะอ้างอิงของค่าสัมประสิทธิ์ (Anderson, 2016)

สัญลักษณ์ที่ใช้สำหรับแทนค่าสัมประสิทธิ์ในสมการ (1.28) C_L , C_D , C_N , C_A , C_M ที่เป็นตัวพิมพ์ใหญ่ทั้งหมดเป็นการกำหนดรู้กันในหมู่นักอากาศพลศาสตร์ว่าให้หมายถึงค่าสัมประสิทธิ์ของแรงและโมเมนต์ของรูปทรงสามมิติ เช่น อากาศยาน ปีก สำหรับการไหลสองมิติผ่านรูปทรง เช่น แพนอากาศหรือทรงกระบอกกลมที่เป็นหุ่นจำลองสำหรับการทดลองในอุโมงค์ลมสัมประสิทธิ์ของแรงและโมเมนต์จะคิดจากพื้นที่อ้างอิงที่คิดต่อความยาวหนึ่งหน่วย และกำหนดให้ใช้สัญลักษณ์เป็นอักษรตัวพิมพ์เล็ก เช่น

$$c_l = \frac{L'}{q_\infty S} \quad ; \quad c_d = \frac{D'}{q_\infty S} \quad ; \quad c_m = \frac{M'}{q_\infty S c} \quad (1.29a)$$

ในที่นี้พื้นที่ $S = c \times 1 = c$ คือพื้นที่อ้างอิงที่คิดจากความยาวคอร์ดคูณช่วงความยาวหนึ่งหน่วย เครื่องหมาย “ ’ ” ที่อยู่หลัง L , D และ M ใช้แสดงว่าแรงหรือโมเมนต์เป็นแรงหรือโมเมนต์ที่คิดต่อหนึ่งหน่วยความยาวลึกไปในหน้ากระดาษ

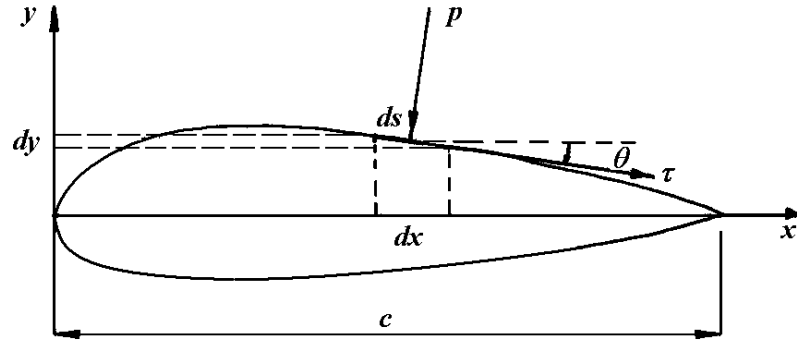
ทำนองเดียวกันสัมประสิทธิ์ของความดัน (Pressure coefficient) จะเป็น

$$c_p = \frac{p - p_\infty}{q_\infty} \quad (1.29b)$$

เมื่อ p_∞ เป็นความดันสถิตของกระแสอิสระ

และสัมประสิทธิ์ของแรงเสียดทานที่ผิว (Skin friction coefficient) จะเป็น

$$c_f = \frac{\tau}{q_\infty} \quad (1.29c)$$



รูป 1.10 ความสัมพันธ์ระหว่าง dx และ dy กับ ds

พิจารณาจากรูป 1.10

$$dx = ds \cos \theta \quad (1.30)$$

$$dy = -ds \sin \theta \quad (1.31)$$

ร่วมกับความสัมพันธ์ตามสมการ (1.28) และ (1.29) ค่า N' , A' และ M'_{LE} ในสมการ (1.23), (1.24) และ (1.27) อาจทำให้อยู่ในรูปสัมประสิทธิ์ได้เป็น

$$c_n = \frac{1}{c} \left[\int_0^c (c_{p,l} - c_{p,u}) dx + \int_0^c (c_{f,u} \frac{dy_u}{dx} + c_{f,l} \frac{dy_l}{dx}) dx \right] \quad (1.32)$$

$$c_a = \frac{1}{c} \left[\int_0^c (c_{p,u} \frac{dy_u}{dx} - c_{p,l} \frac{dy_l}{dx}) dx + \int_0^c (c_{f,u} + c_{f,l}) dx \right] \quad (1.33)$$

$$c_{mLE} = \frac{1}{c^2} \left[\int_0^c (c_{p,u} - c_{p,l}) x dx - \int_0^c (c_{f,u} \frac{dy_u}{dx} + c_{f,l} \frac{dy_l}{dx}) x dx + \int_0^c (c_{p,u} \frac{dy_u}{dx} + c_{f,u}) y_u dx - \int_0^c (-c_{p,l} \frac{dy_l}{dx} + c_{f,l}) y_l dx \right] \quad (1.34)$$

สำหรับขั้นตอนโดยละเอียดให้ลองทำเองเป็นแบบฝึกหัด ในสมการตัวห้อย u หมายถึงด้านบน แกน x และ ตัวห้อย l หมายถึงด้านล่างแกน x เช่น y_u คือ ระยะวัดเหนือแกน x , $c_{p,u}$ คือ สัมประสิทธิ์ความดันที่กระทำบนผิวด้านบนเหนือแกน x เป็นต้น ส่วนค่า dy/dx เป็นความชันของเส้นโค้งรอบรูป

ค่า c_n และ c_a ที่ได้นำไปคำนวณหาค่า c_l และ c_d ได้ตามสมการ (1.17) และ (1.18)

$$c_l = c_n \cos \alpha - c_a \sin \alpha \quad (1.35)$$

$$c_d = c_n \sin \alpha + c_a \cos \alpha \quad (1.36)$$

ขอให้สังเกตว่าจากสมการ (1.23) ถึงสมการ (1.34) แรงและโมเมนต์ทางอากาศพลศาสตร์จะได้จากการอินทิเกรทของความดันและแรงเค้นเฉือนที่ผิวโดยรอบวัตถุซึ่งเป็นขั้นตอนปกติทั้งทางทฤษฎี และการทดลอง นอกจากนี้วิธีการที่ได้แสดงมาแม้จะใช้กับปัญหาสองมิติแต่ก็สามารถนำไปใช้กับ

ปัญหาสามมิติได้เช่นกันเพราะใช้หลักเดียวกันเพียงแต่รูปร่างของวัตถุและสมการจะซับซ้อนกว่า

ตัวอย่าง 1.2 พิจารณาการไหลเหนือเสียงผ่านวัตถุรูปลิ้มมีมุมยอดครึ่งหนึ่งเท่ากับ 5 องศา และมุมปะทะเป็น 0 ตามรูป ความเร็วกระแสอิสระเป็น M 2.0 (สองเท่าความเร็วเสียง) คุณสมบัติของกระแสอิสระเป็น $p_\infty = 1.01 \times 10^5 \text{ N/m}^2$ $\rho_\infty = 1.23 \text{ kg/m}^3$ พบว่าความดันที่ผิวบนและผิวล่างของลิ้มมีค่าคงที่ $p_u = p_l = 1.31 \times 10^5 \text{ N/m}^2$ ความดันที่ฐานลิ้มมีค่าเท่ากับ p_∞ และค่า τ เปลี่ยนแปลงไปตามผิวตามสมการ $\tau_w = 431s^{-0.2}$ ความยาวคอร์ด c ของลิ้มเท่ากับ 2 m ให้คำนวณหาค่าสัมประสิทธิ์ของแรงต้าน

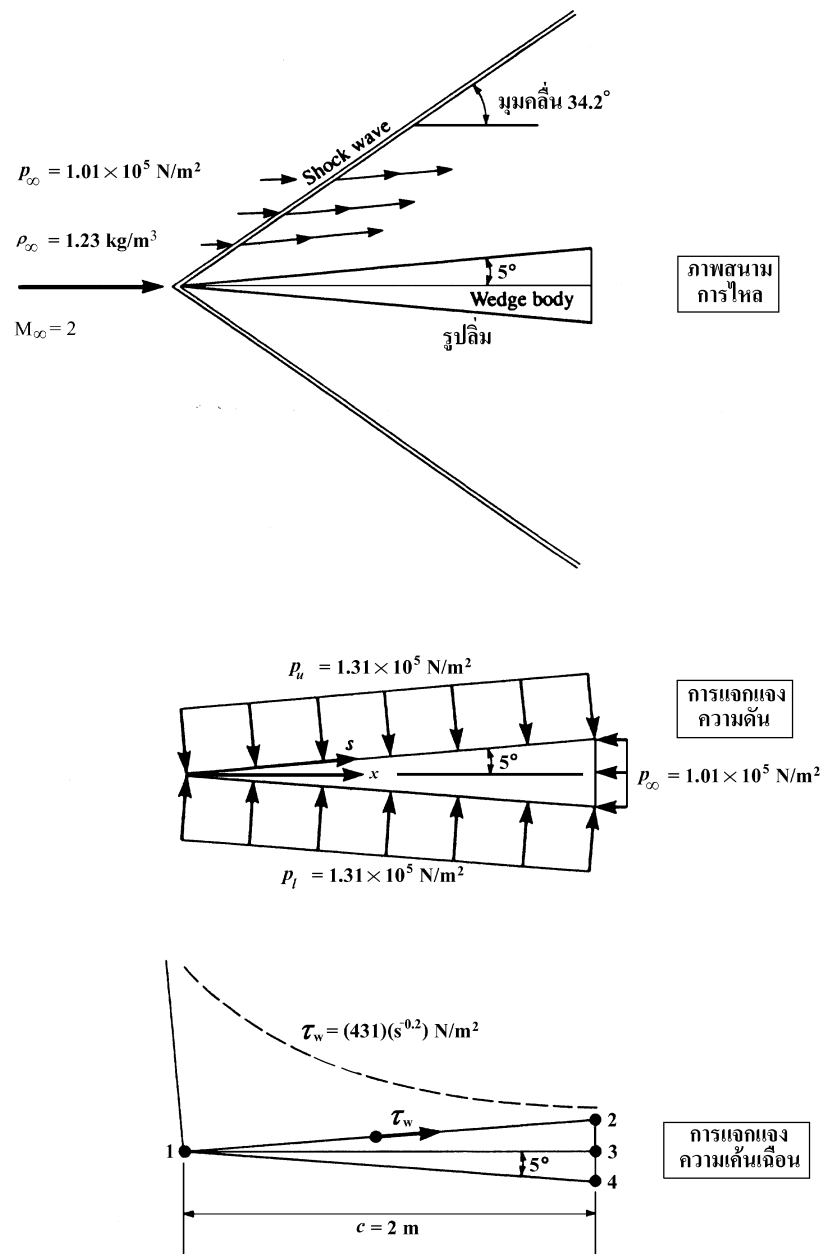
วิธีทำ การคำนวณทำได้สองวิธีคือ คำนวณค่าแรงต้านก่อนตามสมการ(1.24) แล้วนำไปหาค่าสัมประสิทธิ์ หรือคำนวณค่าสัมประสิทธิ์โดยตรงโดยใช้สมการ(1.33) ตัวอย่างนี้จะแสดงทั้ง 2 วิธี

วิธีที่ 1 เนื่องจากมุมปะทะเป็นศูนย์ เพราะฉะนั้น $D' = A'$ จึงคำนวณค่าแรงต้าน D' จากสมการ (1.23) ได้โดยตรง

$$D' = A' = \int_{LE}^{TE} (-p_u \sin \theta + \tau_u \cos \theta) ds_u + \int_{LE}^{TE} (p_l \sin \theta + \tau_l \cos \theta) ds_l$$

จากรูป 1.11 ใช้วิธีคิดเครื่องหมาย θ ตามที่กำหนด การอินทิเกรตจะเริ่มจากชายหน้าตามผิวด้านบน (จาก s_1 ไป s_2) ไปจนถึงฐานด้านหลัง (s_2 ไป s_3) และการอินทิเกรตตามผิวด้านล่างจะเริ่มจาก s_1 ไป s_4 และต่อไปจนถึง s_3 เพื่อความสะดวกแยกอินทิเกรตสมการ (1.23) ที่ละส่วน เพราะฉะนั้นได้

$$\begin{aligned} \int_{LE}^{TE} -p_u \sin \theta ds_u &= \int_{s_1}^{s_2} -(1.31 \times 10^5) \sin(-5^\circ) ds_u + \int_{s_2}^{s_3} -(1.01 \times 10^5) \sin(90^\circ) ds_u \\ &= 1.142 \times 10^4 (s_2 - s_1) - 1.01 \times 10^5 (s_3 - s_2) \\ &= 1.142 \times 10^4 \left(\frac{c}{\cos 5^\circ} \right) - 1.01 \times 10^5 (c)(\tan 5^\circ) \end{aligned}$$



รูป 1.11 การแจกแจงความดันและความเค้นเฉือนตามตัวอย่าง 1.2 (Anderson, 2016)

$$= 1.142 \times 10^4 (2.008) - 1.01 \times 10^5 (c)(0.175)$$

$$= 5260 \text{ N}$$

$$\int_{LE}^{TE} -p_l \sin \theta ds_l = \int_{s_1}^{s_4} (1.31 \times 10^5) \sin(5^\circ) ds_l + \int_{s_4}^{s_3} -(1.01 \times 10^5) \sin(-90^\circ) ds_l$$

$$= 1.142 \times 10^4 (s_4 - s_1) - 1.01 \times 10^5 (c)(s_3 - s_4)$$

$$= 1.142 \times 10^4 \left(\frac{c}{\cos 5^\circ} \right) - 1.01 \times 10^5 (c)(\tan 5^\circ)$$

$$= 1.142 \times 10^4 (2.008) - 1.01 \times 10^5 (c)(0.175)$$

$$= 5260 \text{ N}$$

$$\int_{LE}^{TE} \tau_u \cos \theta ds_u = \int_{s_1}^{s_2} 431s^{-0.2} \cos(-5^\circ) ds_u$$

$$= 429 \left(\frac{s_2^{0.8} - s_1^{0.8}}{0.8} \right)$$

$$= 429 \left(\frac{c}{\cos 5^\circ} \right)^{0.8} \left(\frac{1}{0.8} \right)$$

$$= 936.5 \text{ N}$$

$$\int_{LE}^{TE} \tau_l \cos \theta ds_l = \int_{s_1}^{s_4} 431s^{-0.2} \cos(5^\circ) ds_l$$

$$= 429 \left(\frac{s_4^{0.8} - s_1^{0.8}}{0.8} \right)$$

$$= 429 \left(\frac{c}{\cos 5^\circ} \right)^{0.8} \left(\frac{1}{0.8} \right)$$

$$= 936.5 \text{ N}$$

สังเกตว่าผลที่ได้เป็นไปตามคาดคือแรงต้านของซีกบนเท่ากับซีกล่างเพราะเป็นรูปสมมาตร รวมแรงต้านที่ได้จากทั้งสองส่วนเข้าด้วยกันจะได้

$$D' = 1.052 \times 10^4 + 0.1873 \times 10^4$$

$$(85\%) \quad (15\%)$$

$$= 1.24 \times 10^4 \text{ N}$$

ขอให้สังเกตว่าในตัวอย่างวัตถุมีรูปร่างเพรียว ลู่อลมแต่เคลื่อนที่ด้วยความเร็วเหนือเสียง แรงต้านส่วนใหญ่จะเป็นผลมาจากความดัน ถ้าดูจากรูป 1.11 จะพบว่าสิ่งนี้เป็นผลมาจากการเกิดคลื่นกระแทก (Shock wave) ที่ชายหน้าของลิ้มซึ่งเป็นตัวการของการเกิดแรงต้านจากความดันหรือที่เรียกว่า “Wave drag” ตามตัวอย่างนี้แรงต้าน 85% มาจากความดันและมีเพียง 15% ที่มาจากแรงเสียดทานที่ผิวซึ่งเป็นปกติของการไหลความเร็วเหนือเสียง แต่จะต่างจากที่จะพบต่อไปสำหรับการไหลความเร็วต่ำกว่าเสียงของรูปร่างที่ลู่อลม

สัมประสิทธิ์แรงต้านคำนวณได้จากสมการ (1.28b)

$$C_D = \frac{D}{q_\infty S} \quad (1.28b)$$

เมื่อ $q_\infty = \frac{1}{2} \rho_\infty V_\infty^2$ และ $S = c(1)$ เมื่อคิดต่อความกว้างลิ้มหนึ่งหน่วยลึกไปในกระตาดอาทิตย์
กำหนด $\rho_\infty = 1.23 \text{ kg/m}^3$ ความยาวคอรัต $c = 2 \text{ m}$ และความเร็วลม $M 2.0$ สองเท่าความเร็วเสียง
คือ $V_\infty = 2a_\infty$ เมื่อ a_∞ คือความเร็วเสียงของกระแสวิสสะคำนวณได้จากสมการ(1.5)

$$a_\infty = \sqrt{\gamma RT} = \sqrt{(1.4)(287 \text{ J/kg-K})(288 \text{ K})} = 340.2 \text{ m/s}$$

ดังนั้น

$$V_\infty = 2 \times 340.2 \text{ m/s} = 640.4 \text{ m/s}$$

เพราะฉะนั้น

$$q_\infty = (0.5)(1.23 \text{ kg/m}^3)(640.4 \text{ m/s}) = 2.847 \times 10^5 \text{ N/m}^2$$

$$S = 2.0 \text{ m} \times 1 \text{ m} = 2 \text{ m}^2$$

จะได้

$$C_d = \frac{D'}{q_\infty S} = \frac{1.24 \times 10^4 \text{ N}}{(2.847 \times 10^5 \text{ N/m}^2)(2 \text{ m}^2)} = 0.022 \text{ ตอบ}$$

วิธีที่ 2 คำนวณหา C_d โดยตรงจากสมการ (1.33) โดยพิจารณาเทอมต่างๆดังนี้

$$C_{p,u} = \frac{p_u - p_\infty}{q_\infty} = \frac{1.31 \times 10^5 - 1.01 \times 10^5}{2.847 \times 10^5} \frac{\text{N/m}^2}{\text{N/m}^2} = 0.1054$$

$$C_{f,u} = \frac{\tau_w}{q_\infty} = \frac{431 s^{-0.2}}{2.847 \times 10^5} \frac{\text{N/m}^2}{\text{N/m}^2} = \frac{431}{2.847 \times 10^5} \left(\frac{x}{\cos 5^\circ} \right)^{-0.2} = 1.513 \times 10^{-3} x^{-0.2}$$

แต่รูปสมมาตรเพราะฉะนั้น

$$C_{p,u} = C_{p,l} = 0.1054$$

$$C_{f,u} = C_{f,l} = 1.513 \times 10^{-3} x^{-0.2}$$

ค่าความชัน

$$\frac{dy_u}{dx} = \tan 5^\circ = 0.0875$$

$$\frac{dy_l}{dx} = \tan(-5^\circ) = -0.0875$$

แทนทั้งหมดลงใน (1.33) จะได้

$$C_d = C_a = \frac{1}{c} \left[\int_0^c (c_{p,u} \frac{dy_u}{dx} - c_{p,l} \frac{dy_l}{dx}) dx + \int_0^c (c_{f,u} + c_{f,l}) dx \right]$$

$$C_d = \frac{1}{2} \int_0^2 \{ (0.1054)(0.0875) - (0.1054)(-0.0875) \} dx + \frac{1}{2} \int_0^2 2(1.513 \times 10^{-3}) x^{-0.2} dx$$

$$C_d = 0.009223 x \Big|_0^2 + 0.00189 x^{0.8} \Big|_0^2$$

$$C_d = 0.01845 + 0.00329 = 0.022$$

ตอบ

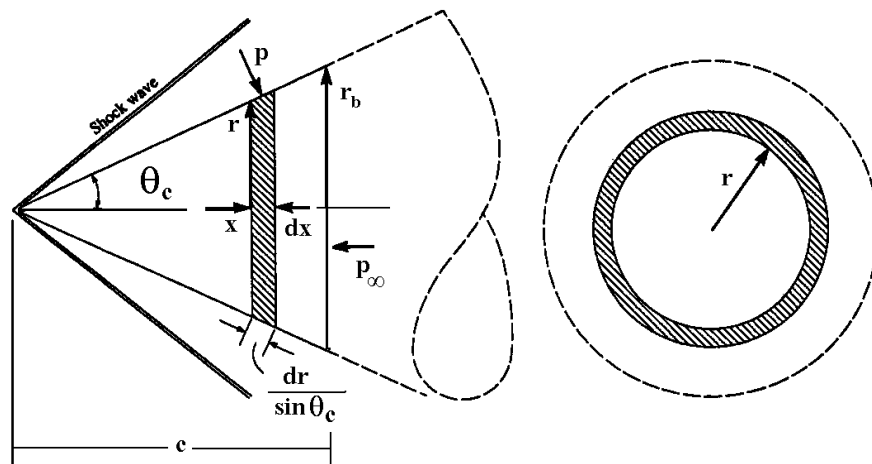
ตัวอย่าง 1.3 พิจารณากรวยกลม (Cone) ที่มุมปะทะ 0° ในการไหลความเร็วเหนือเสียงยิ่ง (hypersonic flow) มุมยอดกรวยมีค่า $2\theta_c$ ค่าความดันตามผิวโดยประมาณแสดงโดยสมการตามกฎกำลังสองของซายน์ (sin) ของนิวตัน $c_p = 2 \sin^2 \theta_c$ ดังนั้น c_p และ p จึงมีค่าคงที่บนผิวกรวยที่ฐานกรวยสมมติให้ $p = p_\infty$ และไม่คิดแรงเสียดทานที่ผิว จงคำนวณหาค่าสัมประสิทธิ์แรงต้านของกรวยโดยใช้พื้นที่ฐานเป็นพื้นที่อ้างอิง

วิธีทำ ตัวอย่างนี้เราไม่สามารถใช้สมการ (1.23) ถึง (1.27) ได้เพราะเป็นปัญหาสามมิติดังนั้นเราจะแก้ปัญหานี้โดยพิจารณาสมการแบบสามมิติ จากรูป แรงต้านบนพื้นที่ส่วนที่แรเงาคำนวณได้จาก

$$(p \sin \theta_c)(2\pi r) \frac{dr}{\sin \theta_c} = 2\pi r p dr$$

แรงต้านรวมได้จากความดันบนผิวกรวยทั้งหมดรวมกัน (ดูรูปประกอบ)

$$\begin{aligned} D &= \int_0^{r_b} 2\pi r (p - p_\infty) dr \\ &= \pi (p - p_\infty) r_b^2 \end{aligned}$$



รูป 1.12 กรวยตามตัวอย่าง 1.3 (Anderson, 2016)

ใช้พื้นที่ฐานอ้างอิง πr_b^2 จะได้สัมประสิทธิ์แรงต้าน

$$\begin{aligned} C_D &= \frac{D}{q_\infty \pi r_b^2} = \frac{\pi r_b^2 (p - p_\infty)}{\pi r_b^2 q_\infty} \\ &= \frac{(p - p_\infty)}{q_\infty} = c_p \end{aligned}$$

นั่นคือ

$$C_D = c_p = 2 \sin^2 \theta_c$$

ตอบ

1.6 จุดศูนย์ความดัน (Center of pressure)

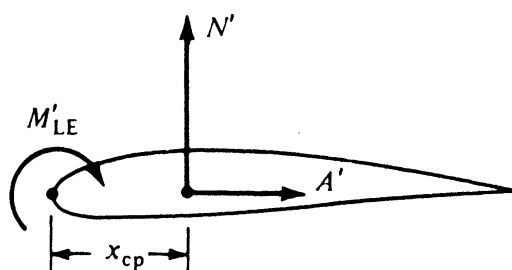
จากหัวข้อที่ผ่านมาคงเห็นแล้วว่าแรงตั้งฉากและแรงขนานแกนบนวัตถุคือส่วนย่อยของแรงลัพธ์ที่ได้จากการรวมแรงจากความดันและความเค้นเฉือนที่แจกแจงอยู่โดยรอบผิววัตถุ ผลของแรงเหล่านี้ยังทำให้เกิดโมเมนต์รอบขายหน้าซึ่งคำนวณได้ตามสมการ (1.34) ดังนั้นตำแหน่งของแรงลัพธ์ R หรือแรง N กับ A จะต้องเป็นตำแหน่งที่พอดีทำให้เกิดโมเมนต์รอบขายหน้าเท่ากับที่เกิดจากการแจกแจงความดันและความเค้นเฉือนรอบวัตถุ ตัวอย่างเช่นแรงจากการแจกแจงความดันและความเค้นเฉือนรอบแพนอากาศในหัวข้อที่ผ่านมา ตำแหน่งของแรง N' และ A' จะอยู่ตรงตำแหน่งที่พอดีทำให้เกิดโมเมนต์ตามสมการ (1.34) ถ้าเรากำหนดให้แนวของแรง A' ทับบอยู่บนแนวคอร์ดตามรูป 1.13 แนวของแรง N' ต้องอยู่ที่ตำแหน่งห่างจากขายหน้าเป็นระยะ x_{cp} ไปตามแนวคอร์ดโดยที่

$$M'_{LE} = -(x_{c.p.})N'$$

และ

$$x_{c.p.} = -\frac{M'_{LE}}{N'} \quad (1.37)$$

เครื่องหมายลบในสมการใช้เพื่อแสดงความสัมพันธ์ที่แรง N' ที่เป็นบวกจะทำให้เกิดโมเมนต์รอบขายหน้าที่เป็นลบและกลับกันสำหรับแรง N' ที่เป็นลบ



รูป 1.13 จุดศูนย์ความดัน (Anderson, 2016)

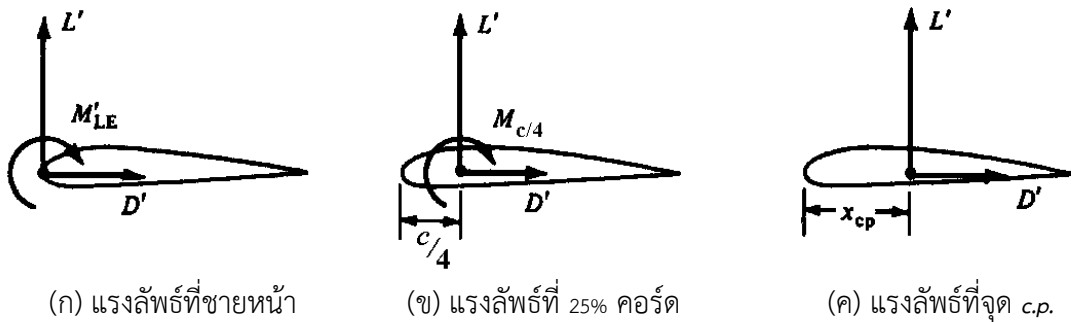
ในสมการ (1.37) $x_{c.p.}$ เป็นตำแหน่งของจุดศูนย์ความดันตามนิยามที่กำหนด คือ ตำแหน่งที่แรงลัพธ์เนื่องจากความดันและความเค้นเฉือนเสมือนมากระทำ ณ จุดนี้ นั่นคือโมเมนต์รอบจุดนี้จะมีค่าเป็นศูนย์ กล่าวอีกอย่างคือจุดศูนย์ความดันคือจุดที่โมเมนต์ทางอากาศพลศาสตร์บนรูปทรงมีค่าเป็นศูนย์ ขอให้สังเกตว่าเราเรียกตำแหน่ง $x_{c.p.}$ ว่าจุดศูนย์ความดันไม่ใช่จุดศูนย์แรงลัพธ์หรือเซนทรอยด์ (centroid) และคำนวณโมเมนต์จากแรง N' เพียงแรงเดียวแต่ไม่พิจารณาโมเมนต์จากแรง A' ทั้งนี้เนื่องจากเหตุผลที่อธิบายได้ดังนี้ คือ โมเมนต์ M'_{LE} ตามสมการ (1.27) เป็นโมเมนต์เนื่องจากความดันและแรงเสียดทานผิวที่เกิดขึ้นรอบๆวัตถุ สำหรับรูปทรงกลุ่มเช่นแพนอากาศแรงที่เกิดจากความดันจะมีค่ามากเมื่อเทียบกับแรงที่เกิดจากแรงเสียดทานผิว (กลับไปดูตัวอย่าง 1.2) และแรงเสียดทานผิวนี้นี้เกิดจากการไหลของกระแสอากาศเรียดไปตามผิวทั้งด้านบนและด้านล่างจากขายหน้าไปขายหลังซึ่งทำให้ทิศทางของแรงเสียดทานผิวทั้งที่ผิวด้านบนและด้านล่างจะทำจากขายหน้าไป

ชายหลังเหมือนกัน (ดูรูป 1.4) โมเมนต์รอบชายหน้าที่เกิดจากแรงเสียดทานตามผิวบนจะเป็นโมเมนต์ตามเข็มนาฬิกา ส่วนโมเมนต์รอบชายหน้าที่เกิดจากแรงเสียดทานตามผิวล่างจะเป็นโมเมนต์ทวนเข็มนาฬิกา ซึ่งจะหักล้างกัน โมเมนต์ที่เกิดขึ้นจากแรงเสียดทานผิวน้ำที่จริงมีค่าน้อยอยู่แล้วเพราะแรงเสียดทานมีค่าน้อยและแขนของโมเมนต์คือระยะจากแนวคอร์ดไปถึงผิวบนและผิวล่างมีค่าน้อยเมื่อเทียบกับความยาวคอร์ด เมื่อมาหักล้างกันไปอีกจะมีค่าน้อยมากเมื่อเทียบกับโมเมนต์ที่เกิดจากความดัน ดังนั้นอาจประมาณว่าโมเมนต์รอบชายหน้าเป็นผลจากความดันโดยไม่มีผลจากแรงเสียดทานและแนวของแรง A' จะอยู่ทับไปบนแนวคอร์ด ในกรณีที่มุมปะทะ α มีค่าไม่มาก (เช่น ไม่เกิน $\pm 15^\circ$) $\sin \alpha \cong 0$ และ $\cos \alpha \cong 1$ ดังนั้นจากสมการ (1.17) $L' \cong N'$ และสมการ (1.37) จะเป็น

$$x_{c.p.} = -\frac{M'_{LE}}{L'} \quad (1.38)$$

ตามสมการ (1.37) และ (1.38) ตำแหน่งของ $x_{c.p.}$ จะเปลี่ยนแปลงตามค่าของ N' หรือ L' และโมเมนต์รอบชายหน้าที่เพิ่มขึ้นหรือลดลงซึ่งเป็นเรื่องปกติเมื่อมุมปะทะเปลี่ยนแปลง สำหรับรูปทรงแบบแบนอากาศ N' หรือ L' จะมีค่าเป็นบวก และมากพอสมควรเมื่อมุมปะทะเป็นบวก แต่เมื่อค่อยๆ ลดมุมปะทะลงค่าของ N' หรือ L' จะลดลงตามจนถึงมุมปะทะอันหนึ่งค่าจะลดลงจนเป็นศูนย์ ถ้ามุมปะทะยังคงลดลงอีก N' หรือ L' จะเริ่มเพิ่มค่าขึ้นแต่ในทิศทางที่เป็นลบ ในขณะที่มุมปะทะเปลี่ยนแปลงนี้โมเมนต์ M'_{LE} อาจเปลี่ยนแปลงไปด้วยหรือไม่ก็ได้แต่ที่สำคัญคือสมการ (1.37) และ (1.38) บอกเราว่าตำแหน่งของ $x_{c.p.}$ จะเลื่อนไปตามแนวคอร์ด และจะไปอยู่ที่ ∞ หรือ $-\infty$ เมื่อค่าของ N' หรือ L' เข้าสู่ศูนย์ ดังนั้นการใช้จุดศูนย์ความดัน ($c.p.$) เป็นตำแหน่งอ้างอิงสำหรับแรงลัพธ์จึงไม่สะดวกในกรณีที่เราต้องพิจารณาแรงบนแบนอากาศที่มีมุมปะทะเปลี่ยนแปลงได้ โชคดีที่เรามีวิธีกำหนดระบบของแรงและโมเมนต์ที่เกิดจากความดันและความเค้นเฉือนโดยกำหนดตำแหน่งของแรงลัพธ์และโมเมนต์รอบจุดนั้นพร้อมๆ กัน (เช่น ที่ทำในวิชากลศาสตร์) วิธีนี้เราจะใช้จุดใดเป็นจุดอ้างอิงก็ได้ ตราบเท่าที่โมเมนต์รอบจุดนั้นถูกกำหนดไว้ควบคู่กัน รูป 1.14 แสดงการกำหนดแรงลัพธ์และโมเมนต์ลัพธ์สามแบบที่เป็นผลจากความดันและความเค้นเฉือนเดียวกันบนแบนอากาศอันหนึ่งและมีผลทางกลศาสตร์เหมือนกันทุกประการ

ในรูป 1.14 ก แรงลัพธ์ N' และ A' ถูกวางตำแหน่งไว้ที่ชายหน้าพร้อมกับโมเมนต์รอบชายหน้า M'_{LE} ในรูป 1.14 ข แรงลัพธ์ N' และ A' ถูกวางตำแหน่งไว้ที่ 1/4 ของคอร์ดพร้อมกับโมเมนต์รอบ 1/4 คอร์ด $M'_{c/4}$ ส่วนรูป 1.14 ค แรงลัพธ์ N' และ A' ถูกวางตำแหน่งไว้ที่ จุด $c.p.$ ซึ่งมีโมเมนต์รอบจุดนี้เป็นศูนย์ เนื่องจากระบบแรงในทั้งสามรูปเป็นของแรงลัพธ์อันเดียวกันจึงเป็นแรงที่เท่ากัน และมีความสัมพันธ์ระหว่างแรงและโมเมนต์แต่ละตัว คือ



รูป 1.14 วิธีกำหนดแรงและโมเมนต์ลัพธ์บนแพนอากาศที่เท่ากัน (Anderson, 2016)

$$M'_{LE} = -\frac{c}{4} L' + M'_{c/4} = -x_{c.p.} L' \quad (1.39)$$

ในรูปสัมประสิทธิ์ความสัมพันธ์จะเป็น

$$c_{mLE} = -\frac{1}{4} c_l + c_{m_{c/4}} = -\frac{x_{c.p.}}{c} c_l \quad (1.40)$$

ความสำคัญของสมการ (1.39) และ (1.40) จะเห็นกันในหัวข้อต่อไป

ตัวอย่าง 1.4 การไหลไร้การอัดตัวความเร็วต่ำผ่านแพนอากาศ NACA 4412 ที่มีมุมปะทะ 4° ในการทดลองอันหนึ่ง วัดค่า c_l ได้เท่ากับ 0.85 และวัดค่า $c_{m_{c/4}}$ ได้เท่ากับ -0.09 จงหาดำแหน่งของจุดศูนย์ความดัน

วิธีทำ จากสมการ (1.40) $\frac{x_{c.p.}}{c} = \frac{\left(\frac{1}{4} c_l - c_{m_{c/4}}\right)}{c_l}$

$$= \frac{1}{4} - \frac{c_{m_{c/4}}}{c_l}$$

$$= \frac{1}{4} - \frac{-0.09}{0.85} = 0.356$$

$\therefore$ ตำแหน่ง c.p. อยู่ที่ 35.6% คอร์ดจากชายหน้า

ตอบ

1.7 การวิเคราะห์มิติและทฤษฎีบั๊กกิ้งแฮมพาย (Dimensional analysis: The Buckingham PI Theory)

เราได้กำหนดแรงและโมเมนต์ทางอากาศพลศาสตร์รวมทั้งสัมประสิทธิ์ของมันในหัวข้อ 1.5 ทั้งยังเห็นแหล่งที่มาของแรงและโมเมนต์ที่ได้จากการรวมผลของความดันและความเค้นเฉือนซึ่งเปลี่ยนแปลงไปตามรูปแบบของการไหล แต่อะไรที่เป็นต้นตอที่ทำให้เกิดการเปลี่ยนแปลงนี้และรูปแบบความสัมพันธ์ของการเปลี่ยนแปลงจะเป็นอย่างไร คำตอบของปัญหานี้สามารถอธิบายได้โดยใช้การวิเคราะห์มิติซึ่งเป็นเนื้อหาที่เราจะศึกษากันในหัวข้อนี้ (Kuethe & Chow, 1997)

ลองพิจารณาแพนอากาศในหัวข้อที่ผ่านมาคงจำได้ว่าแรงและโมเมนต์ L' , D' , M' บนแพน

อากาศเปลี่ยนไปตามมุมปะทะ สัญชาตญาณของวิศวกรบอกเราว่าขนาดจริงของ L' , D' และ M' ที่กระทำบนแผนอากาศนั้นคงไม่ได้ขึ้นกับมุมปะทะอย่างเดียว แต่จะขึ้นกับความเร็วและระยะสูงด้วย ที่จริงคาดหมายได้เลวอย่างน้อยที่สุด L' , D' และ M' จะเปลี่ยนแปลงไปกับสิ่งต่างๆ เหล่านี้

- ก. ความเร็วของกระแสอิสระ V_∞
- ข. ความหนาแน่นของของไหล ρ_∞ ซึ่งหมายถึงระยะสูง
- ค. ความหนืดของของไหล μ_∞ (เพราะแรงส่วนหนึ่งเกิดจากแรงเสียดทานที่ผิว)
- ง. ขนาดของแผนอากาศซึ่งแทนด้วยพื้นที่อ้างอิงที่เลือกขึ้นมา เช่น ระยะคอรัด c พื้นที่ปีก S
- จ. รูปร่างของแผนอากาศ
- ฉ. การอัดตัว (Compressibility) ของของไหล ในหัวข้อ 1.2.4 ได้กล่าวถึงแล้วว่าผลกระทบของการอัดตัวขึ้นอยู่กับจำนวนเลขมัคของกระแสอิสระ $M_\infty = V_\infty/a_\infty$ แต่ V_∞ มีอยู่ในรายการแล้ว เพราะฉะนั้นจะถือว่า a_∞ เป็นดัชนีของความอัดตัวได้

อิทธิพลของข้อ ก. และ ข. มาจากความจริงที่แรงบนแผนอากาศน่าจะเป็นผลมาจากแรงปะทะของกระแสลมซึ่งแน่นอนว่าคงขึ้นกับมวลและความเร็วของอากาศที่เข้าปะทะ ส่วนอิทธิพลของข้อ ค. นั้นเห็นได้จากความสัมพันธ์ของความหนืดและแรงเสียดทานผิวในหัวข้อ 1.2.5 ในข้อ ง. และ จ. ขนาดรูปร่างของแผนอากาศมีผลต่อขนาดของแรงและโมเมนต์ที่เกิดขึ้นแน่นอน และสุดท้ายข้อ ฉ. การเปลี่ยนแปลงความหนาแน่นย่อมมีผลต่อแรงลม เมื่อรวมกันเข้าพอจะสรุปได้ว่า

$$L' = f(\rho_\infty, V_\infty, S, \mu_\infty, a_\infty) \quad (1.41)$$

สำหรับ D' และ M' ก็เขียนได้ทำนองเดียวกัน

สมการ (1.41) เป็นรูปความสัมพันธ์ทั่วไปหรือพูดให้ตรงคือเหมือนไม่รู้อะไรเลยเพราะเราไม่ทราบฟังก์ชัน f มีรูปแบบอย่างไร โดยหลักการแล้วเรามองหารูปแบบของฟังก์ชัน f หรือการเปลี่ยนแปลงแรงยกของแผนอากาศที่มุมปะทะหนึ่งได้ด้วยการทดลองในอุโมงค์ลมหลายๆ ครั้ง เพียงแต่ว่าข้อมูลจากการทดลองจะมีจำนวนมหาศาล ต้องใช้เวลาและความพยายามอย่างมากในการทดลอง เช่น เราอาจต้องทดลองกับแผนอากาศแบบเดียวกันหลายๆ ขนาด แผนอากาศแต่ละขนาดต้องทำการทดลองโดยแปรค่า $\rho_\infty, V_\infty, \mu_\infty$ และ a_∞ ไปทีละตัวขณะที่ตัวอื่นคงที่และทำเช่นนี้ไปเรื่อยๆ จนครบทุกตัวแปร ข้อมูลการทดลองจำนวนมากต้องนำมาแปลความหมาย เขียนกราฟหาความสัมพันธ์ที่เกี่ยวข้องกันทั้งหมด แทนที่จะทำเช่นนี้เราอาจตั้งคำถามขึ้นมาว่า $\rho_\infty, V_\infty, S, \mu_\infty$ และ a_∞ ในสมการ (1.41) สามารถจัดรวมกลุ่มให้มีตัวแปรน้อยลงได้หรือไม่ คำตอบคือ “ได้” และเทคนิคที่ใช้จัดรวมกลุ่มเป็นตัวอย่างง่าย ๆ ของวิธีทางทฤษฎีทั่วไปที่เรียกว่า การวิเคราะห์มิติ (Dimensional analysis)

การวิเคราะห์มิติมีพื้นฐานอยู่บนความจริงที่ว่า ปริมาณทางฟิสิกส์มีมิติของตัวเอง เช่น มิติของความเร็วมีมิติคือระยะทางต่อเวลา มิติของความหนาแน่นคือมวลต่อหน่วยปริมาตร และปริมาณทางฟิสิกส์จะบวกลบกันหรือเทียบเท่ากันได้ก็ต่อเมื่อมีมิติเหมือนกัน เช่น สมการ $1 \text{ m} = 1 \text{ sec}$ ไม่มีความหมายในทางฟิสิกส์ ในขณะที่สมการ $1 \text{ m} = 100 \text{ cm}$ มีความหมายที่สมบูรณ์ ดังนั้นสำหรับสมการใดๆ ในรูป $\psi + \eta + \xi = \phi$ ตัวแปร ψ, η, ξ และ ϕ จะต้องมิติเดียวกันและสมการอาจทำให้อยู่ในรูปไร้มิติได้โดยการหารตลอดด้วยตัวแปรตัวใดตัวหนึ่ง เช่น

$$\frac{\psi}{\phi} + \frac{\eta}{\phi} + \frac{\xi}{\phi} = 1$$

ดังนั้นสมการ (1.41) จะลดรูปลงได้ตามหลักการนี้

ทฤษฎีบทกึ่งแฮมพาย (Buckingham pi theorem)

ให้ K เป็นจำนวนมิติพื้นฐานที่จำเป็นในการอธิบายตัวแปรและให้ $P_1, P_2, P_3, \dots, P_N$ เป็นตัวแปร N ตัวที่ใช้อธิบายความสัมพันธ์ในสมการ

$$f_1(P_1, P_2, P_3, \dots, P_N) = 0 \quad (1.42)$$

ความสัมพันธ์ตามสมการ (1.42) สามารถจัดใหม่เป็นความสัมพันธ์ของกลุ่มตัวแปรไร้มิติ ($N - K$) กลุ่มเรียกกลุ่มตัวแปรพาย (Pi group)

$$f_2(\pi_1, \pi_2, \pi_3, \dots, \pi_{N-K}) = 0 \quad (1.43)$$

เมื่อกลุ่มตัวแปรไร้มิติ π แต่ละชุดเป็นผลคูณหารของตัวแปรหลัก K ตัวบวกตัวแปรอื่นอีกหนึ่งตัว ถ้าให้ $P_1, P_2, P_3, \dots, P_K$ เป็นตัวแปรที่เลือกขึ้นมา จะได้ว่า

$$\pi_1 = f_3(P_1, P_2, P_3, \dots, P_K, P_{K+1})$$

$$\pi_2 = f_4(P_1, P_2, P_3, \dots, P_K, P_{K+2})$$

:

$$\pi_{N-K} = f_{N-K}(P_1, P_2, P_3, \dots, P_K, P_N) \quad (1.44)$$

โดยที่ตัวเลือก $P_1, P_2, P_3, \dots, P_K$ ควรเป็นตัวแปรที่มีมิติครอบคลุมมิติ K ตัวที่เป็นมิติพื้นฐานของปัญหา และตัวแปรตาม เช่น L' ในสมการ (1.41) ควรปรากฏอยู่ในชุด π เพียงชุดเดียว (มิติพื้นฐานหมายถึงมิติหลักที่ใช้ในการวัดปริมาณทางฟิสิกส์ได้แก่ มวล ความยาว เวลา อุณหภูมิ ฯลฯ ในวิชากลศาสตร์ของไหลปริมาณต่างๆที่มีมิติที่แสดงได้ด้วยการประกอบกันของ มวล (mass, M) ความยาว (length, L) และ เวลา (time, T) เสมอ ดังนั้น $K = 3$)

ใช้ทฤษฎีบทกึ่งแฮมพายพิจารณาสมการ (1.41) เพื่อจัดกลุ่มตัวแปร เขียนสมการ (1.41) ใหม่ให้อยู่ในรูปสมการ (1.42) ได้

$$f(L', \rho_\infty, V_\infty, S, \mu_\infty, a_\infty) = 0 \quad (1.45)$$

สมการ (1.45) ประกอบด้วยตัวแปร 6 ตัวนั่นคือ $N = 6$ ตัวแปรแต่ละตัวมีมิติดังต่อไปนี้

ตัวแปร		มิติ
แรงยก	L'	MLT^{-2}
ความหนาแน่น	ρ_∞	ML^{-3}
ความเร็ว	V_∞	LT^{-1}
พื้นที่อ้างอิง	S	L^2
ความหนืด	μ_∞	$ML^{-1}T^{-1}$
ความเร็วเสียง	a_∞	LT^{-1}

ตัวแปรทั้งหมดที่มีมิติที่แสดงได้ด้วยมิติพื้นฐานสามตัวคือ มวล ระยะทาง และเวลา ดังนั้น $K = 3$ ความสัมพันธ์ตามสมการ (1.45) จะจัดใหม่เป็นความสัมพันธ์ของกลุ่มตัวแปร $N - K = 3$ กลุ่มเป็น

$$f_2(\pi_1, \pi_2, \pi_3) = 0 \quad (1.46)$$

จากสมการ (1.44) เมื่อเลือกตัวแปร ρ_∞, V_∞, S เป็นตัวแปรหลักจะได้กลุ่มตัวแปรแต่ละกลุ่ม คือ

$$\pi_1 = f_3(\rho_\infty, V_\infty, S, L') \quad (1.47a)$$

$$\pi_2 = f_4(\rho_\infty, V_\infty, S, \mu_\infty) \quad (1.47b)$$

$$\pi_3 = f_5(\rho_\infty, V_\infty, S, a_\infty) \quad (1.47c)$$

พิจารณากลุ่มตัวแปร π_1 ซึ่งประกอบขึ้นจากตัวแปร ρ_∞, V_∞, S และ L' สมมติว่ามีรูปฟังก์ชัน

$$\pi_1 = \rho_\infty^a V_\infty^b S^d L' \quad (1.48)$$

เมื่อ a, b, d เป็นค่าตัวเลขคงที่ใดๆ แต่ π_1 เป็นกลุ่มตัวแปรไร้มิตินั้นความจริงทางกายภาพบอกเราว่าไม่ว่าค่าของ a, b, d จะเป็นเท่าใดด้านขวามือของสมการ (1.48) ต้องไม่มีมิติด้วย นั่นคือ

$$[MLT]^0 = [ML^{-3}]^a [LT^{-1}]^b [L^2]^d [MLT^{-2}]^1 \quad (1.49)$$

$$\text{สำหรับ } M \quad 0 = a + 1 \quad (1.50a)$$

$$\text{สำหรับ } L \quad 0 = -3a + b + 2d + 1 \quad (1.50b)$$

$$\text{สำหรับ } T \quad 0 = -b - 2 \quad (1.50c)$$

แก้สมการ (1.50) ได้ค่า $a = -1, b = -2, d = -1$ เพราะฉะนั้น

$$\pi_1 = L' \rho_\infty^{-1} V_\infty^{-2} S^{-1} = \frac{L'}{\rho_\infty V_\infty^2 S} \quad (1.51)$$

ในชุดตัวแปร $\pi_1 = \frac{L'}{\rho_\infty V_\infty^2 S}$ แทนพื้นที่อ้างอิงใดๆ สำหรับแผนอากาศเราจะแทนพื้นที่อ้างอิงนี้

ด้วย $c \times 1$ (หัวข้อ 1.5) และหารด้วย $1/2$ เพื่อความเหมาะสมจะได้รูปของ π_1 ใหม่เป็น

$$\pi_1 = \frac{L'}{\frac{1}{2}\rho_\infty V_\infty^2 c} \quad (1.52)$$

เราได้นิยามความดันพลวัต q_∞ มีค่าเท่ากับ $\frac{1}{2}\rho_\infty V_\infty^2$ เพราะฉะนั้น π_1 คือ c_l ตามนิยามที่เรากำหนดไว้แล้วในหัวข้อ 1.5 นั้นเอง จึงได้จากสมการว่า

$$L' = q_\infty (c \times 1) c_l$$

แรงยก = ความดันพลวัต $\times$ พื้นที่ปีก $\times$ สัมประสิทธิ์แรงยก

สมการ (1.51) และ (1.52) ที่เริ่มต้นจากแนวคิดง่ายๆเรื่องมิติทางฟิสิกส์และดูไม่ค่อยเป็นประโยชน์ในตอนแรกได้ผ่านขั้นตอนจนให้สมการรูปร่างๆซึ่งบรรจุข่าวสารสำคัญไว้ ที่จริงสมการ (1.51) และ (1.52) เป็นความสัมพันธ์ที่สำคัญที่สุดอันหนึ่งในอากาศพลศาสตร์ประยุกต์ สมการนี้บอกว่าแรงยกเป็นปฏิภาคโดยตรงกับความดันพลวัต (ฉะนั้นจึงเป็นปฏิภาคโดยตรงกับความเร็วกำลังสอง)

ทำนองเดียวกันหาชุดตัวแปร π_2 หาได้จาก

$$\pi_2 = \rho_\infty^a V_\infty^b S^d \mu_\infty \quad (1.53)$$

$$\text{เทียบมิติ} \quad [MLT]^{-1} = [ML^{-3}]^a [LT^{-1}]^b [L^2]^d [ML^{-1}T^{-1}]^1 \quad (1.54)$$

$$\text{สำหรับ } M \quad 0 = a + 1 \quad (1.55a)$$

$$\text{สำหรับ } L \quad 0 = -3a + b + 2d - 1 \quad (1.55b)$$

$$\text{สำหรับ } T \quad 0 = -b - 1 \quad (1.55c)$$

แก้สมการ (1.55) ได้ค่า $a = -1$, $b = -1$, $d = -1/2$ เพราะฉะนั้น

$$\pi_2 = \frac{\mu_\infty}{\rho_\infty V_\infty S^{1/2}} \quad (1.56)$$

ในชุดตัวแปร π_2 มิติของ S คือ L^2 เพราะฉะนั้นมิติของ $S^{1/2}$ ก็คือ L หรือความยาวนั่นเอง (พื้นที่ = ด้าน $\times$ ด้าน) สำหรับแผนอากาศเราเลือกความยาวคอर्ड c แทนความยาวนี้และกลับเศษเป็นส่วนเพื่อความเหมาะสมจะได้รูปของ π_2 เป็น

$$\pi_2 = \frac{\rho_\infty V_\infty c}{\mu_\infty} \quad (1.57)$$

ตัวแปร π_2 ที่ได้คงคุ้นตาว่าในวิชากลศาสตร์ของไหลเป็นค่าที่เรียกว่าค่าตัวเลขเรย์โนลด์ (Reynolds number) แทนด้วยสัญลักษณ์ Re ความสำคัญของตัวเลขชุดนี้ในทางกายภาพเป็นตัววัดอัตราส่วนระหว่างแรงเฉื่อย (Inertia force) กับแรงหนืด (Viscous force) ของกระแสน้ำซึ่งจะให้เห็นกันต่อไป สำหรับ π_3 จาก

$$\pi_3 = \rho_\infty^a V_\infty^b S^d a_\infty \quad (1.58)$$

$$\text{เทียบมิติ} \quad [MLT]^{-1} = [ML^{-3}]^a [LT^{-1}]^b [L^2]^d [LT^{-1}]^1 \quad (1.59)$$

$$\text{สำหรับ } M \quad 0 = a \quad (1.60a)$$

$$\text{สำหรับ } L \quad 0 = -3a + b + 2d + 1 \quad (1.60b)$$

$$\text{สำหรับ } T \quad 0 = -b - 1 \quad (1.60c)$$

แก้สมการ (1.60) ได้ค่า $a = 0$, $b = -1$, $d = 0$ เพราะฉะนั้น

$$\pi_3 = \frac{a_\infty}{V_\infty} \quad (1.61)$$

ชุดตัวแปร π_3 คือส่วนกลับของอัตราส่วนระหว่างความเร็วกระแสน้ำกับค่าความเร็วเสียงของกระแสน้ำหรือตัวเลขมัค (Mach number) นั่นเองเพราะฉะนั้นจะได้ π_3 เป็น

$$\pi_3 = \frac{V_\infty}{a_\infty} \quad (1.62)$$

นำผลที่ได้จากสมการ (1.52), (1.57), (1.62) แทนในสมการ (1.46) จะได้

$$f\left(\frac{L'}{\frac{1}{2}\rho_\infty V_\infty^2 c}, \frac{\rho_\infty V_\infty c}{\mu_\infty}, \frac{V_\infty}{a_\infty}\right) = 0$$

หรือ

$$f(c_l, Re, M_\infty) = 0$$

จัดรูปใหม่เป็น

$$c_l = f(Re, M_\infty) \quad (1.63)$$

ในสมการ (1.63) แร้งยกที่เป็นฟังก์ชันของตัวแปร 5 ตัวลดรูปลงเหลือเพียงความสัมพันธ์ของสัมประสิทธิ์แรงยกกับกลุ่มตัวแปรไร้มิติ 2 กลุ่ม นั่นคือการวิเคราะห์มิติลดจำนวนตัวแปรที่ต้องถูกพิจารณาในกรณีนี้จาก 5 ตัวลงเหลือเพียง 2 ตอนนี้อย่างไรก็ตามเราต้องทำการทดลองเพื่อหาความสัมพันธ์ของแรงยกบนแผ่นอากาศที่มุมปะทะอันหนึ่ง เราก็เพียงแค่ทำการทดลองวัดค่าแรงยกเพื่อนำมาคำนวณค่าสัมประสิทธิ์โดยแปรค่าของ Re และ M_∞ เพียง 2 ตัวไม่ใช่ 5 ตัวตามความสัมพันธ์เดิมซึ่งประหยัดทั้งเวลาและแรงงาน การหาความสัมพันธ์ตัวแปรทั้งสามก็ง่ายกว่า ที่สำคัญกว่านั้นคือ Re และ M_∞ เป็นกลุ่มตัวแปรไร้มิติที่เรียกว่าตัวแปรความคล้ายคลึง (Similarity parameters) ซึ่งเป็นตัวแปรที่กำกับการไหลและจะได้กล่าวถึงในหัวข้อต่อไป

สำหรับแรงต้านและโมเมนต์บนแผ่นอากาศการวิเคราะห์มิติทำนองเดียวกันจะให้ความสัมพันธ์

$$c_d = f(Re, M_\infty) \quad (1.64)$$

และ

$$c_m = f(Re, M_\infty) \quad (1.65)$$

นอกจากนี้ถ้าเราพิจารณาการเปลี่ยนแปลงของมุมปะทะร่วมด้วยความสัมพันธ์ตามสมการ (1.63), (1.64) และ (1.65) จะเขียนใหม่ได้ว่า

$$c_l = f(Re, M_\infty, \alpha) \quad (1.66)$$

$$c_d = f(Re, M_\infty, \alpha) \quad (1.67)$$

และ

$$c_m = f(Re, M_\infty, \alpha) \quad (1.68)$$

สำหรับปัญหาที่มีความเกี่ยวข้องกับเทอร์โมไดนามิกส์และการถ่ายเทความร้อนร่วมด้วยเช่นการไหลที่มีการอัดตัว (Compressible flow) การไหลหนืด (Viscous flow) ตัวแปรที่เพิ่มขึ้น เช่น

อุณหภูมิ ความร้อนจำเพาะ สัมประสิทธิ์การถ่ายเทความร้อน และอื่นๆ จะเป็นตัวแปรที่ต้องอธิบายมิติ โดยใช้มิติพื้นฐานนอกเหนือจากที่ได้กล่าวมาแล้ว เช่น อุณหภูมิสมบูรณ์ การวิเคราะห์มิติจะทำให้เราได้กลุ่มตัวแปรไร้มิติอื่นๆ ที่กำกับความคล้ายคลึงของการไหล กลุ่มตัวแปรพวกนี้จะแสดงความสำคัญเมื่อเราทำการศึกษาเรื่องที่เกี่ยวข้อง ในขั้นนี้เฉพาะ Re และ M_∞ เท่านั้นที่ถือเป็นตัวแปรสำคัญที่บ่งบอกการไหลสำหรับการพิจารณาของเรา

1.8 ความคล้ายคลึงของการไหล (Flow similarity)

สำหรับวัตถุสองชิ้นที่จมอยู่ในกระแสของไหลที่ต่างกันสองชนิดผลที่เกิดขึ้นบนวัตถุทั้งสองจะมีความคล้ายคลึงกันทางพลศาสตร์ (Dynamic similarity) (Kuethe & Chow, 1997) เมื่อ

1. รูปแบบของเส้นกระแส (Streamline) เป็นรูปแบบเดียวกัน
2. การแจกแจงของอัตราส่วนของตัวแปรการไหล เช่น $\frac{V}{V_\infty}, \frac{p}{p_\infty}$ และอื่นๆ ในบริเวณรอบวัตถุทั้งสองเป็นแบบเดียวกันเมื่อเทียบจากตำแหน่งที่สัมพันธ์กัน
3. สัมประสิทธิ์ของแรงและโมเมนต์เป็นอย่างเดียวกัน

จริงๆ แล้วผลข้อ 3 เกิดตามมาจากข้อ 2 เพราะว่าการแจกแจงตัวแปรการไหลที่เป็นแบบเดียวกันจะทำให้การแจกแจงความดันและความเค้นเฉือนรอบวัตถุทั้งสองเป็นแบบเดียวกันด้วย ดังนั้นสัมประสิทธิ์ของแรงและโมเมนต์ที่ได้จากความดันและความเค้นเฉือนย่อมเป็นอย่างเดียวกัน

ความคล้ายคลึงทางพลศาสตร์ด้านบนจะเกิดขึ้นได้อย่างไรเป็นคำถามที่มีคำตอบส่วนหนึ่งจากการวิเคราะห์มิติในหัวข้อที่ผ่านมา และอาจสรุปได้ว่าการไหลผ่านวัตถุสองชิ้นของกระแสของไหลสองชนิดที่ต่างกันจะคล้ายคลึงกันทางพลศาสตร์ ถ้า

- ก. รูปร่างของวัตถุทั้งสองชิ้นและขอบเขตของการไหลเหมือนกันทางเรขาคณิต (Geometric similarity)
- ข. ตัวแปรความคล้ายคลึงของการไหลทั้งสองเท่ากัน

ถึงตรงนี้ตัวแปรความคล้ายคลึงที่ได้จากการวิเคราะห์มิติคือ Re และ M_∞ ซึ่งสำหรับปัญหาส่วนใหญ่ตัวแปรทั้งสองจะเป็นตัวแปรที่มีอิทธิพลต่อการไหลมากกว่าตัวอื่น กล่าวได้ว่าการไหลผ่านวัตถุสองชิ้นที่รูปร่างเหมือนกันของกระแสของไหลสองชนิดที่ต่างกันจะคล้ายคลึงกันทางพลศาสตร์เมื่อการไหลทั้งสองมีค่า Re และ M_∞ เท่ากันและเมื่อเป็นเช่นนี้สัมประสิทธิ์ของแรงและโมเมนต์ที่เกิดบนวัตถุทั้งสองชิ้นจะมีค่าเท่ากันด้วย อันนี้เองคือกุญแจสำคัญของการทดลองหุ่นจำลอง (Model test) ในอุโมงค์ลม ซึ่งหุ่นจำลองของอากาศยานจะถูกนำมาทดสอบเพื่อวัดแรงยก แรงต้าน และโมเมนต์แทนอากาศยานตัวจริง ค่าที่วัดได้จากการทดลองจะให้ค่าสัมประสิทธิ์เท่ากับของอากาศยานตัวจริงตรงเท่ากับค่า Re และ M_∞ ของกระแสอากาศอิสระในอุโมงค์ลมเท่ากับของกระแสลมจริงของการบิน อย่างไรก็ตามข้อความที่กล่าวมายังไม่ถูกต้องเสียทีเดียวนักเพราะยังมีตัวแปรคล้ายคลึงตัวอื่นอีกที่อาจ

ส่งผลต่อความคล้ายคลึงของการไหลซึ่งจะไม่กล่าวถึงในที่นี้ แต่ถึงอย่างไรการพยายามสร้างการไหลให้ได้ค่า Re และ M_∞ ของการบินจริงหรือใกล้เคียงถือเป็นหลักของการทดลองในอุโมงค์ลม

ตัวอย่าง 1.5 พิจารณาการไหลผ่านทรงกระบอกกลมสองลูก ลูกใหญ่มีเส้นผ่านศูนย์กลางเป็นสี่เท่าของลูกเล็ก กระแสลมที่ไหลผ่านทรงกระบอกลูกเล็กมีคุณสมบัติ ρ_1, V_1, T_1 กระแสลมที่ไหลผ่านทรงกระบอกลูกใหญ่มีคุณสมบัติ ρ_2, V_2, T_2 เมื่อ $\rho_2 = \rho_1/4$, $V_2 = 2V_1$ และ $T_2 = 4T_1$ สมมติให้ทั้ง μ และ a แปรผันกับ $T^{1/2}$ จงแสดงว่าการไหลทั้งสองคล้ายกันทางพลศาสตร์

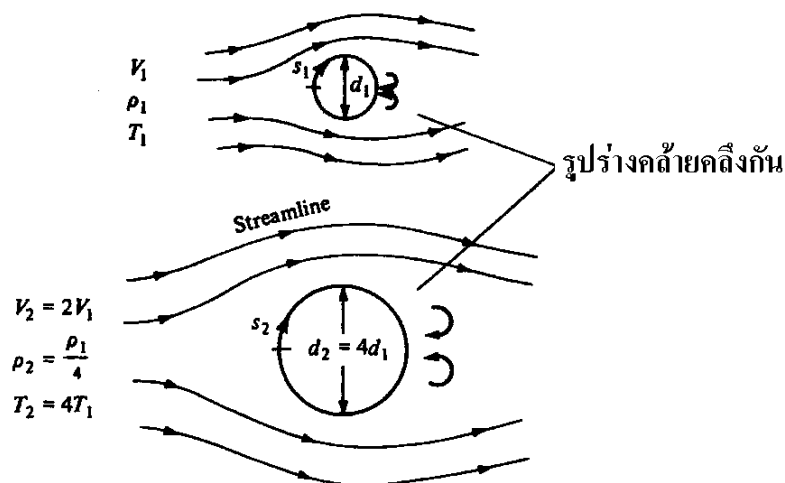
วิธีทำ ในข้อนี้โจทย์สมมติให้ $\mu \propto \sqrt{T}$ และ $a \propto \sqrt{T}$ ดังนั้น

$$\frac{\mu_2}{\mu_1} = \sqrt{\frac{T_2}{T_1}} = \sqrt{\frac{4T_1}{T_1}} = 2 \quad (i)$$

และ
$$\frac{a_2}{a_1} = \sqrt{\frac{T_2}{T_1}} = \sqrt{\frac{4T_1}{T_1}} = 2 \quad (ii)$$

จาก $M_\infty = \frac{V_\infty}{a_\infty} \quad \therefore \quad M_1 = \frac{V_1}{a_1} \quad \text{และ} \quad M_2 = \frac{V_2}{a_2}$

แต่โจทย์กำหนดให้ $V_2 = 2V_1$ และ จากสมการ (ii) $a_2 = 2a_1$



รูป 1.15 ตัวอย่าง 1.5

ดังนั้น

$$\frac{V_2}{a_2} = \frac{2V_1}{2a_1}$$

เพราะฉะนั้น

$$M_1 = M_2$$

นั่นคือการไหลทั้งสองมีค่าเลขมัคเท่ากัน

ตอบ

ต่อไปพิจารณาเลขเรย์โนลด์ของการไหลจาก $Re = \frac{\rho V c}{\mu}$ เมื่อ c คือความยาวคอรัตในที่นี่เท่ากับ เส้นผ่าศูนย์กลาง d จะได้

$$Re_1 = \frac{\rho_1 V_1 d_1}{\mu_1} \quad \text{และ} \quad Re_2 = \frac{\rho_2 V_2 d_2}{\mu_2}$$

แต่โจทย์กำหนดให้ $d_2 = 4d_1$, $\rho_1 = 4\rho_2$ และ จากสมการ (i) $\mu_2 = 2\mu_1$

เพราะฉะนั้น

$$\frac{\rho_1 V_1 d_1}{\mu_1} = \frac{(4\rho_2)(V_2/2)(d_2/4)}{(\mu_2/2)} = \frac{\rho_2 V_2 d_2}{\mu_2}$$

ดังนั้นการไหลทั้งสองมีค่าเลขเรย์โนลด์เท่ากัน

ตอบ

ตัวอย่าง 1.6 เครื่องโบอิง 747 เดินทางด้วยความเร็ว 885 กม./ชม. ที่ความสูง 11,500 เมตร ซึ่งค่าความดันและอุณหภูมิเป็น $20,985 \text{ N/m}^2$ และ 216.66 K หุ่นจำลองขนาด 1:50 ของอากาศยานลำนี้ถูกนำไปทดสอบในอุโมงค์ลมซึ่งมีอุณหภูมิ 238.88 K จงหาว่าต้องใช้ความเร็วและความดันกระแสอากาศในการทดลองเท่าใดจึงจะทำให้สัมประสิทธิ์แรงยกและแรงต้านของหุ่นจำลองและอากาศยานลำจริงเท่ากัน

วิธีทำ ใช้ตัวห้อย 1 และ 2 แทนอากาศยานจริงและหุ่นจำลอง เพื่อให้ $C_{L,1} = C_{L,2}$ และ $C_{D,1} = C_{D,2}$ ต้องจัดให้การไหลคล้ายคลึงกันทางพลศาสตร์นั้นคือต้องจัดให้ $Re_1 = Re_2$ และ $M_{\infty 1} = M_{\infty 2}$

จาก $M_{\infty 1} = \frac{V_1}{a_1} = \frac{V_1}{\sqrt{\gamma RT_1}}$ และ $M_{\infty 2} = \frac{V_2}{a_2} = \frac{V_2}{\sqrt{\gamma RT_2}}$

เมื่อ $M_{\infty 1} = M_{\infty 2}$ ดังนั้น $\frac{V_1}{\sqrt{\gamma RT_1}} = \frac{V_2}{\sqrt{\gamma RT_2}}$

เพราะฉะนั้น $V_2 = V_1 \frac{\sqrt{\gamma RT_2}}{\sqrt{\gamma RT_1}} = 885 \frac{\sqrt{238.88}}{\sqrt{216.66}}$

$$= 929.27 \text{ กม./ชม.}$$

ตอบ

จาก $Re_1 = \frac{\rho_1 V_1 c_1}{\mu_1}$ และ $Re_2 = \frac{\rho_2 V_2 c_2}{\mu_2}$

เมื่อ $Re_1 = Re_2$ ดังนั้น $\frac{\rho_1 V_1 c_1}{\mu_1} = \frac{\rho_2 V_2 c_2}{\mu_2}$

$$\frac{\rho_1}{\rho_2} = \frac{V_2}{V_1} \cdot \frac{c_2}{c_1} \cdot \frac{\mu_1}{\mu_2} \quad (i)$$

แต่ $c_1:c_2$ เป็น $50:1$ และ จากสมการ(1.10) $\frac{\mu_1}{\mu_2} = \left(\frac{T_1}{T_2}\right)^{\frac{3}{4}}$ แทนใน (i) ได้

$$\frac{\rho_1}{\rho_2} = \left(\frac{929.27}{885}\right) \left(\frac{1}{50}\right) \left(\frac{216.66}{238.88}\right)^{0.75}$$

$$= 0.0195$$

จากสมการ(1.3) ได้
$$\frac{p_1}{p_2} = \frac{\rho_1 R T_1}{\rho_2 R T_2} = 0.0195 \left(\frac{216.66}{238.88} \right)$$

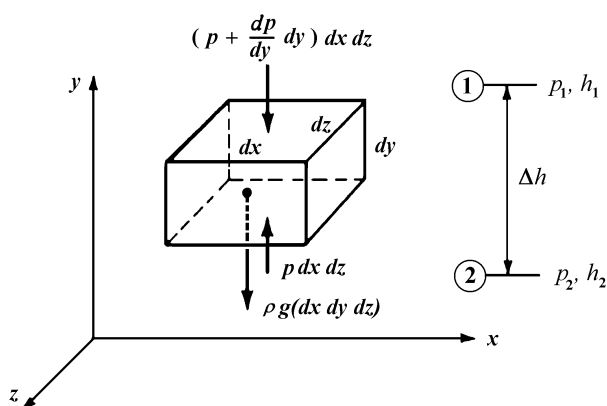
เพราะฉะนั้น
$$p_2 = 56.54 p_1 = 56.54 \times 20,985 \text{ N/m}^2$$

$$= 1,186,520.98 \text{ N/m}^2 \quad \text{ตอบ}$$

ในการทดลองต้องใช้ความเร็วลม 929.27 กม./ชม. และความดันบรรยากาศ 1,186,520.98 N/m²

1.9 กลศาสตร์ของไหลสถิตและแรงลอยตัว (Fluid Statics: Buoyancy Force)

วัตถุที่จมอยู่ในของไหลที่ไม่มีการเคลื่อนที่ (สภาวะอยู่นิ่ง, สถิต) ยังคงถูกแรงกระทำจากความดันของของไหลรอบวัตถุแต่จะไม่มีแรงกระทำจากแรงเสียดทานผิว ในวิชากลศาสตร์แรงกระทำต่อวัตถุที่จมในของเหลวเรียกแรงลอยตัวมีขนาดเท่ากับน้ำหนักของเหลวที่ถูกแทนที่ด้วยปริมาตรของวัตถุ สำหรับในชั้นบรรยากาศแรงลอยตัวนี้จะหายไปตามหลักการอันเดียวกัน



รูป 1.16 แรงบนส่วนย่อยของไหลในสภาวะอยู่นิ่ง (Kuethe & Chow, 1997)

พิจารณาส่วนย่อยเล็กๆมาก ๆ ของของไหลที่อยู่นิ่งในรูป 1.16 ส่วนย่อยเป็นรูปลูกบาศก์มีด้านกว้าง dx, dy, dz แรงกระทำบนส่วนย่อยมีสองส่วนคือ แรงเนื่องจากน้ำหนักของของไหลกับความดันที่กดเข้ามารอบด้านจากของไหลที่อยู่ล้อมรอบ พิจารณาแรงในแนวดิ่งให้แรงดันบนผิวด้านล่างเป็น p จะได้แรงกระทำบนผิวเป็น $p dx dz$ บนด้านตรงข้ามความดันที่กระทำบนผิวเป็น $p + \frac{dp}{dy} dy$ จะได้แรงกระทำบนผิวเป็น $(p + \frac{dp}{dy} dy) dx dz$ ดังนั้นผลรวมของแรงจากความดันในแนวดิ่ง

$$\begin{aligned} \Sigma F_y &= p dx dz - (p + \frac{dp}{dy} dy) dx dz \\ &= -\frac{dp}{dy} (dx dy dz) \end{aligned}$$

ให้ ρ เป็นความหนาแน่นของของไหล ดังนั้นน้ำหนักของของไหลในส่วนย่อยจะเป็น

$$\text{น้ำหนัก} = -\rho g \, dx \, dy \, dz$$

เมื่อ g เป็นความเร่งจากแรงโน้มถ่วง ในสภาพสมดุลเมื่ออยู่นิ่งผลรวมของแรงจะเท่ากับศูนย์

$$\text{เพราะฉะนั้น} \quad -\frac{dp}{dy}(dx \, dy \, dz) - \rho g(dx \, dy \, dz) = 0$$

$$dp = -\rho g \, dy \quad (1.69)$$

สมการ (1.69) เรียกว่าสมการไฮโดรสแตติก แสดงความสัมพันธ์ระหว่างการเปลี่ยนแปลงความดันกับความสูงในของไหลสถิต สมการ (1.69) สามารถใช้แสดงการเปลี่ยนแปลงคุณสมบัติของชั้นบรรยากาศเนื่องจากระยะสูงอย่างที่ผ่านมาในหัวข้อ 1.3

สำหรับของเหลวซึ่งความหนาแน่นมีค่าเกือบคงที่ ให้ตำแหน่ง 1 และ 2 เป็นตำแหน่งที่มีระยะสูงต่างกัน Δh ให้ความดันและความสูงของทั้งสองตำแหน่งเป็น p_1, h_1 และ p_2, h_2 อินทิเกรตสมการ (1.69) ระหว่าง 1 และ 2 ได้

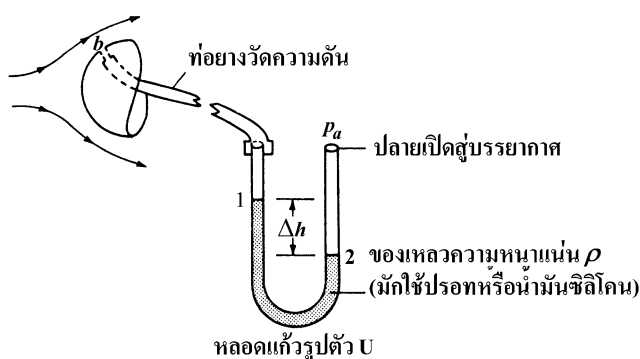
$$p_2 - p_1 = -\rho g (h_2 - h_1) = -\rho g \Delta h$$

จัดใหม่เป็น

$$p_2 + \rho g h_2 = p_1 + \rho g h_1 \quad (1.70a)$$

หรือ

$$p + \rho g h = \text{cont.} \quad (1.70b)$$



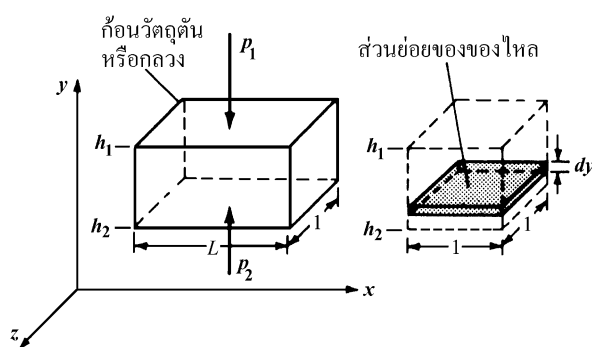
รูป 1.17 การใช้มาตรหลอดแก้วรูปตัว U วัดความดัน (Kueth & Chow, 1997)

สมการ (1.70) เป็นสมการที่นำไปประยุกต์ใช้กับเครื่องมือวัดความดันโดยใช้หลอดแก้วรูปตัว U หรือ มาตรหลอดแก้วในรูป 1.17 ในรูปสมมุติว่าการทดลองในอุโมงค์ลมต้องการทราบความดันจากจุด b บนวัตถุที่มีกระแสอากาศไหลผ่าน การวัดความดัน ณ จุด b ทำได้โดยเจาะรูเล็กๆ ตรงตำแหน่งที่ต้องการวัดความดันแล้วต่อท่อความดันมายังปลายข้างหนึ่งของหลอดแก้วรูปตัว U ซึ่งบรรจุของเหลวชนิดหนึ่งที่มีความหนาแน่น ρ ปลายอีกข้างของหลอดแก้วเปิดสู่บรรยากาศ ถ้าความดันที่จุด b เท่ากับความดันบรรยากาศ (ในขณะที่ยังไม่มีกระแสลมไหลผ่านจุด b) ระดับของเหลวในหลอดแก้วทั้งสองข้างจะเท่ากัน แต่เมื่อมีการเปลี่ยนแปลงความดันที่จุด b เมื่อมีกระแสลมผ่าน ระดับของเหลวในหลอดแก้วจะเปลี่ยนแปลงอย่างเช่นตัวอย่างในรูป 1.17 ความดันที่จุด b ลดลงต่ำกว่าความดัน

บรรยากาศ ($p_a > p_b$) ระดับของเหลวด้านที่ต่อกับจุด b จะสูงขึ้นไปถึงตำแหน่ง h_1 ในรูป และของเหลวในอีกด้านจะลดลงมาที่ตำแหน่ง h_2 ความต่างความดันระหว่าง p_a และ p_b สามารถคำนวณได้จากสมการ (1.70a)

$$\begin{aligned} p_a + \rho g h_2 &= p_b + \rho g h_1 \\ p_b &= p_a - \rho g (h_1 - h_2) \\ p_b &= p_a - \rho g \Delta h \end{aligned} \quad (1.71)$$

ในสมการ (1.71) เราทราบค่า p_a , ρ , g ส่วน Δh ได้จากการวัดความสูงของของเหลวในหลอดแก้ว เพราะฉะนั้นก็สามารถคำนวณหา p_b ได้ การใช้หลักการนี้ยังนำไปใช้กับมาโนมิเตอร์แบบหลายหลอดแก้วได้อีกด้วย



รูป 1.18 แรงลอยตัวของวัตถุในของไหล

ผลสำคัญอีกประการหนึ่งของความดันในของไหลที่อยู่นิ่งกับวัตถุคือแรงลอยตัว พิจารณาวัตถุที่จมอยู่ในของไหลที่ไม่เคลื่อนที่ เพื่อให้ง่ายพิจารณาวัตถุรูปลูกบาศก์กว้าง L ลึก 1 สูง Δh ตามรูป 1.18 แรงกระทำในแนวตั้งเนื่องจากความดันตามผิวบนและล่างจะมีค่า

$$F = (p_2 - p_1) L \quad (1.72)$$

ความต่างความดัน $p_2 - p_1$ หาได้โดยใช้สมการ (1.69)

$$p_2 - p_1 = \int_{p_1}^{p_2} dp = - \int_{h_1}^{h_2} \rho g dy$$

แทนลงในสมการ (1.72) จะได้

$$F = -L(1) \int_{h_1}^{h_2} \rho g dy \quad (1.73)$$

อินทิเกรตทางขวาของสมการ (1.73) มีค่าเท่ากับน้ำหนักของชั้นบางๆหนา dy มีพื้นที่หน้าตัด $L(1)$ ของของไหลมาเรียงซ้อนกันจนเต็มปริมาตรของลูกบาศก์ ดังนั้น

$$F = \text{น้ำหนักของของไหลที่มีปริมาตรเท่าวัตถุ}$$

นี่คือหลักการของอาซิมีตีสที่รู้จักกันดี ถึงแม้การพิสูจน์จะใช้การพิจารณาวัตถุรูปลูกบาศก์ แต่หลักนี้สามารถนำไปใช้กับรูปทรงใดๆก็ได้ไม่จำกัด โดยทั่วไปความหนาแน่นของของเหลวมีค่ามากกว่าของก๊าซหลายร้อยเท่า เช่น น้ำมีค่า ρ เท่ากับ 1000 kg/m^3 ส่วนอากาศมีค่า ρ เท่ากับ 1.23 kg/m^3 ดังนั้นแรงลอยตัวในของเหลวจะมากกว่าในก๊าซหลายพันเท่า พาหนะทางน้ำการพิจารณาแรงลอยตัวจึงมีความสำคัญมากในขณะที่ยานอวกาศยานมักไม่คำนึงถึงแรงในส่วนนี้ยกเว้นกรณีพิเศษของอากาศยานเบาว่าอากาศ เช่น เรือเหาะ บอลลูน ซึ่งลอยอยู่ได้ด้วยแรงลอยตัวโดยการใช้ก๊าซที่เบาว่าอากาศเข้าแทนที่อากาศในปริมาตรขนาดใหญ่

ตัวอย่าง 1.7 ลูกบอลลูนขนาดเส้นผ่าศูนย์กลาง 30 ฟุต เมื่ออัดอากาศร้อนเข้าไปจนเต็มจะสามารถรับน้ำหนักบรรทุกได้ 800 ปอนด์ ซึ่งรวมน้ำหนักของอากาศร้อนไว้ด้วย จงคำนวณหา ก) อัตราเร่งในแนวดิ่งของลูกบอลลูนที่ระดับน้ำทะเลในขณะที่เชือกยึดถูกปล่อย ข) เพดานที่จะขึ้นไปสูงสุดของบอลลูน สมมติให้การเปลี่ยนแปลงความหนาแน่นของอากาศในชั้นบรรยากาศกำหนดโดยสมการ $\rho = 0.002377(1 - 7 \times 10^{-6}h)^{4.21}$ เมื่อ h เป็นระยะสูงวัดเป็นฟุตและ ρ วัดเป็น slug/ft^3

วิธีทำ ก) ที่ระดับน้ำทะเล $h = 0$ ฟุต และ $\rho = 0.002377 \text{ slug/ft}^3$

จากปริมาตรของลูกบอลลูน $= \frac{4}{3}\pi r^3 = 14,137 \text{ ft}^3$ เพราะฉะนั้นคำนวณแรงลอยตัวได้จาก

$$\begin{aligned}\text{แรงลอยตัว} &= \text{น้ำหนักอากาศที่ถูกแทนที่ด้วยปริมาตรของลูกบอลลูน} \\ &= \rho g V \text{ lb}_f\end{aligned}$$

เมื่อ g คือค่าความโน้มถ่วงเท่ากับ 32.2 ft/s^2 และ V เป็นปริมาตรของลูกบอลลูน

$$\begin{aligned}\text{เพราะฉะนั้น} \quad \text{แรงลอยตัว} \quad B &= (32.2 \text{ ft/s}^2)(0.002377 \text{ slug/ft}^3)(14,137 \text{ ft}^3) \\ &= 1082 \text{ lb}_f\end{aligned}$$

แต่บอลลูนมีน้ำหนักรวม 800 lb_f เพราะฉะนั้นจากกฎของนิวตัน

$$F = B - W = ma$$

เมื่อ W คือน้ำหนัก และ m เป็นมวล จะได้

$$\begin{aligned}a &= \frac{B - W}{m} = \frac{1082 - 800}{800/32.2} \\ &= 11.4 \text{ ft/s}^2\end{aligned}$$

ตอบ

ข) เพดานสูงสุดของลูกบอลลูนเกิดขึ้นที่ $B = W = 800 \text{ lb}_f$ แต่ $B = \rho g V \text{ lb}_f$ และสมมติให้ปริมาตรของลูกบอลลูนคงที่เพราะฉะนั้นความหนาแน่นของอากาศภายนอกลูกบอลลูนขณะอยู่ที่เพดานสูงสุดจะเท่ากับ

$$\rho = \frac{B}{gV} = \frac{800}{(32.2)(14,137)} = 0.00176 \text{ slug/ft}^3$$

แต่โจทย์กำหนด $\rho = 0.002377(1 - 7 \times 10^{-6}h)^{4.21}$ เพราะฉะนั้นแก้สมการหา h ได้

$$\begin{aligned}\rho &= 0.00176 = 0.002377(1-7 \times 10^{-6}h)^{4.21} \\ h &= \frac{1}{7 \times 10^{-6}} \left[1 - \left(\frac{0.00176}{0.002377} \right)^{1/4.21} \right] \\ &= 9842 \text{ ฟุต} \quad \text{ตอบ}\end{aligned}$$

1.10 การจำแนกชนิดของการไหล (Type of Flow)

การทำความเข้าใจการไหลจริงในธรรมชาติเป็นสิ่งที่เป็นไปได้ยาก โดยเฉพาะเมื่อเราต้องสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์เพื่อแสดงการเปลี่ยนแปลงลักษณะต่างๆ ของการไหลเนื่องจากมีรายละเอียดเกี่ยวกับองค์ประกอบหรือตัวแปรที่เกี่ยวข้องเป็นจำนวนมาก ดังนั้นเพื่อให้สามารถทำความเข้าใจธรรมชาติของการไหลให้ได้มากที่สุดเราจึงจำแนกการไหลออกเป็นแบบต่างๆตามลักษณะเด่นหรือลักษณะสำคัญที่มีผลต่อการไหลมากกว่าตัวอื่น ถึงแม้ในความเป็นจริงลักษณะการไหลจะเป็นการผสมผสานของผลที่เกิดจากองค์ประกอบทั้งหมดที่เกี่ยวข้องแต่เราจำเป็นต้องตัดผลจากตัวแปรที่ไม่สำคัญออกและเลือกพิจารณาการไหลที่มีรายละเอียดน้อยลง ซึ่งเป็นผลให้การศึกษาวิชาอากาศพลศาสตร์แยกการพิจารณาการไหลที่มีลักษณะต่างจำนวนมากออกจากกัน ลักษณะการไหลที่สำคัญและมีความแตกต่างกันอาจจำแนกให้เห็นได้เป็นคู่ๆ (Anderson, 2016) ดังนี้

1.10.1 การไหลต่อเนื่องกับการไหลของโมเลกุลอิสระ (Continuum Flow VS Free Molecule Flow)

กระแสอากาศที่ไหลผ่านวัตถุ เช่น รูปทรงกระบอกประกอบด้วยโมเลกุลขนาดเล็กมากที่เคลื่อนที่ไปมาอย่างอิสระแบบสะเปะสะปะ ให้ λ เป็นระยะทางเฉลี่ยที่แต่ละโมเลกุลเคลื่อนที่ได้ก่อนที่จะชนกับโมเลกุลอื่นเรียกว่า Mean free path ถ้า λ สั้นมากเมื่อเทียบกับมาตราส่วนของทรงกระบอกเช่น เส้นผ่าศูนย์กลางแล้ว แสดงว่าจำนวนของโมเลกุลอากาศรอบทรงกระบอกมีจำนวนมหาศาลจนกระแสอากาศที่มากระทบกับทรงกระบอกจะเสมือนเป็นตัวกลางที่มีเนื้อเดียวกันไม่ใช่การกระทบของโมเลกุลอิสระที่ละโมเลกุลเพราะความถี่ที่สูงและจำนวนของการระดมชนจากแต่ละโมเลกุลบนทรงกระบอกเกิดขึ้นต่อเนื่องจนไม่สามารถแยกความแตกต่างของการชนแต่ละครั้งออกจากกันได้ ในลักษณะนี้เราอาจพิจารณาอากาศเป็นตัวกลางที่เป็นเนื้อเดียวกันตลอดไม่มีช่องว่างระหว่างโมเลกุลก็ได้ และเราจัดให้การไหลในลักษณะนี้เป็นการไหลต่อเนื่อง ลักษณะสำคัญของการไหลต่อเนื่องคือคุณสมบัติของการไหลใดๆ ที่ถูกพิจารณาจะเป็นฟังก์ชันต่อเนื่องและพิจารณาโดยใช้แคลคูลัสได้โดยตรง ในทางตรงข้ามถ้า λ มีค่าในระดับ (order) เดียวกับเส้นผ่าศูนย์กลางของทรงกระบอกแสดงว่าจำนวนของโมเลกุลอากาศรอบทรงกระบอกมีจำนวนไม่มาก กระแสอากาศที่มากระทบกับทรงกระบอกจะเกิดขึ้นเป็นจังหวะห่างกันไม่สม่ำเสมอและสามารถแยกความแตกต่างจากกันได้ ลักษณะคล้ายกับการยืนอยู่กลางสายฝนเม็ดฝนที่มากกระทบตัวจะเกิดทีละเม็ดสลับไปมา เรา

เรียกการไหลลักษณะนี้ว่า การไหลโมเลกุลอิสระ คุณสมบัติใดๆ ของการไหลโมเลกุลอิสระไม่สามารถพิจารณาโดยใช้แคลคูลัสได้เพราะเนื้ออากาศมีช่องว่างสลักับโมเลกุลดังนั้นจึงต้องใช้การพิจารณาโดยใช้สถิติที่มีความสลับซับซ้อน ภายใต้อุณหภูมิและความดันปกติ เช่น ในชั้นบรรยากาศระดับล่างความหนาแน่นของอากาศมีเพียงพอที่เราสมมุติให้มันเป็นตัวกลางที่มีเนื้อต่อเนื่องได้แต่ในชั้นบรรยากาศสูงขึ้นไปถึงบริเวณขอบอวกาศความหนาแน่นของอากาศจะลดลงจนเราไม่สามารถสมมุติให้มันเป็นตัวกลางที่มีเนื้อต่อเนื่องได้อีกต่อไป ดังนั้นสำหรับปัญหาการบินทั่วไปในชั้นบรรยากาศระดับล่างเราพิจารณาการไหลของกระแสอากาศเป็นแบบการไหลต่อเนื่อง แต่สำหรับปัญหาการบินในบรรยากาศชั้นสูงหรือในอวกาศ เช่น การกลับสู่พื้นของกระสวยอวกาศต้องพิจารณาการไหลของกระแสอากาศเป็นแบบการไหลโมเลกุลอิสระ

1.10.2 การไหลไร้ความหนืดกับการไหลหนืด (Inviscid VS Viscous Flow)

ความหนืดของของไหลเป็นปรากฏการณ์ที่เกิดจากการเคลื่อนที่สะเปะสะปะของโมเลกุลอิสระที่พามวล โมเมนตัม และพลังงานจากบริเวณหนึ่งไปยังอีกบริเวณหนึ่ง การขนถ่ายระดับโมเลกุลนี้เองที่ปรากฏให้เราเห็นเป็นการแพร่กระจายมวล ความหนืด (แรงเสียดทาน) และการถ่ายเทความร้อน การไหลจริงจะเกิดขึ้นพร้อมปรากฏการณ์เหล่านี้เสมอ คือ การไหลจะต้องมีแรงเสียดทานและการถ่ายเทความร้อนเกิดขึ้นร่วมด้วยเสมอ เราเรียกการไหลที่มีธรรมชาติอย่างนี้ว่าการไหลหนืด ในอุดมคติถ้าสามารถพิจารณาการไหลที่ไม่ต้องเกี่ยวข้องกับแรงเสียดทานและการถ่ายเทความร้อนได้ ปัญหาที่ซับซ้อนหลายอย่างจะถูกตัดทิ้งไปได้โดยพิจารณาของไหลเป็นของไหลในอุดมคติที่ไม่มีความหนืด (Inviscid fluid) และเรียกการไหลชนิดนี้ว่าการไหลเลื่อน/การไหลไร้ความหนืด (Houghton, E. L., & Carpenter, P. W., 2019) ในธรรมชาติไม่มีการไหลใดที่เป็นการไหลไร้ความหนืดจริงเพราะถึงอย่างไรของไหลจะต้องมีความหนืด อย่างไรก็ตามมีหลายกรณีที่อิทธิพลของความหนืดและการถ่ายเทความร้อนมีน้อยจนเราอาจใช้แบบจำลองของการไหลแบบไร้ความหนืดได้อย่างเหมาะสม ที่จริงแล้วกว่า 70% ของทฤษฎีอากาศพลศาสตร์เป็นการพิจารณาการไหลไร้ความหนืดซึ่งเราจะได้ศึกษาต่อไป

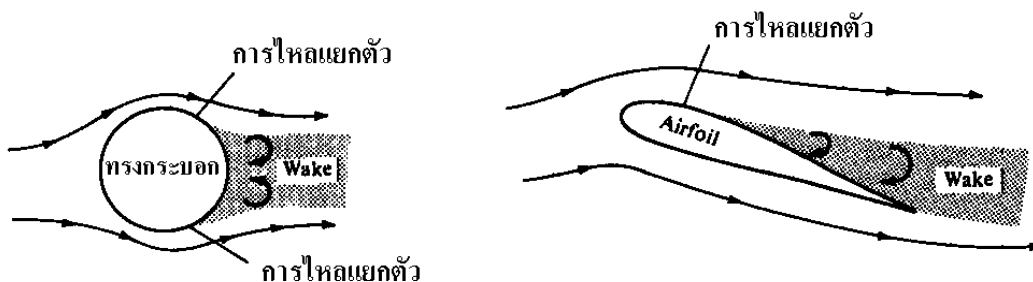
ในทางทฤษฎีการไหลจะเข้าสู่ลักษณะของการไหลไร้ความหนืดบนขีดจำกัดเมื่อ $Re \rightarrow \infty$ คงจำได้จากหัวข้อ 1.7 ว่า Re คือกลุ่มตัวแปรไร้มิติที่ประกอบด้วย $\frac{\rho V c}{\mu}$ ดังนั้นขีดจำกัดเกิดขึ้นเมื่อความหนืดซึ่งเป็นตัวหารของกลุ่มตัวแปรไร้มิตินี้มีค่าเข้าสู่ศูนย์หรือน้อยมากเทียบกับเศษ อย่างไรก็ตามในทางปฏิบัติการไหลจำนวนมากที่ Re มีค่าสูงแต่ยังคงจำกัด (เช่น $>10^5$ ขึ้นไป) อาจสมมุติให้เป็นการไหลไร้ความหนืดได้ สำหรับการไหลลักษณะนี้อิทธิพลของความหนืด การถ่ายเทความร้อนและการแพร่กระจายมวลจะถูกจำกัดอยู่เฉพาะในบริเวณชั้นบางติดกับผิววัตถุที่กระแสไหลผ่านซึ่งเรียกว่าชั้นขีดผิว (Boundary layer) ส่วนการไหลที่อยู่นอกบริเวณนี้ออกไปจะเหมือนกับไหลเฉียดขอบชั้นขีดผิวไปโดยไม่มีแรงเสียดทานและสมมุติให้เป็นการไหลไร้ความหนืดได้อย่างสมเหตุผล รูป 1.19 แสดงภาพการไหลผ่านวัตถุรูปทรงกลม เช่น แพนอากาศ ที่แบ่งออกเป็นสองบริเวณ ชั้นขีด

ผิวที่เกิดขึ้นในภาพจะบางลงเมื่อ Re สูงขึ้น การไหลนอกชั้นขีดผิวถูกทำให้เบี่ยงเบนไปจากผิววัตถุเพียงเล็กน้อยหรือเหมือนกับไหลเฉียดไปตามผิว การพิจารณาการแจกแจงความดันโดยสมมุติให้การไหลไม่มีความหนืดจึงให้ผลใกล้เคียงการไหลจริง การทำนายแรงยกซึ่งส่วนใหญ่เป็นผลจากความต่างความดันรอบแพนอากาศจึงอาจทำได้แน่นอนแม่นยำ และยังสามารถใช้ทำนายรูปแบบของเส้นกระแส (Streamline) รอบนอกแพนอากาศได้ อย่างไรก็ตามการสมมุติให้การไหลเป็นแบบไร้ความหนืดมีข้อจำกัดที่สำคัญยิ่งอันหนึ่งคือ ไม่สามารถใช้ทำนายความเค้นเฉือนบนผิววัตถุซึ่งเป็นส่วนสำคัญของการเกิดแรงต้านได้



รูป 1.19 ย่านการไหลในชั้นขีดผิวและการไหลไร้ความหนืดนอกชั้นขีดผิว

ในอีกด้านหนึ่งยังมีการไหลที่ความหนืดเป็นตัวการสำคัญต่อลักษณะการไหลโดยรวมอย่างมาก เช่น ถ้าแพนอากาศในรูป 1.19 ถูกวางอยู่ที่มุมปะทะสูงในลักษณะขวางลม การไหลผ่านแพนอากาศลักษณะนี้ชั้นขีดผิวจะเกาะติดผิวแพนอากาศไปไม่ตลอดแต่มีแนวโน้มจะแยกตัวจากผิวบนของแพนอากาศและก่อตัวเป็นกลุ่มของอากาศอลวนทั้งเป็นรอย (Wake) ไปด้านหลังเป็นแนวกว้างอย่างเช่นที่แสดงในรูป 1.20 ด้านบนซึ่งเป็นลักษณะเฉพาะของแพนอากาศในอาการร่วงหล่น (Stalled) การแยกตัวของชั้นขีดผิวเป็นลักษณะสำคัญเช่นเดียวกันสำหรับการไหลผ่านวัตถุที่มีรูปร่างต้านลมอย่างเช่นทรงกระบอกกลมในรูป 1.20 ด้านล่าง ในตอนนี้การไหลจะไหลติดผิวทรงกระบอกอ้อมผ่านด้านหน้าไปแต่จะแยกตัวจากผิวด้านหลังก่อตัวเป็นกลุ่มของอากาศอลวนทั้งเป็นรอย (Wake) ไปด้านหลังเป็นแนวกว้างเกือบเท่าความกว้างของทรงกระบอก ตามตัวอย่างที่กล่าวความหนืดเป็นตัวการสำคัญต่อลักษณะการไหลและไม่มีทางที่จะใช้ทฤษฎีการไหลไร้ความหนืดทำนายการไหลได้ถูกต้อง



รูป 1.20 ตัวอย่างการไหลที่ความหนืดมีผลสำคัญ (Anderson, 2016)

1.10.3 การไหลไม่อัดตัวกับการไหลอัดตัว (Incompressible VS Compressible Flows)

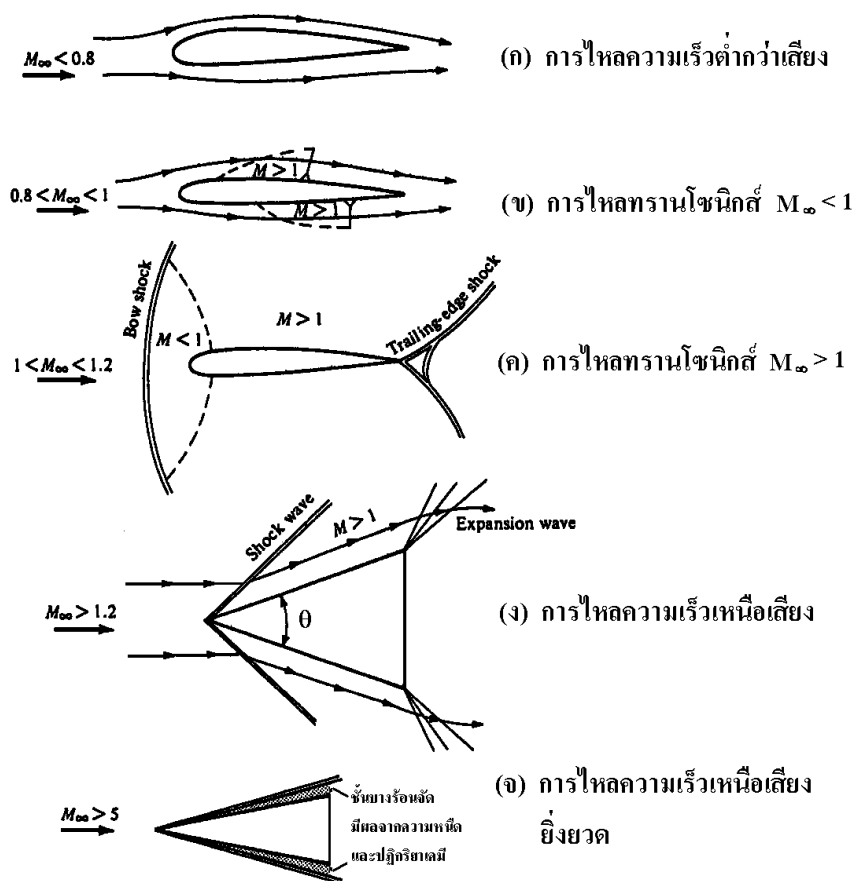
การไหลที่ความหนาแน่นของของไหลคงที่เรียกว่าการไหลไม่อัดตัว แต่ถ้ามีการเปลี่ยนแปลงความหนาแน่นเกิดขึ้นจะเรียกว่าการไหลอัดตัว ของไหลทุกชนิดอัดตัวได้ไม่มากนักน้อยของเหลวมีการเปลี่ยนแปลงความหนาแน่นน้อยแม้ความดันจะเปลี่ยนมาก จึงมักพิจารณาให้การไหลของของเหลวเป็นการไหลไม่อัดตัว สำหรับก๊าซแม้อัดตัวได้ง่าย แต่ถ้าความเร็วของการไหลต่ำกว่ามัค 0.3 คือต่ำกว่าความเร็วเสียงมากผลของการอัดตัวจะเกิดขึ้นน้อย และสามารถสมมติให้การไหลเป็นแบบไม่มีการอัดตัวได้โดยไม่เกิดความคลาดเคลื่อนมาก สำหรับความเร็วการไหลที่สูงกว่านี้ผลของการอัดตัวจะเกิดขึ้นกับการแปรรูปพลังงานการไหลของก๊าซและต้องนำมาพิจารณา นอกจากนี้ลักษณะเฉพาะของการไหลที่มีการอัดตัวร่วมด้วยยังเปลี่ยนไปตามระดับความเร็วของการไหลอีกด้วย ซึ่งจะกล่าวในหัวข้อต่อไป

1.11 ย่านเลขมัค (Mach Number Regimes)

ในกระบวนวิธีจำแนกชนิดการไหลทั้งหมด ดูเหมือนว่าการอธิบายและแบ่งลักษณะการไหลโดยใช้เลขมัคแสดงย่านการไหลจะมีความชัดเจนและเข้าใจง่ายสำหรับบุคคลทั่วไป ถ้าให้ M เป็นค่าเลขมัคเฉพาะตำบลของจุดใดๆในสนามของการไหล ดังนั้นโดยนิยามจะได้ว่า ณ จุดนั้นการไหลถือเป็น

ต่ำกว่าความเร็วเสียง	Subsonic	เมื่อ M น้อยกว่า 1
ความเร็วเสียง	Sonic	เมื่อ M เท่ากับ 1
สูงกว่าความเร็วเสียง	Supersonic	เมื่อ M มากกว่า 1

พิจารณาการไหลทั้งบริเวณพร้อมกันจะพบว่าอาจจำแนกออกได้เป็นสี่ย่านความเร็วเมื่อใช้เลขมัคเป็นตัวบ่งชี้ คือ



รูป 1.21 การไหลในย่านเลขมัคค์ต่าง ๆ (Anderson, 2016)

1.11.1 การไหลความเร็วต่ำกว่าเสียง ($M < 1$ ทั้งหมดบริเวณ)

การไหลถูกกำหนดให้เป็นการไหลความเร็วต่ำกว่าเสียงเมื่อค่าเลขมัคค์ต่ำกว่า 1 ทุกจุดในสนามการไหล ลักษณะการไหลความเร็วต่ำกว่าเสียงนั้นเส้นกระแสจะมีลักษณะต่อเนื่องไม่มีรอยหักจากการเปลี่ยนแปลงความเร็วอย่างทันทีทันใดตามที่แสดงในรูป 1.21ก การที่ทุกจุดในการไหลมีความเร็วต่ำกว่าความเร็วเสียงการรบกวนการไหลที่เกิดขึ้น ณ จุดใดๆ (การเปลี่ยนมุมปะทะหรือการกระดกส่วนของชายหลังขึ้นทันทีทันใด) จะถูกถ่ายทอดไปทั้งเหนือลมและใต้ลมในรูปของคลื่นความดันซึ่งแพร่กระจายไปด้วยความเร็วเสียงและรับรู้ได้ทั่วทั้งบริเวณ สังเกตว่าถึงแม้ค่าเลขมัคค์ของกระแสอิสระจะน้อยกว่า 1 แต่ไม่ได้เป็นการรับประกันว่าการไหลทั้งบริเวณจะต่ำกว่าความเร็วเสียงเนื่องจากบริเวณรอบวัตถุที่กระแสน้ำต้องอ้อมไปความเร็วจะเพิ่มขึ้น ถ้าค่าเลขมัคค์ของกระแสอิสระมีค่าใกล้ 1 มากก็เป็นที่น่าจะมีบางบริเวณรอบวัตถุที่ความเร็วกระแสจะมีค่า $M > 1$ จากเหตุผลนี้จึงเป็นกฎเกณฑ์เบื้องต้นว่าสำหรับการไหลผ่านวัตถุที่มีรูปร่างกลมค่าเลขมัคค์ของกระแสอิสระน้อยกว่าประมาณ 0.8 จะยืนยันการไหลที่เป็นการไหลความเร็วต่ำกว่าเสียง และสำหรับวัตถุที่รูปร่างด้านลมค่าเลขมัคค์ของกระแสอิสระต้องต่ำลงอีก

1.11.2 การไหลทรานโซนิก (ย่านผสมระหว่าง $M < 1$ และ $M > 1$)

อย่างที่กล่าวไว้ในหัวข้อแรกว่าถ้า M เข้าใกล้ 1 กระแสอาจมีค่า $M > 1$ ที่บางจุดรอบวัตถุตามที่แสดงในรูป 1.21x ที่มีการไหลความเร็วเหนือเสียงทั้งด้านบนและด้านล่างของแพนอากาศในบริเวณที่เริ่มจากเส้นประและสิ้นสุดตรงคลื่นกระแทกบางๆ ซึ่งการไหลจะกลับเป็นความเร็วต่ำกว่าเสียงตามเดิม ในรูป 1.21ค ถ้า M มีค่ามากกว่า 1 เล็กน้อยคลื่นกระแทก (Shock wave) รูปคันธนูจะก่อตัวขึ้นด้านหน้าวัตถุทางออกมาเล็กน้อย ด้านหลังคลื่นกระแทกนี้การไหลจะลดความเร็วลงจนต่ำกว่าเสียงแล้วจึงค่อยเพิ่มความเร็วขึ้นจนมีความเร็วเหนือเสียงเมื่อไหลไปตามผิววัตถุและจะมีคลื่นกระแทกก่อตัวขึ้นที่ชายหลังตามปกติจะมีรูปร่างคล้ายเส้นโค้ง สนามการไหลในรูป 1.21x และ 1.21ค มีลักษณะสำคัญคือมีการไหลความเร็วต่ำกว่าเสียงและความเร็วเหนือเสียงผสมกันและถูกกำกับโดยคุณสมบัติของการไหลทั้งสองชนิด เรียกว่าการไหลทรานโซนิก (Transonic flow) มักเกิดขึ้นเมื่อ M ของกระแสวิกฤตมีค่าระหว่าง 0.8 ถึง 1.2

1.11.3 การไหลความเร็วเหนือเสียง ($M > 1$ ทุกบริเวณ)

การไหลถือว่าการไหลความเร็วเหนือเสียงถ้าทุกจุดในการไหลค่า $M > 1$ และมีลักษณะสำคัญของการไหลคือการเกิดคลื่นกระแทกที่เป็นแนวที่คุณสมบัติของการไหลมีการเปลี่ยนแปลงอย่างฉับพลันและไม่ต่อเนื่อง (รวมถึงเส้นกระแสด้วยซึ่งต่างจากการไหลความเร็วต่ำกว่าเสียงที่การเปลี่ยนแปลงและเส้นกระแสจะมีความต่อเนื่อง) ตามที่แสดงในรูป 1.21ง ซึ่งเป็นการไหลความเร็วเหนือเสียงผ่านรูปลิ้ม การไหลเป็นความเร็วเหนือเสียงทั้งด้านหน้าและด้านหลังของคลื่นกระแทกที่ก่อตัวและเอนจากชายหน้าของลิ้ม ในรูปยังแสดงแนวที่เรียกว่าแนวขยายตัว (Expansion fan) ด้านท้ายของลิ้มซึ่งเป็นแนวที่ความการไหลเร่งความเร็วและเป็นเรื่องปกติในการไหลความเร็วเหนือเสียง (สำหรับเกณฑ์ $M > 1.2$ ในรูป 1.21ง เพื่อให้การไหลเป็นความเร็วเหนือเสียงทุกจุดเป็นเพียงกฎเกณฑ์ทั่วไป ตัวอย่างเช่น ในรูป 1.21ง ถ้ามุมของลิ้มเพิ่มมากขึ้นจนเป็นมุมที่ป้านพอคลื่นกระแทกที่ก่อตัวจากชายหน้าของลิ้มจะเริ่มแยกตัวออกมากลายเป็นคลื่นกระแทกรูปคันธนูอย่างที่เกิดในรูป 1.21ค และมีบริเวณการไหลความเร็วต่ำกว่าเสียงเกิดขึ้นที่ด้านหลัง ดังนั้นการไหลความเร็วเหนือเสียงจะถูกทำลายลงเมื่อมุมของลิ้มใหญ่เกินกว่าค่าหนึ่งสำหรับค่า M ค่าหนึ่งเสมอ ปรากฏการณ์นี้เกิดขึ้นได้สำหรับ $M > 1$ ทุกค่า เพียงแต่จะเกิดขึ้นสำหรับมุมที่ใหญ่ขึ้นเมื่อ M เพิ่มขึ้น เหตุผลนี้แสดงให้เห็นว่าการกำหนด $M > 1.2$ ในรูป 1.21ง เป็นหลักง่ายๆ และไม่ควรมีถือถือจริงจังนัก) ในการไหลความเร็วเหนือเสียงเนื่องจากความเร็วทุกจุดสูงกว่าความเร็วเสียงการรบกวนการไหลใดๆ ที่เกิดขึ้นไม่สามารถส่งสัญญาณทวนกระแสลมขึ้นไปได้ จึงทำให้เกิดความแตกต่างกันโดยสิ้นเชิงระหว่างการไหลความเร็วเหนือเสียงและการไหลความเร็วต่ำกว่าเสียง และเป็นเหตุผลพื้นฐานของการเกิดการก่อตัวของคลื่นกระแทกในการไหลความเร็วเหนือเสียงแต่ไม่เกิดขึ้นในการไหลความเร็วต่ำกว่าเสียง

1.11.4 การไหลความเร็วสูงกว่าความเร็วเสียงมาก ($M > 5$)

ย้อนกลับไปดูลิ้มในรูป 1.21 สำหรับมุมลิ้มค่าหนึ่งเมื่อค่า M เพิ่มมากขึ้นคลื่นกระแทกที่ชายหน้าของลิ้มจะเอนเข้าหาผิวลิ้มมากขึ้นและความแรงของการกระแทกจะเพิ่มขึ้นจนนำไปสู่ย่านที่มีอุณหภูมิสูงระหว่างคลื่นและผิววัตถุเรียกว่าชั้นการกระแทก (Shock layer) ถ้า M สูงพอชั้นนี้จะบางมากจนคลื่นกระแทกและผิวอยู่ใกล้กันจนเกิดปฏิสัมพันธ์ขึ้นระหว่างคลื่นกระแทกและชั้นขีดผิว นอกจากนี้อุณหภูมิที่สูงมากยังทำให้เกิดปฏิกิริยาเคมีในอากาศ และโมเลกุลของไนโตรเจนและออกซิเจนจะถูกทำให้แตกตัว เมื่อ M สูงจนผลของแรงหนืดและปฏิกิริยาเคมีของอากาศมีความสำคัญต่อการไหลเราจะถือว่าการไหลเข้าสู่ย่านความเร็วสูงกว่าความเร็วเสียงมาก ซึ่งโดยทั่วไปมักกำหนดที่ค่า M ของกระแสอิสระมากกว่า 5

โดยสรุปการแบ่งการไหลตามหัวข้อ 1.10 และ 1.11 เป็นความพยายามที่จะจัดการศึกษาการไหลไปตามลักษณะสำคัญของการไหลแต่ละแบบ เนื้อหาของการศึกษาการไหลเหล่านี้จะครอบคลุมการศึกษาอากาศพลศาสตร์เกือบทั้งหมดที่มีการประยุกต์ใช้กันในปัจจุบัน

1.12 อากาศพลศาสตร์ประยุกต์

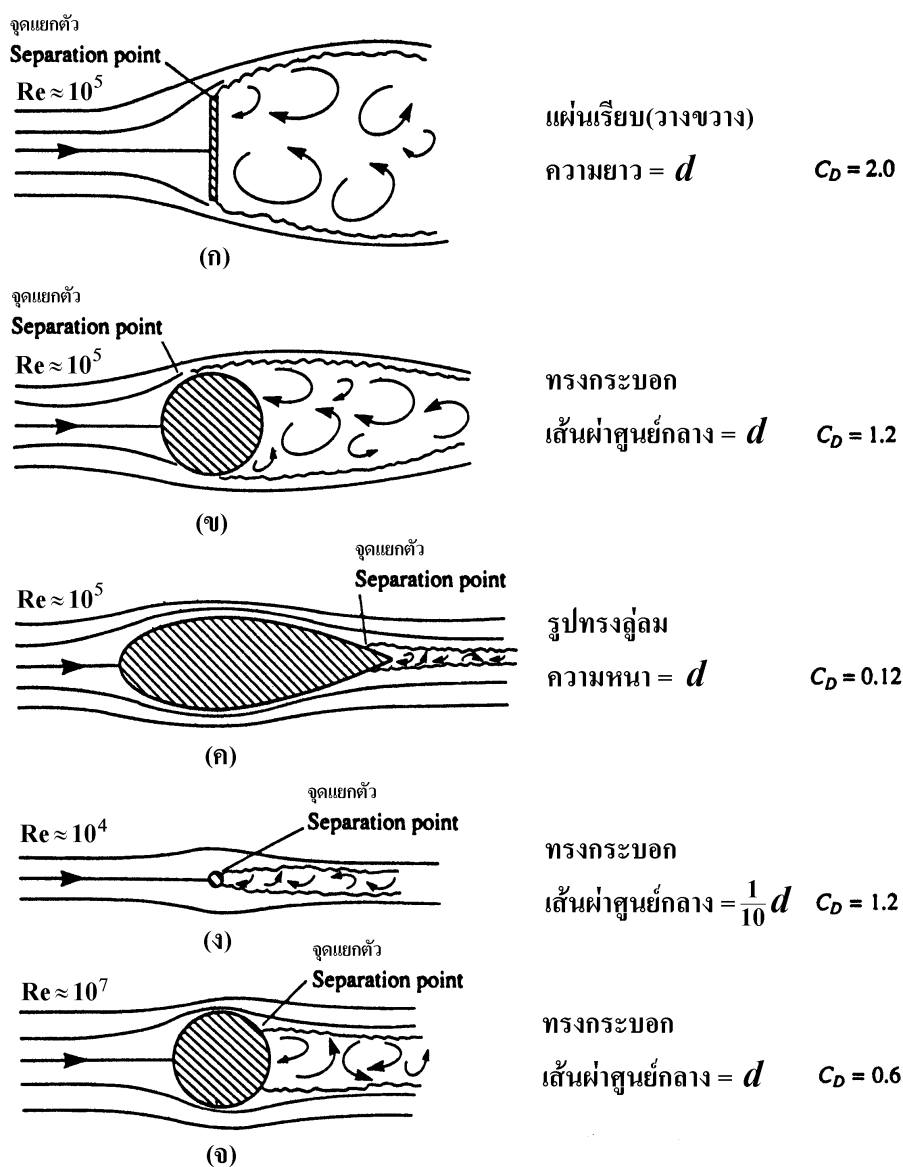
ก่อนจบบทที่ 1 ไป เพื่อสร้างความเข้าใจถึงความสำคัญของพื้นฐานในหัวข้อต่างๆ ที่ได้กล่าวมาแล้วว่าจะเข้าไปเกี่ยวข้องกับสัมพันธ์กับสิ่งที่เป็นความสนใจจริงๆ ของเราในวิชาอากาศพลศาสตร์อย่างไร จะได้ยกตัวอย่างอากาศพลศาสตร์ประยุกต์ในส่วนที่เกี่ยวกับสัมประสิทธิ์ของแรงมาเป็นตัวอย่างพอสังเขป เมื่อพูดถึงอากาศพลศาสตร์ประยุกต์ตามปกติบอกถึงการประยุกต์เอาพื้นฐานของอากาศพลศาสตร์ไปใช้คาดคะเนหรือประเมินคุณลักษณะทางอากาศพลศาสตร์ของรูปทรงอากาศพลศาสตร์ที่ใช้งานจริง (Bertin & Cummings, 2025) เช่น อากาศยาน ขีปนาวุธ หรือยานขนส่งอวกาศที่เคลื่อนที่ในชั้นบรรยากาศ ลักษณะสำคัญที่พูดถึงคงไม่พ้นสัมประสิทธิ์ของแรงยก แรงต้านและโมเมนต์ ซึ่งเป็นเหมือนภาษาที่ใช้สื่อสารกันในอากาศพลศาสตร์ประยุกต์นั่นเอง สัมประสิทธิ์เหล่านี้ได้อธิบายไว้ในหัวข้อ 1.5 และใช้เป็นตัวชี้คุณสมบัติของรูปทรงต่างๆ ขอยกตัวอย่างที่เราอาจเคยพบในโฆษณารถยนต์ยี่ห้อต่างๆ ทั้งของยุโรป และญี่ปุ่น ว่ามีสัมประสิทธิ์แรงต้านอากาศต่ำซึ่งส่วนใหญ่อยู่ระหว่าง 0.2 ถึง 0.5 โฆษณายามชี้ให้เห็นความลู่ลมของรถยนต์ยี่ห้อนั้นๆ สำหรับคนทั่วไปค่าโฆษณานี้ฟังดูมีเหตุผลดีเพราะตัวเลข 0.3 ถึง 0.5 มีค่าน้อยน่าจะหมายถึงแรงต้านอากาศที่ต่ำ แต่สำหรับนักอากาศพลศาสตร์ค่าโฆษณานี้สมเหตุสมผลจริงหรือ บางคนอาจตั้งคำถามขึ้นว่าค่าสัมประสิทธิ์แรงต้าน 0.2 ถึง 0.5 น้อยจริงหรือ (ตัวอย่างเช่น เราควรคาดหวังค่าสัมประสิทธิ์แรงต้านให้ต่ำขนาด 10^{-5} หรือว่าสูงขนาด 1000 ค่าใดที่สมเหตุสมผล) เมื่อเปรียบเทียบกับสัมประสิทธิ์แรงต้านของรูปร่างแบบอื่นๆ มันมีค่าน้อยหรือมากแตกต่างกันอย่างไร หรือมันทำให้เกิดแรงต้านบนรถยนต์จริงๆ เท่าไร น้อยจริงหรือไม่ และค่าสัมประสิทธิ์แรงต้านนี้คงที่หรือไม่คงที่อย่างไร คำถามเหล่านี้มีคำตอบเบื้องต้น

อยู่ในรูป 1.22 ซึ่งเป็นข้อมูลที่ได้ทั่วไปในตำรากลศาสตร์ของไหลเกือบทุกเล่ม ส่วนใหญ่เป็นผลการทดสอบในอุโมงค์ลมหลายๆ ครั้งนำมาประมวลผลกัน

การวิเคราะห์มิติในหัวข้อ 1.7 ชี้ให้เห็นว่า $C_D = f(Re, M)$ แต่ในรูป 1.22 ค่า C_D เป็นของการไหลความเร็วต่ำที่ไม่ต้องคำนึงถึงการอัดตัว ดังนั้นจึงไม่คำนึงถึงผลของการเปลี่ยนแปลง M (สำหรับในทางปฏิบัติ การไหลที่ไม่มีการอัดตัวถือได้ว่า $M = 0$) ด้วยเหตุนี้สำหรับการไหลที่ความเร็วต่ำค่า C_D ของรูปทรงที่มุมปะทะอันหนึ่งจึงเป็นฟังก์ชันของ Re เท่านั้น ในรูป 1.22 ค่า Re แสดงอยู่ทางซ้ายของแต่ละรูปและค่า C_D แสดงอยู่ทางขวา รูป 1.22ก แสดงการไหลผ่านแผ่นเรียบสูง d ยาวไม่จำกัด วางขวางตั้งฉากกับทิศทางกระแสอิสระซึ่งเป็นลักษณะที่ทำให้เกิดแรงต้านที่เป็นไปได้มากที่สุดเทียบกับการวางลักษณะอื่น และค่าสัมประสิทธิ์แรงต้าน $C_D = \frac{D}{q_\infty S} = 2.0$ เมื่อ S เป็นพื้นที่หน้าตัดขวางลม

และ q_∞ เป็นความดันพลวัต ค่าเลขเรย์โนลด์คิดจากความกว้างของแผ่นเรียบ $Re = \frac{\rho_\infty V_\infty d}{\mu_\infty} = 10^5$

รูป 1.22 ข และ 1.22 ค แสดงการไหลผ่านทรงกระบอกกลมเส้นผ่าศูนย์กลาง d และรูปทรงกระบอกหน้าตัดหยดน้ำกลมหนา d ที่ค่าเลขเรย์โนลด์เดียวกัน ค่าสัมประสิทธิ์แรงต้านของทรงกระบอกกลม $C_D = 1.2$ น้อยกว่าของแผ่นเรียบเกือบครึ่งและพบต่อไปว่าค่าสัมประสิทธิ์แรงต้านของรูปหยดน้ำลดน้อยลงอีกเหลือเพียง $C_D = 0.12$ ต่ำกว่าทรงกระบอกกลม 10 เท่า และต่ำกว่าของแผ่นเรียบเกือบ 20 เท่า สังเกตว่าสนามการไหลทั้งสามรูปในรูป 1.22 ก ข ค แสดงส่วนการไหลอลวนซึ่งเป็นรอย (Wake) ไปด้านหลัง การไหลอลวนนี้เป็นผลของการแยกตัวของชั้นขีดผิวที่ได้กล่าวแล้วในหัวข้อก่อน กระแสอลวนในรอยเป็นกลุ่มอากาศที่ไหลตกลงวนไปมาด้วยพลังงานต่ำ ในรูปเห็นได้ชัดว่าความกว้างของรอยที่ทิ้งไปด้านหลังจะลดลงจากรูป 1.22 ก ข และ ค ตามลำดับพร้อมกับค่า C_D ที่ลดลงเช่นกัน ความสัมพันธ์นี้ไม่ใช่เรื่องบังเอิญแต่มีส่วนเกี่ยวข้องกันโดยตรงซึ่งจะได้อธิบายกันต่อไป แต่ตอนนี้ขอให้สังเกตว่ารูปทรงที่ลู่ลมมีผลทำให้รอยด้านหลังแคบเล็กกว่าและสัมประสิทธิ์แรงต้านต่ำกว่า



รูป 1.22 สัมประสิทธิ์แรงต้านอากาศ C_D บนรูปทรงต่างๆ (Anderson, 2016)

ในรูป 1.22 ง เป็นการไหลผ่านทรงกระบอกกลมที่มีเส้นผ่าศูนย์กลางเพียง $0.1d$ ดังนั้นค่า Re จึงลดลงเหลือ 10^4 เมื่อพิจารณาจากค่า V_∞ , ρ_∞ และ μ_∞ เดียวกันกับรูป 1.22 ก ข และ ค ในรูปนี้ ค่า C_D ยังคงเท่ากับ 1.2 อย่างไรก็ตามเนื่องจากแรงต้าน $D = q_\infty S C_D$ และพื้นที่ S ในรูป 1.22 ง เป็นเพียง 1 ใน 10 ของรูป ข ดังนั้นแรงต้านบนทรงกระบอกกลมในรูป 1.22 ง จึงมีค่าเพียง 1 ใน 10 ของทรงกระบอกกลมในรูป 1.22 ข เช่นกัน แต่เมื่อเปรียบเทียบกับรูปทรงลู่ลมในรูป 1.22 ค ซึ่งมีพื้นที่หน้าตัด $S = d(1)$ คำนวณแรงต้านได้ $D = q_\infty S C_D = 0.12 q_\infty d$ และคำนวณแรงต้านทรงกระบอกกลมในรูป 1.22 ง ที่มีพื้นที่หน้าตัด $S = 0.1d(1)$ ได้ $D = q_\infty S C_D = 1.2 q_\infty (0.1d) = 0.12 q_\infty d$ จะพบว่าแรงต้านเท่ากัน ขอย้ำอีกครั้งว่าแรงต้านบนทรงกระบอกกลมรัศมี $0.1d$ มีค่าเท่ากับแรงต้านบนรูปทรงลู่ลมที่มี

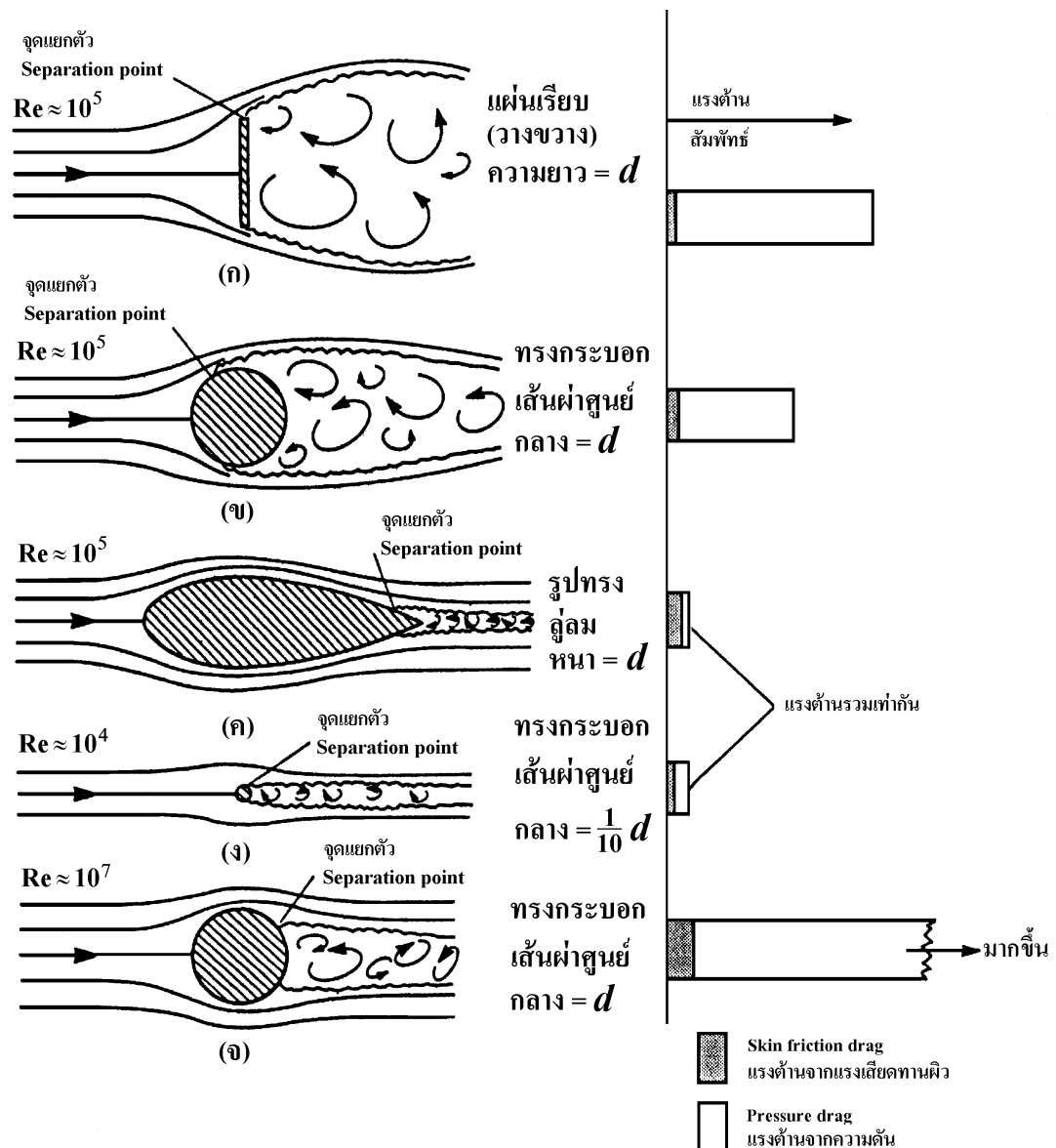
พื้นที่หน้าตัดขวางลมใหญ่กว่าถึง 10 เท่า การเปรียบเทียบนี้ทำให้เห็นความสำคัญของการลู่ลมในทางอากาศพลศาสตร์ได้เป็นอย่างดี

ข้อสังเกตสุดท้ายสำหรับค่าสัมประสิทธิ์แรงต้านบนรูปทรงต่างๆ อยู่ที่รูป 1.22 จ ซึ่งเป็นการไหลผ่านทรงกระบอกกลมที่ค่าเลขเรย์โนลด์ Re เพิ่มขึ้นเป็น 10^7 ในรูปนี้ค่าสัมประสิทธิ์แรงต้าน C_D ลดลงเหลือเท่ากับ 0.6 ซึ่งเป็นเพียงครึ่งหนึ่งของทรงกระบอกในรูป 1.22 ข และ ง ทำไมค่าสัมประสิทธิ์แรงต้านของทรงกระบอกจึงลดลงมากขนาดนั้นเมื่อค่า Re เพิ่มขึ้น คำตอบในเรื่องนี้อาจสังเกตได้จากรอยกระแสลวนด้านท้ายของทรงกระบอกในรูป 1.22 ข และ จ ที่มีความกว้างของรอยต่างกันจนเห็นได้ชัดหรืออาจกล่าวได้ว่ารูปแบบของการไหลรอบๆ ทรงกระบอกในรูป 1.22 ข และ จ เปลี่ยนไปเมื่อค่า Re เพิ่มขึ้น เราจะเข้าใจเหตุผลของเรื่องนี้ได้ชัดเจนเมื่อได้ศึกษาอากาศพลศาสตร์ของการไหลชนิดต่อไป อย่างไรก็ตามควรต้องตระหนักด้วยว่าถึงแม้ค่า C_D ของทรงกระบอกในรูป 1.22 จ จะน้อยกว่า C_D ของทรงกระบอกในรูป 1.22 ข แต่แรงต้านจริงบนทรงกระบอกในรูป 1.22 จ จะมากกว่าแรงต้านบนทรงกระบอกในรูป 1.22 ข หลายเท่า ผลลัพธ์อันนี้นักศึกษาสามารถคำนวณได้จากค่า C_D และ Re ของทรงกระบอกทั้งสอง

จากข้อมูลต่างๆ ในย่อหน้าที่ผ่านมามักทำให้เราเห็นแล้วว่าค่าสัมประสิทธิ์แรงต้านบนรูปทรงต่างๆ ขึ้นอยู่กับรูปร่างของวัตถุ และค่า Re ที่สำคัญคือค่าสัมประสิทธิ์แรงต้านบนรูปทรงต่างๆ จะมีค่าไม่คงที่สามารถเปลี่ยนแปลงได้หรือพูดให้เข้าใจง่ายคือค่าสัมประสิทธิ์แรงต้านบนรูปทรงต่างๆ ขึ้นอยู่กับสภาพการไหลรอบๆ ตัววัตถุ และ เชื่อมโยงไปถึงแรงต้านบนวัตถุผ่านสมการ 1.28b ถึงตอนนี้ขอให้สังเกตว่า C_D ที่อ้างอิงพื้นที่หน้าตัดขวางลมของรูปทรงอากาศพลศาสตร์ในรูป 1.22 มีค่าอยู่ระหว่างย่านที่สูงได้ถึง 2 และลงต่ำได้ถึง 0.12 ค่านี้คือค่า C_D โดยทั่วไปของ รูปทรงทางอากาศพลศาสตร์ต่างๆ

ข้อสังเกตอีกข้อหนึ่งคือค่าของเลขเรย์โนลด์ในรูป 1.22 ซึ่งถ้าพิจารณาทรงกระบอกกลมรัศมี 1 m ในกระแสมที่ระดับน้ำทะเลมาตรฐานความเร็ว 45 m/s (ประมาณ 160 กม./ชม.) กรณีนี้ค่าของเลขเรย์โนลด์ประมาณ 3.09×10^6 กว่าสามล้านเล็กน้อย ค่าของเลขเรย์โนลด์ในระดับเป็นล้านเป็นค่าทั่วไปสำหรับอากาศพลศาสตร์ประยุกต์ที่เกี่ยวข้องกับการบิน ดังนั้นค่าของเลขเรย์โนลด์ในรูป 1.22 จึงเป็นย่านที่เหมาะสมในการนำมาเปรียบเทียบกับปัญหาจริงทางปฏิบัติ

เมื่อพิจารณาลึกลงไปอีกถึงกลไกการเกิดแรงต้านบนรูปทรงในรูป 1.22 เพราะมุมปะทะเป็นศูนย์เราอาจใช้สมการ 1.23 คำนวณแรงต้านที่เกิดขึ้นได้



รูป 1.23 แสดงการเปรียบเทียบระหว่างแรงต้านจากความดันและแรงต้านจากแรงเสียดทานผิว

(Anderson, 2016)

พิจารณาสมการแรงต้านที่ประกอบขึ้นจากส่วนที่เกิดจากความดันรอบผิววัตถุและส่วนที่เกิดจากแรงเสียดทานผิว

$$D = A' = \int_{LE}^{TE} (-p_u \sin \theta + \tau_u \cos \theta) dS_u + \int_{LE}^{TE} (p_l \sin \theta + \tau_l \cos \theta) dS_l \quad (1.23)$$

แรงต้านจากความดัน แรงต้านจากแรงเสียดทานผิว

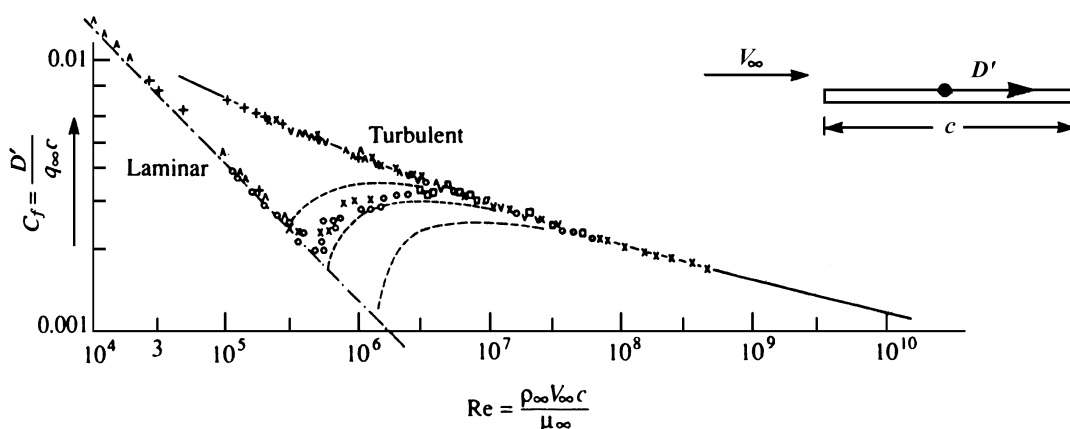
การแบ่งแรงต้านโดยรวมออกเป็นสองส่วนบ่อยครั้งช่วยให้การพิจารณาสะดวกขึ้น ยกตัวอย่างเช่นในรูป 1.23 แรงต้านบนรูปทรงต่างๆ ในรูป 1.22 ถูกนำมาแยกออกเป็นสองส่วนเปรียบเทียบกันระหว่างแรงต้านจากความดันและแรงต้านจากแรงเสียดทานที่ผิวด้วยกราฟแท่งทางขวามือของรูป ส่วนที่แรเงา

แสดงแรงต้านจากแรงเสียดทานที่ผิว ส่วนที่ไม่ระบายสีแสดงแรงต้านจากความดัน โดยที่ความหนาแน่นและความหนืดของกระแสมีค่าเท่ากันจากรูป 1.23 ก ถึง จ ส่วนความเร็วเปลี่ยนไปตามความจำเป็นเพื่อให้ได้ค่าเลขเรย์โนลด์ตามที่แสดง นั่นคือความเร็วกระแสในรูป 1.23 ก ข ค และ จ จะสูงกว่าในรูป 1.23 ง เพราะว่าแรงต้านคำนวณจากสมการ 1.28b ตามที่แสดงมาแล้ว แรงต้านในรูป 1.23 จ จึงมีค่าสูงมากเมื่อเทียบกับรูป 1.23 ข ส่วนแรงต้านในรูป 1.23 ค จะเท่ากับแรงต้านในรูป 1.23 ง ตามที่ได้เคยกล่าวมาแล้ว แต่ที่สำคัญและน่าสังเกตในรูปนี้คือสัดส่วนระหว่างแรงต้านจากความดันและแรงต้านจากแรงเสียดทานผิว แผ่นเรียบและทรงกระบอกในรูป 1.23 ก ข ง และ จ แรงต้านจะมาจากความดันเป็นส่วนใหญ่ในขณะที่แรงต้านบนรูปทรงกลมเกือบทั้งหมดมาจากแรงเสียดทานผิว การเปรียบเทียบนี้้นำเราไปสู่ข้อสรุปนิยามของรูปร่างทั่วไปทางอากาศพลศาสตร์ดังต่อไปนี้

รูปทรงต้านลม (Blunt body) = รูปทรงที่แรงต้านส่วนใหญ่มาจากความดัน

รูปทรงลู่ลม (Streamlined body) = รูปทรงที่แรงต้านส่วนใหญ่มาจากแรงเสียดทานผิว

ในรูปแผ่นเรียบวางขวางลมและทรงกระบอกแสดงลักษณะที่ชัดเจนของรูปทรงต้านลม แรงต้านจากความดันที่มีค่าสูงของรูปทรงต้านลมมาจากบริเวณด้านหลังของการไหลที่กระแสน้ำแยกตัวออกจากผิว ส่วนเหตุผลที่ว่าทำไมการแยกตัวจากผิวถึงก่อให้เกิดแรงต้านจะได้กล่าวในบทต่อไป และเพราะว่าแรงต้านจากความดันเป็นผลมาจากการแยกตัวจากผิวจึงเรียกแรงต้านส่วนนี้ว่า “แรงต้านจากความดันเนื่องจากการไหลแยกตัว” (Pressure drag due to flow separation) หรือบ่อยครั้งถูกเรียกว่า “Form drag”



รูป 1.24 แสดงการเปลี่ยนแปลงสัมประสิทธิ์แรงเสียดทานผิวสำหรับการไหลแบบลามินาร์และเทอร์บูเลนต์บนแผ่นเรียบกับค่า Re ที่อิงกับความยาวแผ่น

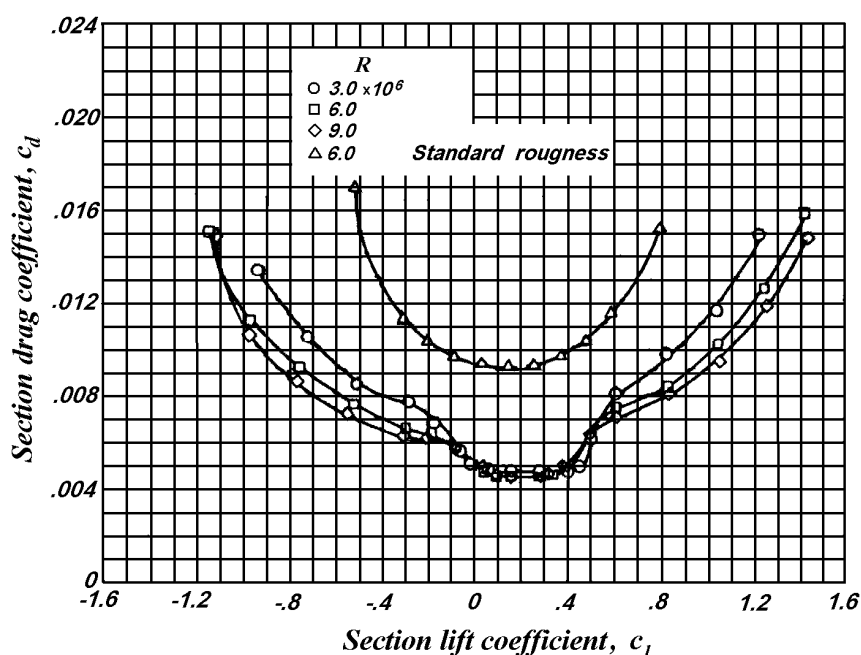
ที่นี้ลองมาสำรวจแรงต้านบนแผ่นเรียบที่วางขนานการไหลของกระแสอิสระตามรูป 1.24 ในกรณีนี้แรงต้านมาจากแรงเสียดทานผิวทั้งหมดไม่มีความดันมาเกี่ยวข้องเลย ถ้าสัมประสิทธิ์ของแรงเสียดทานผิวเป็น

$$c_f = \frac{D}{q_\infty S} = \frac{D}{q_\infty c(1)}$$

เมื่อ c คือความยาวคอร์ดและ S คือพื้นที่อ้างอิงคิดจากพื้นที่รูปสี่เหลี่ยม(planform area) หรือพื้นที่เมื่อมองมาจากด้านบนแผ่นเรียบ เส้นกราฟในรูปแสดงให้เห็นว่า

- (1) c_f มีการเปลี่ยนแปลงอย่างชัดเจนเมื่อ Re เปลี่ยน โดย c_f ลดลงเมื่อ Re เพิ่มขึ้น
- (2) ค่า c_f บนแผ่นเรียบขึ้นอยู่กับลักษณะของการไหลเหนือแผ่นเรียบซึ่งมีอยู่สองแบบ คือ ลามินาร์ และ เทอร์บูเลนต์ ถ้าลักษณะการไหลเหนือแผ่นเรียบเป็นแบบเทอร์บูเลนต์ ค่า c_f จะสูงกว่า c_f ของการไหลที่เป็นแบบลามินาร์ที่ Re เดียวกัน (การไหลแบบลามินาร์และเทอร์บูเลนต์จะศึกษาในบทต่อไป)
- (3) ขนาดของ c_f จะมีค่าอยู่ระหว่าง 0.001 ถึง 0.01 ในช่วงค่า Re ที่กว้าง ค่าของ c_f จะเห็นว่ามันน้อยเมื่อเทียบกับค่า C_D ของรูปทรงในรูป 1.22

แผ่นเรียบไม่เหมาะสมที่จะนำมาใช้ในงานอากาศยาน(เช่นใช้เป็นหน้าตัดของปีกเพื่อสร้างแรงยก)ในทางปฏิบัติแม้จะมีค่า c_f ต่ำก็ตาม เพราะคงนึกภาพได้ว่าเมื่อเริ่มมีมุมปะทะ (เพื่อ



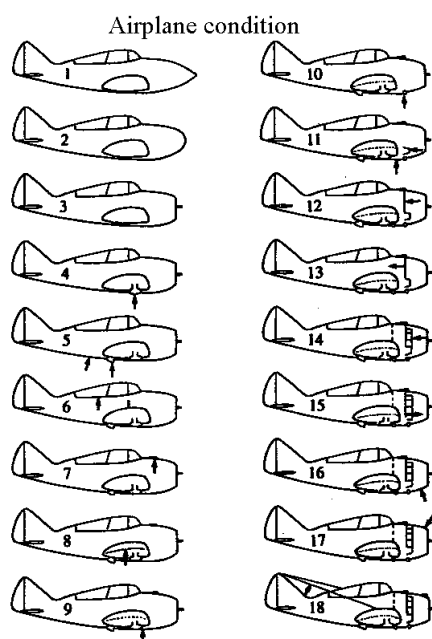
รูป 1.25 แสดงการแปรค่าของสัมประสิทธิ์แรงต้านของแพนอากาศ NACA 63 – 210

(Abbott & von Doenhoff, 1959)

สร้างแรงยก) สภาพในรูป 1.22 ก จะเกิดขึ้นนอกจากนี้แผ่นเรียบยังไม่มีปริมาตรที่จะบรรจุโครงสร้างไว้ภายใน แต่ถ้าเราพิจารณารูปทรงที่มีความหนาบ้างแต่ลู่ลมคล้ายรูป 1.22 ค เช่น หน้าตัดแพนอากาศ NACA 63 – 210 ตามรูป 1.25 การเปลี่ยนแปลงของสัมประสิทธิ์แรงต้านกับสัมประสิทธิ์แรงยก (หรือมุมปะทะ) ของ NACA 63 – 210 แสดงเป็นกราฟ ในที่นี้ c_d กำหนดโดย

$$c_d = \frac{D'}{q_\infty c}$$

เมื่อ D' คือแรงต้านต่อหน่วยความยาวปีก (Span) และ c คือความยาวคอร์ด จากกราฟค่าต่ำสุดของ c_d ประมาณ 0.0045 และมีลักษณะเป็นรูปตะกร้าในช่วงกลางซึ่งตรงกับมุมปะทะประมาณ $0^\circ - 2^\circ$ แพนอากาศ NACA 63 – 210 อยู่ในตระกูลที่เรียกว่า “laminar flow airfoil” คือตระกูลที่รูปร่างแพนอากาศออกแบบมาให้กระแสอากาศไหลเรียบผิวไปแบบลามินาร์ ลักษณะการไหลนี้จะเสียไปเมื่อมุมปะทะเปลี่ยนจาก 0° ไปมากๆ (แพนอากาศเริ่มตั้งขวางลม) สังเกตว่าในกราฟค่า c_d จะเพิ่มขึ้นทันทีทันใดเมื่อมุมปะทะเพิ่มขึ้นหรือลดลงจนถึงค่าหนึ่ง เพราะว่าการไหลเรียบผิวเปลี่ยนจากลามินาร์เป็นเทอร์บูเลนต์ ขอให้สังเกตว่าผลการทดลองทำที่ค่า Re ประมาณ $3 \sim 9 \times 10^6$ เหมือนกับรูปทรงลู่ลมในรูป 1.22 ค ที่แรงต้านส่วนใหญ่เป็นแรงต้านจากแรงเสียดทานผิว แต่เมื่อมุมปะทะเพิ่มขึ้นการไหลแยกตัวจากผิวบนของแพนอากาศจะเริ่มปรากฏทำให้แรงต้านจากความดัน (Form drag) เริ่มเพิ่มขึ้น อันนี้เองที่ทำให้ c_d เพิ่มขึ้นเมื่อมุมปะทะเพิ่มขึ้น

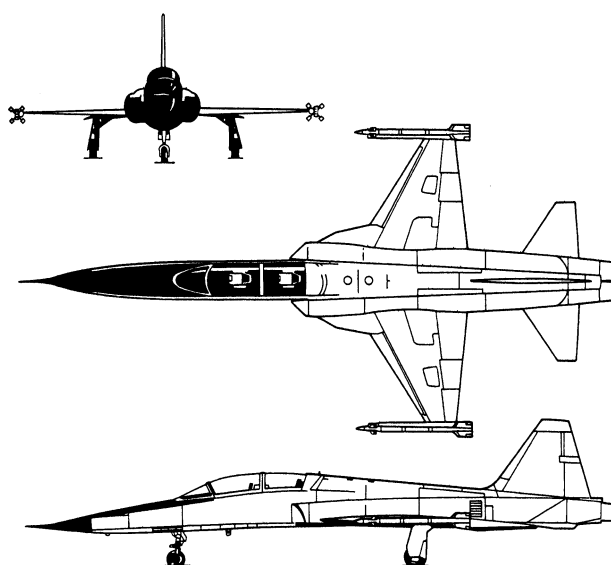


Condition number	Description	C_D ($C_L = 0.15$)	ΔC_D	ΔC_D , % ^a
1	Completely faired condition, long nose fairing	0.0166		
2	Completely faired condition, blunt nose fairing	0.0169		
3	Original cowling added, no airflow through cowling	0.0186	0.0020	12.0
4	Landing-gear seals and fairing removed	0.0188	0.0002	1.2
5	Oil cooler installed	0.0205	0.0017	10.2
6	Canopy fairing removed	0.0203	-0.0002	-1.2
7	Carburetor air scoop added	0.0209	0.0006	3.6
8	Sanded walkway added	0.0216	0.0007	4.2
9	Ejector chute added	0.0219	0.0003	1.8
10	Exhaust stacks added	0.0225	0.0006	3.6
11	Intercooler added	0.0236	0.0011	6.6
12	Cowling exit opened	0.0247	0.0011	6.6
13	Accessory exit opened	0.0252	0.0005	3.0
14	Cowling fairing and seals removed	0.0261	0.0009	5.4
15	Cockpit ventilator opened	0.0262	0.0001	0.6
16	Cowling venturi installed	0.0264	0.0002	1.2
17	Blast tubes added	0.0267	0.0003	1.8
18	Antenna installed	0.0275	0.0008	4.8
Total			0.0109	

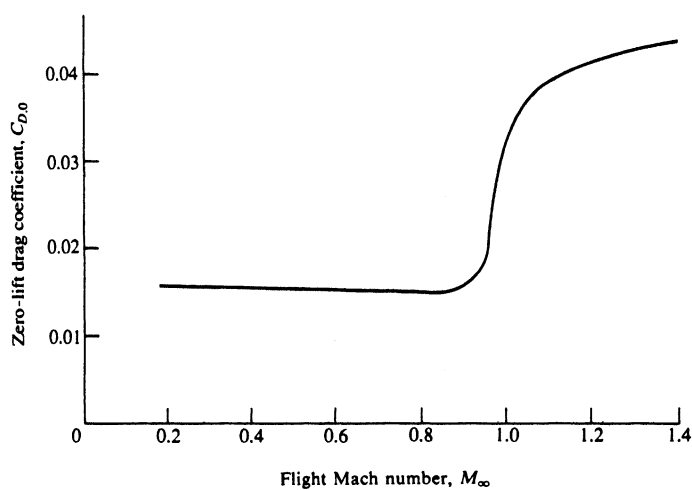
^a Percentages based on completely faired condition with long nose fairing.

รูป 1.26 ส่วนย่อยของแรงต้านจากแหล่งต่างๆ ของเครื่องบิน P-35 (Anderson, 2016)

ลองพิจารณาเครื่องบินทั้งลำในรูป 1.26 ในรูปเป็นเครื่อง P-35 ซึ่งเป็นเครื่องบินขับไล่ในช่วงก่อนสงครามโลกครั้งที่สองแสดงรายละเอียดของแรงต้านจากส่วนย่อยที่เพิ่มขึ้นทีละส่วนจากรูปแรกที่เป็นรูปร่างหมดจดตรงในการออกแบบขั้นต้นซึ่งทุกส่วนมีความลู่ลมจะเห็นว่าค่า C_D (วัดที่มุมปะทะที่มีค่า C_L 0.15) มีค่าต่ำเพียง 0.0166 โดยที่ $C_D = \frac{D}{q_\infty S}$ เมื่อ D คือแรงต้าน และ S เป็นพื้นที่ปีก(Wing planform area) แรงต้านที่เพิ่มขึ้นทีละส่วนในรูป 2 ถึง 18 สำหรับส่วนประกอบของ อากาศยานเพื่อการบินจริงแสดงในตารางด้านข้าง สังเกตว่า C_D มีค่าเพิ่มขึ้นถึง 65% จากเดิมจนมีค่าถึง 0.0275 ซึ่งเป็นค่าปกติของอากาศยานแบบนี้

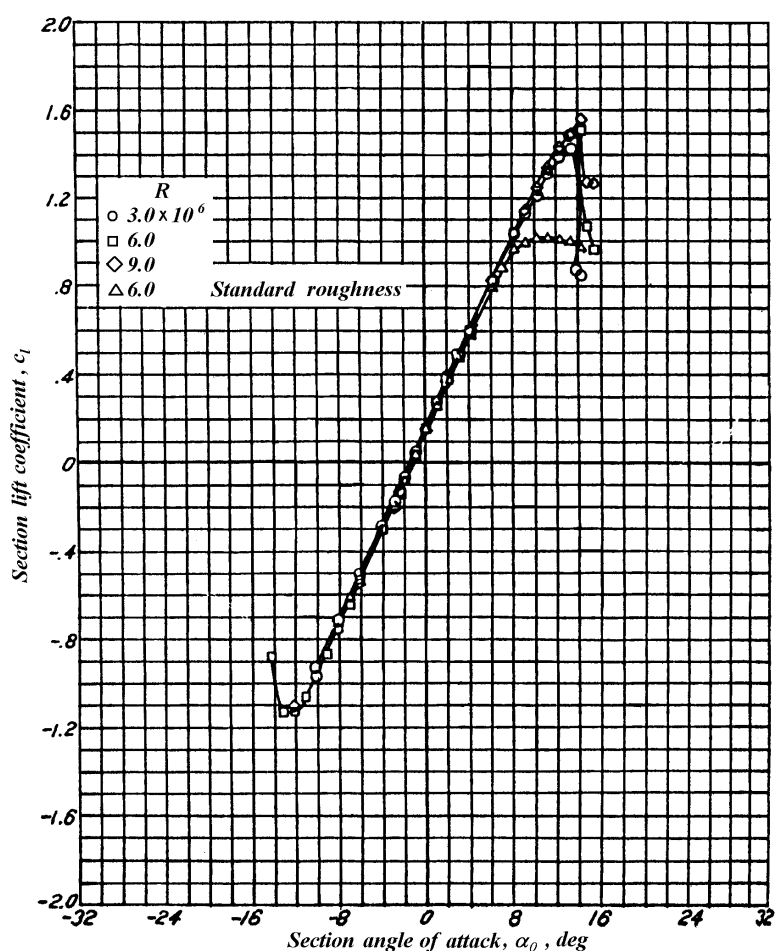


ภาพ 3 วิว ของเครื่องบินฝึกไอพ่น Northrop T-38



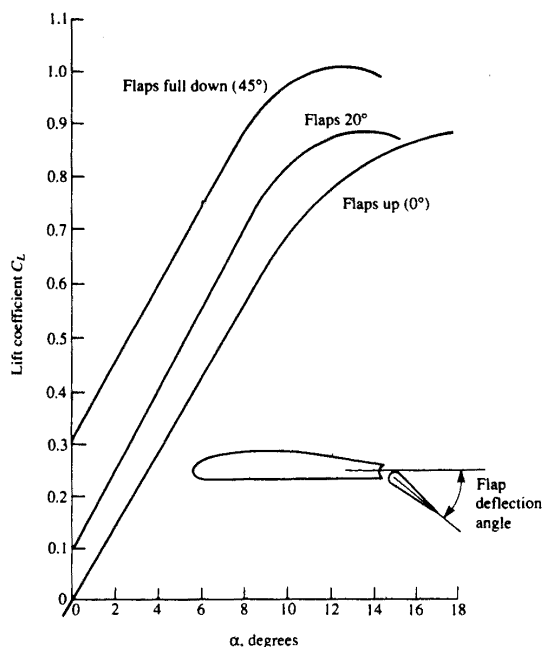
รูป 1.27 ผลของเลขมัคกับสัมประสิทธิ์แรงต้านของเครื่องบิน T-38 (Anderson, 2016)

ถึงตรงนี้อ่าสัมประสิทธิ์แรงต้านของรูปทรงต่างๆ รวมทั้งอากาศยาน ได้นำมาอย่างเป็นตัวอย่างให้เห็นในย่านความเร็วต่ำกว่าเสียง ในบางตัวอย่างเราได้แสดงผลของ Re ที่มีต่อ C_D แต่อิทธิพลของเลขมัค M ที่มีต่อ C_D ยังไม่ได้กล่าวถึงเลย ถ้าความเร็วกระแสน้ำสูงจนผลกระทบจากการอัดตัวเกิดขึ้นมากจะเกิดอะไรขึ้นกับ C_D เราศึกษาเรื่องนี้ได้จากรูป 1.27 ในรูปเป็นภาพของอากาศยาน T-38A และกราฟสัมประสิทธิ์แรงต้านกับเลขมัคในช่วงจากความเร็วต่ำถึงความเร็วเหนือเสียง อากาศยานอยู่ในมุมปะทะที่ให้แรงยกเป็นศูนย์ ดังนั้นจึงเรียก C_D ที่วัดได้ว่าสัมประสิทธิ์แรงต้านที่แรงยกเป็นศูนย์ (Zero-lift drag coefficient) สังเกตว่า C_D เกือบคงที่จาก M 0.1 ถึงประมาณ M 0.86 หลังจากนั้นค่า C_D จะเพิ่มขึ้นทันที ซึ่งเป็นผลมาจากการก่อตัวของคลื่นกระแทกและแรงต้านจากคลื่น (Wave drag) และเป็นผลที่เกิดกับอากาศยานทุกลำเมื่อบินใกล้ความเร็วเสียง จะเห็นว่าค่า C_D ที่ความเร็วต่ำไม่มีผลกระทบของ M มาเกี่ยวข้อง แต่เมื่อเข้าสู่ย่านความเร็วเสียง M จะเป็นตัวแปรสำคัญที่มีผลต่อการเกิดแรงต้าน กราฟค่า C_D ในช่วงความเร็วต่ำอยู่ที่ประมาณ 0.015 ซึ่งต่ำกว่า P-35 มาก ซึ่งเป็นผลจากรูปร่างที่ลู่ลมกว่ามากนั่นเอง



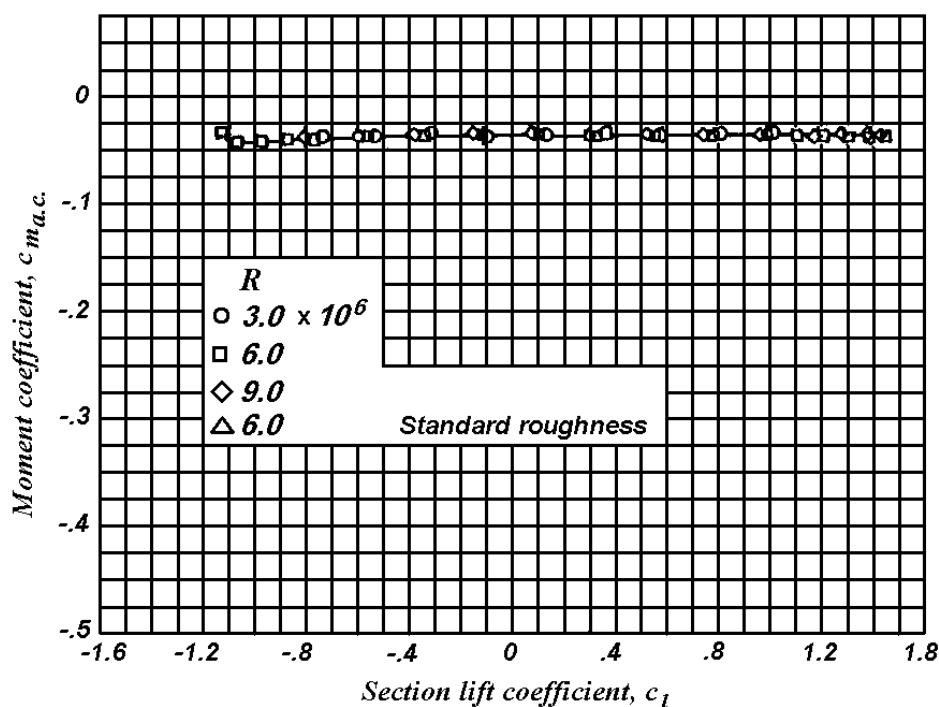
รูป 1.28 การแปรค่าสัมประสิทธิ์แรงยกกับมุมปะทะของ NACA 63 – 210

ลองเปลี่ยนความสนใจไปที่สัมประสิทธิ์แรงยกบ้างว่าโดยทั่วไปจะมีลักษณะเป็นอย่างไรเราลองพิจารณาการเปลี่ยนแปลงสัมประสิทธิ์แรงยกกับมุมปะทะในรูป 1.28 ซึ่งเป็นของแผนอากาศชนิดเดียวกับข้อมูลแรงต้านในรูป 1.25 ในกราฟจะเห็นว่า c_l เปลี่ยนแปลงเป็นเส้นตรงกับมุมปะทะ α จนถึงค่าสูงสุดที่ α ประมาณ 14° หลังจากนั้นจะตกลงอย่างชัดเจน ทำไม c_l จึงมีการเปลี่ยนแปลงเป็นเส้นตรง อะไรเป็นสาเหตุของการตกลงอย่างฉับพลันของโค้งแรงยกที่มุม 14° คำถามเหล่านี้จะมีคำตอบในบทต่อไป สำหรับความมุ่งหมายในตอนนี้อย่างเดียวแต่ต้องการให้สังเกตค่าของ c_l ที่มีค่าจากประมาณ -1 ที่มุมปะทะ -12° ถึงค่าสูงสุด 1.5 ที่มุมปะทะ 14° ทำให้สำหรับแผนอากาศ NACA 63-210 สัดส่วนของค่า c_l จะสูงกว่าค่า c_d เป็นร้อยเท่า ซึ่งเป็นลักษณะพื้นฐานสำคัญทางอากาศพลศาสตร์ของรูปแผนอากาศทั่วไป อัตราส่วนแรงยกต่อแรงต้าน (lift to drag ratio) ที่เรียกอัตราส่วน L/D นี้มีส่วนสัมพันธ์โดยตรงกับสมรรถนะการบินของอากาศยานหลายด้าน หรือกล่าวได้ว่าค่า L/D สูงขึ้นเท่าใดสมรรถนะจะดีขึ้นเท่านั้น สำหรับแผนอากาศที่หน้าที่หลักคือการสร้างแรงยกโดยทำให้เกิดแรงต้านต่ำที่สุดเท่าที่จะเป็นไปได้ ค่านี้จะต้องสูง ตัวอย่างเช่นกราฟแรงยกและแรงต้านของแผนอากาศ NACA 63-210 ในรูป 1.25 และ 1.28 ที่มุมปะทะ 4° c_l มีค่าประมาณ 0.6 และ c_d มีค่าประมาณ 0.0046 ทำให้ค่า L/D สูงถึง 130 ซึ่งจะเห็นกันต่อไปว่าสูงกว่าของอากาศยานมาก



รูป 1.29 การแปรค่าสัมประสิทธิ์แรงยกกับมุมปะทะของ บ. T-38 ที่มุมแฟลปต่างกัน 3 มุม (Bertin & Cummings, 2025)

สำหรับอากาศยานทั้งลำรูป 1.29 แสดงกราฟการเปลี่ยนแปลงของ C_L กับมุมปะทะ α ของเครื่องบิน T-38 ในรูป 1.27 ในกราฟมีเส้นโค้งสามเส้นแต่ละเส้นแสดงการเปลี่ยนแปลงค่า C_L เมื่อใช้มุมแฟลปต่างกัน (แฟลป, flap, ส่วนปลายของปีกหรือแพนอากาศซึ่งเมื่อหักลงเป็นมุมจะทำให้แรงยกเพิ่มขึ้น) สังเกตว่าที่มุมปะทะอันหนึ่งการเพิ่มมุมแฟลปทำให้แรงยกเพิ่มขึ้น ค่าของ C_L ในรูป 1.29 มีค่าใกล้เคียงของแพนอากาศคืออยู่ที่ประมาณ 1 แต่ค่า L/D สูงสุดของ T-38 จะมีค่าเพียงประมาณ 10 ต่ำกว่าแพนอากาศมาก เพราะว่าส่วนอื่นของอากาศยานนอกจากปีกเช่น ลำตัว กะเปาะเครื่องยนต์ ฯลฯ ซึ่งมีหน้าที่อื่น ๆ ที่ไม่ใช่การสร้างแรงยก และแน่นอนว่าส่วนต่างๆ เหล่านี้จะทำให้เกิดแรงยกเพียงเล็กน้อย แต่เป็นส่วนที่ทำให้เกิดแรงต้านเพิ่มขึ้นอย่างมาก นอกจากนี้ปีกอากาศยานจะพบกับแรงต้านจากความดันที่สูงกว่าของแพนอากาศมากเนื่องจากผลของกระแสอากาศววนที่ปลายปีกที่เรียก “แรงต้านเหนียวน้ำ” และสำหรับปีกที่สั้น กว้าง อย่างของ T-38 แรงต้านเหนียวน้ำนี้จะยังมีค่าสูง(บทที่ 5 เราจะพูดถึงแรงต้านเหนียวน้ำโดยละเอียด) ผลคือ L/D ของ T-38 จะมีค่าต่ำ ซึ่งเป็นเช่นเดียวกันกับอากาศยานทั่วไป ตัวอย่างเช่น สำหรับเครื่องบินทิ้งระเบิด B-52 ค่า L/D จะอยู่ที่ประมาณ 21.5 ถึงแม้จะสูงพอสมควร แต่ก็น้อยมากเมื่อเทียบกับค่า L/D ของแพนอากาศ



รูป 1.30 การแปรค่าสัมประสิทธิ์โมเมนต์กับมุมปะทะของ NACA 63 - 210

(Abbott & von Doenhoff, 1959)

นอกจากสัมประสิทธิ์ของแรงยกและแรงต้านแล้วลักษณะทางอากาศพลศาสตร์ที่สำคัญอีกอย่างหนึ่งของรูปทรงต่างๆ ก็คือการเปลี่ยนแปลงของสัมประสิทธิ์โมเมนต์ ในรูป 1.30 สัมประสิทธิ์

โมเมนต์ที่ $1/4$ คอร์ด, $c_{m,c/4}$, ของแผนอากาศ NACA 63 - 210 ถูกนำมาแสดงคู่กับมุมปะทะ โดยการวาดกราฟ สังเกตว่าค่า $c_{m,c/4}$ เป็นลบเล็กน้อยนั่นคือเป็นโมเมนต์ที่พยายามบิดให้มุมปะทะของแผนอากาศลดลง หรือปีกหวัลง และมีค่าอยู่ในระดับ -0.035 ซึ่ง c_m ที่เป็นลบเล็กน้อยเป็นลักษณะทั่วไปของแผนอากาศที่มีความโค้งเป็นบวก ขอให้สังเกตด้วยว่าต่างจากสัมประสิทธิ์ของแรงยกและแรงต้านที่มีการเปลี่ยนแปลงกับมุมปะทะ สัมประสิทธิ์โมเมนต์ที่ $1/4$ คอร์ด ของ NACA 63 - 210 จะมีค่าเกือบคงที่ตลอดช่วงมุมปะทะที่แสดงในกราฟ คำถามที่น่าสนใจคือลักษณะพิเศษนี้จะเกิดขึ้นกับรูปทรงอื่นหรือไม่ หรือจะเกิดขึ้นกับตำแหน่งวัดโมเมนต์อื่นหรือเปล่า ถ้าวัดค่าสัมประสิทธิ์ -0.035 น้อยมากจนอาจไม่ส่งผลใดๆ ทางอากาศพลศาสตร์ได้ไหม

จะเห็นว่าการพิจารณาสัมประสิทธิ์ของแรงและโมเมนต์ที่ผ่านมามีคำถามเกิดขึ้นมากมาย คำตอบของคำถามเหล่านี้ยังไม่อาจอธิบายให้ละเอียดได้ในขั้นนี้ แต่เนื้อหาในบทต่อไปจะได้เพิ่มข้อมูลที่ใช้อธิบายคำถามเหล่านี้ขึ้นทีละขั้นตอน ขอให้จดจำถึงค่าสัมประสิทธิ์ต่างๆ ที่ได้อภิปรายมา สิ่งนี้จะเป็นพื้นฐานที่ดีสำหรับเนื้อหาของในบทต่อไป

นอกจากนี้ ความรู้ที่ได้รับในบทนี้ และบทต่อ ๆ ไป ยังสามารถนำไปต่อยอดการวิจัย หรือนำไปประยุกต์ใช้ในด้านต่างๆ โดยผู้เรียบเรียงได้นำความรู้ในศาสตร์นี้ ไปทำวิจัยเพื่อเป็นประโยชน์ต่อกองทัพอากาศ และประเทศ ไม่ว่าจะเป็น งานวิจัยการวิเคราะห์หาค่าคุณลักษณะเฉพาะทางอากาศพลศาสตร์ของอากาศยานไร้คนขับพลังงานแสงอาทิตย์สมรรถนะสูง เพดานบินต่ำ M Solar-X โดยใช้อุโมงค์ลมความเร็วต่ำกว่าเสียง (กนก และคณะ, 2569), การวิเคราะห์หาค่าคุณลักษณะเฉพาะทางอากาศพลศาสตร์ของอากาศยานไร้คนขับขนาดเล็กแบบไร้หาง โดยใช้อุโมงค์ลมความเร็วต่ำกว่าเสียง (วันชัย, กนก และ คมกริช, 2561), และ การออกแบบและวิเคราะห์คุณลักษณะทางอากาศพลศาสตร์ของอากาศยานไร้คนขับยุทธวิธีระยะประชิด (วันชัย, กนก และคณะ, 2563) ซึ่งงานวิจัยดังกล่าว เป็นส่วนหนึ่งของการนำไปสู่การผลิตอากาศยานไร้คนขับที่ได้มาตรฐาน และเป็น การขับเคลื่อนเทคโนโลยีป้องกันประเทศ ตามยุทธศาสตร์กองทัพอากาศ 20 ปี (พ.ศ.2561 – 2580) ฉบับปรับปรุง พ.ศ.2568 เพื่อการพึ่งพาตนเอง

แบบฝึกหัดบทที่ 1

1. จงคำนวณความหนาแน่นของอากาศขณะไหลผ่านปีกอากาศยานตรงจุดที่ความดันและอุณหภูมิเป็น $1.9 \times 10^4 \text{ N/m}^2$ และ 203 K
2. ในอุโมงค์ลมความเร็วเหนือเสียงวัดค่าความดันและความหนาแน่นอากาศบริเวณส่วนท่อดึงได้ 1058 lb/ft^2 และ $1.23 \times 10^{-3} \text{ slug/ft}^3$ จงคำนวณอุณหภูมิของอากาศ
3. แผ่นเรียบกว้างมากยาวคอร์ต c และตั้งอยู่ที่มุมปะทะ α กับกระแสลมความเร็วเหนือเสียง พบว่าความดันอากาศตามผิวบนและผิวล่างมีค่าคงที่ $P_u(S) = C_1$ และ $P_l(S) = C_2$ เมื่อ C_1 และ C_2 เป็นค่าคงที่และ $C_2 > C_1$ ถ้าไม่คิดแรงเฉือน จงคำนวณตำแหน่งของจุดศูนย์ความดัน
4. แผ่นเรียบบางยาวคอร์ต 1 m ทำมุมปะทะ 10° กับกระแสลมความเร็วเหนือเสียง ถ้าความดันและความเครียดเฉือนตามผิวบนและผิวล่างเป็น $P_u = 4 \times 10^4 (x - 1)^2 + 5.4 \times 10^4$; $P_l = 2 \times 10^4 (x - 1)^2 + 1.73 \times 10^5$; $\tau_u = 288 x^{-0.2}$; $\tau_l = 731 x^{-0.2}$ เมื่อ x เป็นระยะวัดจากชายหน้าลงมาตามแผ่นเป็นเมตร และ P กับ τ เป็น N/m^2 จงคำนวณแรงตั้งฉากและแรงตามแกน แรกยกและแรงต้าน โมเมนต์รอบชายหน้าและโมเมนต์รอบ $1/4$ คอร์ต ต่อความกว้างแผ่น 1 หน่วย และคำนวณหาตำแหน่งจุดศูนย์ความดัน
5. แพนอากาศมีมุมปะทะ 12° มีสัมประสิทธิ์แรงตั้งฉากและแรงตามแกน 1.2 และ 0.03 ตามลำดับ จงคำนวณสัมประสิทธิ์แรงยกและแรงต้าน
6. การทดลองแพนอากาศ NACA 2412 ในอุโมงค์ลมได้ผลเป็นแรงและโมเมนต์รอบ $1/4$ คอร์ตที่มุมปะทะต่างดังข้อมูลข้างล่าง จงเขียนกราฟแสดงการเปลี่ยนแปลงของ x_{cp}/c กับ α

α	C_l	C_d	$C_{m,c/4}$
-2	0.05	0.006	-0.042
0	0.25	0.006	-0.040
2	0.44	0.006	-0.038
4	0.64	0.007	-0.036
6	0.85	0.0075	-0.036
8	1.08	0.0092	-0.036
10	1.26	0.0115	-0.034
12	1.43	0.015	-0.03
14	1.56	0.0186	-0.025

7. แรงต้านบนท้องเรือ (Hull) ขึ้นอยู่กับขนาดความสูงของคลื่นที่เกิดจากท้องเรือ พลังงานศักย์ของคลื่นที่เกิดขึ้นเปลี่ยนแปลงกับความโน้มถ่วง g ของโลกดังนั้นจึงอาจกล่าวได้ว่าแรงต้านจากคลื่น (Wave drag) บนท้องเรือ $D = f(\rho_\infty, V_\infty, c, g)$ เมื่อ c เป็นสัดส่วนอ้างอิงของท้องเรือ เช่น ความกว้างสุดของท้องเรือ ถ้ากำหนดสัมประสิทธิ์แรงต้าน $C_D = \frac{D}{\rho_\infty c^2}$ และกำหนดตัวแปรความคล้ายคลึง (Similarity) เรียก Froude Number $Fr = \frac{V}{\sqrt{gc}}$ จึงใช้ทฤษฎีบทกึ่งแฮมพายพิสูจน์ว่า $C_D = f(Fr)$
8. คลื่นกระแทก (Shock wave) บนอากาศยานความเร็วเหนือเสียงทำให้เกิดแรงต้าน Supersonic wave, D_w กำหนดให้ $C_{D,w} = \frac{D_w}{\rho_\infty S}$ เมื่อ S เป็นพื้นที่อ้างอิง ในการบินความเร็วเหนือเสียงการไหลถูกกำกับบางส่วนจากคุณสมบัติทางเทอร์โมไดนามิกส์ เช่น ความร้อนจำเพาะที่ความดันคงที่ c_p และความร้อนจำเพาะที่ปริมาตรคงที่ c_v กำหนดสัดส่วน $\gamma = \frac{c_p}{c_v}$ ให้ใช้การวิเคราะห์มิติแสดงว่า $C_D = f(M_\infty, \gamma)$
9. พิจารณาการไหลผ่านแพนอากาศสองอันที่มีรูปทรงคล้ายคลึงกัน (Geometric similarity) แพนอากาศอันหนึ่งมีขนาดเป็นสองเท่าของอีกอันหนึ่ง การไหลผ่านแพนอากาศอันเล็กมีคุณสมบัติกระแสวิสเซอร์เป็น $T = 200 \text{ K}$ $\rho_\infty = 1.23 \text{ kg/m}^3$ $V_\infty = 100 \text{ m/s}$ การไหลผ่านแพนอากาศอันใหญ่มีคุณสมบัติกระแสวิสเซอร์เป็น $T = 800 \text{ K}$ $\rho_\infty = 1.739 \text{ kg/m}^3$ $V_\infty = 200 \text{ m/s}$ จงแสดงว่าการไหลทั้งสองคล้ายคลึงกันทางพลศาสตร์
10. เครื่องบิน Lear jet ทำการบินด้วยความเร็ว 250 m/s ที่ความสูง 10 km คุณสมบัติกระแสวิสเซอร์เป็น $T = 233 \text{ K}$ $\rho_\infty = 0.414 \text{ kg/m}^3$ แบบจำลองขนาด 1:5 ของเครื่องบินนี้ถูกนำมาทดสอบในอุโมงค์ลมซึ่งภายในส่วนทดลอง (Test section) มีความดันบรรยากาศ $1.01 \times 10^5 \text{ N/m}^2$ จงคำนวณความเร็ว อุณหภูมิ และความหนาแน่น ของกระแสอากาศในส่วนทดลองของอุโมงค์ลมที่จำเป็นในการทดลองที่ทำให้สัมประสิทธิ์แรงยกและแรงต้านเป็นค่าเดียวกับการบินจริง
11. มาโนมิเตอร์หลอดแก้วบรรจุปรอทเพื่อใช้วัดความดันจากจุดบนปีกของหุ่นจำลองอากาศยานในอุโมงค์ลมโดยปลายข้างหนึ่งต่อกับจุดที่จะวัดความดัน ปลายอีกข้างเปิดสู่บรรยากาศซึ่งมีความดันและความหนาแน่น $1.01 \times 10^5 \text{ N/m}^2$ และ $1.36 \times 10^4 \text{ kg/m}^3$ ถ้าระดับปรอทต่างกัน 20 cm โดยข้างที่ต่อกับปีกสูงกว่า จงหาความดันที่ปีก
12. พิจารณาทรงกระบอกกลมวางขวางการไหลแบบ Hypersonic ให้ ϕ เป็นมุมของรัศมีที่วัดระหว่างขายหน้าถึงจุดใดๆบนผิว การแจกแจงความดันรอบทรงกระบอกกำหนดโดยสมการ
- $$c_p = 2 \cos^2 \phi \quad \text{สำหรับ } 0 \leq \phi \leq \pi/2 \quad \text{และ} \quad 3\pi/2 \leq \phi \leq 2\pi$$
- และ $c_p = 0$ สำหรับ $\pi/2 \leq \phi \leq 3\pi/2$
- จงคำนวณสัมประสิทธิ์แรงต้านสำหรับทรงกระบอก โดยใช้พื้นที่หน้าตัดขวางกลมเป็นพื้นที่อ้างอิง

บทที่ 2

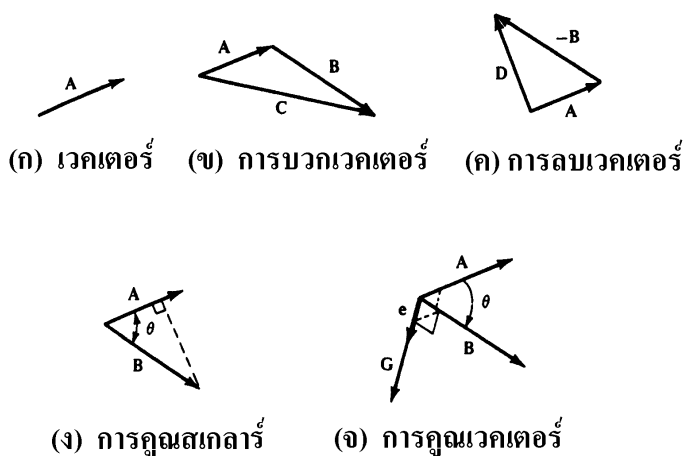
หลักการพื้นฐานและสมการ

2.1 ความนำ

เหมือนกับที่ช่างไม้ฝีมือดีต้องมีเครื่องมือที่ดีและรู้จักใช้เครื่องมือเหล่านั้นอย่างเหมาะสมนักอากาศพลศาสตร์ที่ดีก็ต้องการเครื่องมือทางอากาศพลศาสตร์ที่ดีและต้องรู้จักใช้เครื่องมือเหล่านี้ประยุกต์กับงานด้านต่างๆอย่างถูกต้องเช่นกัน เครื่องมือทางอากาศพลศาสตร์ที่วันนี้สร้างขึ้นจากกฎพื้นฐานของธรรมชาติและสมการทางคณิตศาสตร์ซึ่งส่วนใหญ่ได้เคยศึกษามาแล้วจากวิชากลศาสตร์ของไหลเนื้อหาในบทนี้จึงเกี่ยวข้องกับการพัฒนาแนวคิดและสมการที่มีความสำคัญยิ่งกับการศึกษาการไหลในแง่อากาศพลศาสตร์ที่จะต้องนำไปใช้ในการวิเคราะห์และทำความเข้าใจปัญหา ในการศึกษาแนวคิดและสมการต่างๆเพื่อนำมาใช้สร้างเครื่องมือนี้นักเรียนอาจเกิดความประหลาดใจและสงสัยว่าเครื่องมือที่สร้างขึ้นจะมีประโยชน์อะไรและจะนำไปใช้งานอย่างไรจึงจะให้คำตอบที่สมเหตุสมผลในทางปฏิบัติ จึงอยากเน้นไว้ก่อนว่าในบทนี้เราเพียงแต่ใช้กฎเกณฑ์และสมการมาสร้างเครื่องมือทางอากาศพลศาสตร์ซึ่งแต่ละตัวดูจะมีเนื้อหาไม่ปะติดปะต่อกัน แต่ว่าแต่ละตัวจะมีความสำคัญสำหรับการวิเคราะห์และการทำความเข้าใจปัญหาที่จะนำมาพิจารณาถกแถลงในบทต่อไปแน่นอน ดังนั้นจึงขอให้นักเรียนจดจำทำความเข้าใจเครื่องมือแต่ละตัวไว้ก่อนเพื่อนำมาใช้ได้ในภายหลัง เนื่องจากอากาศพลศาสตร์เกี่ยวข้องกับปริมาณหลายตัวที่มีทั้งขนาดและทิศทาง เช่น แรง และ ความเร็ว ปริมาณพวกนี้เป็นปริมาณเวกเตอร์ ดังนั้นคณิตศาสตร์ที่นำมาใช้ในอากาศพลศาสตร์จะง่ายขึ้นเมื่อแสดงในรูปของเวกเตอร์ ความสัมพันธ์พื้นฐานของเวกเตอร์ที่สำคัญ คือพีชคณิตของเวกเตอร์ (Vector algebra) และ แคลคูลัสของเวกเตอร์ (Vector calculus) ควรศึกษาทบทวนรายละเอียดจากตำราคณิตศาสตร์ของเวกเตอร์เพราะการศึกษาแนวคิดและสมการที่จะกล่าวถึงต่อไปจำเป็นต้องอาศัยความสัมพันธ์ของเวกเตอร์เหล่านี้เป็นอย่างมากเพื่อให้เกิดความเข้าใจ

2.2 ทบทวนพีชคณิตของเวกเตอร์ (Review of Vector Algebra)

ปริมาณเวกเตอร์ $\vec{A}$ ใดๆ มีขนาดและทิศทางที่แทนด้วยเส้นลูกศรในรูป 2.1ก ขนาดของ $\vec{A}$ คือ $|\vec{A}|$ เป็นปริมาณสเกลาร์ (Scalar) ที่แทนด้วยความยาวของเส้นลูกศร หน่วยเวกเตอร์ (Unit vector) $\hat{n}$ กำหนดโดย $\hat{n} = \frac{\vec{A}}{|\vec{A}|}$ เป็นเวกเตอร์ที่มีขนาดหนึ่งหน่วยและมีทิศทางชี้ไปทางเดียวกับ $\vec{A}$



รูป 2.1 แผนภูมิเวกเตอร์ (Anderson, 2016)

ถ้าให้ $\vec{B}$ เป็นเวกเตอร์อีกตัวหนึ่งผลรวมของเวกเตอร์ $\vec{A}$ และ $\vec{B}$ จะได้เป็นเวกเตอร์ $\vec{C}$

$$\vec{A} + \vec{B} = \vec{C} \quad (2.1)$$

ซึ่งสร้างขึ้นโดยใช้กฎสี่เหลี่ยมด้านขนานหรือการต่อปลายลูกศรของ $\vec{A}$ กับโคนของ $\vec{B}$ ตามที่แสดงในรูป 2.1 ข ต่อไปพิจารณาเวกเตอร์ $-\vec{B}$ ซึ่งมีขนาดเท่ากับ $\vec{B}$ แต่มีทิศทางตรงข้ามกัน (ในรูปจะเป็นลูกศรที่ปลายชี้ไปในทิศตรงข้ามกัน) ผลลบของเวกเตอร์ $\vec{A}$ และ $\vec{B}$ จะได้เวกเตอร์ $\vec{D}$

$$\vec{A} - \vec{B} = \vec{D} \quad (2.2)$$

ซึ่งสร้างโดยการต่อปลายลูกศรของ $\vec{A}$ กับโคนของ $-\vec{B}$ ตามรูป 2.1 ค

การคูณกันของปริมาณเวกเตอร์มีสองแบบ สำหรับปริมาณเวกเตอร์ที่คูณกันแล้วผลคูณเป็นปริมาณสเกลาร์ เช่น เวกเตอร์ของแรงคูณเวกเตอร์ของระยะทางทำให้เกิดงาน เรียกการคูณสเกลาร์ (Scalar product) พิจารณาเวกเตอร์ $\vec{A}$ และ $\vec{B}$ ที่ทำมุมกัน θ ตามรูป 2.1 ง ผลคูณสเกลาร์ ของ $\vec{A}$ และ $\vec{B}$ จะเป็น

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = |\vec{A}| |\vec{B}| \cos \theta \quad (2.3)$$

เมื่อ θ คือมุมระหว่างเวกเตอร์ทั้งสอง สำหรับปริมาณเวกเตอร์ที่คูณกันแล้วผลคูณเป็นปริมาณเวกเตอร์ เช่น เวกเตอร์ของแรงคูณเวกเตอร์ของระยะแขนโมเมนต์ (Moment arm) ทำให้เกิดเวกเตอร์โมเมนต์เรียกการคูณแบบนี้ว่าการคูณเวกเตอร์ (Vector product, cross product) ผลคูณเวกเตอร์ ของ $\vec{A}$ และ $\vec{B}$ จะเป็น

$$\vec{A} \times \vec{B} = (|\vec{A}| |\vec{B}| \sin \theta) \hat{e} = \vec{G} \quad (2.4)$$

เมื่อ θ คือมุมระหว่างเวกเตอร์ทั้งสอง ผลลัพธ์ที่ได้ $\vec{G}$ จะเป็นเวกเตอร์ที่ตั้งฉากกับระนาบที่บรรจุ $\vec{A}$ และ $\vec{B}$ และมีทิศทางเป็นไปตามกฎมือขวา (ทำนิ้วหัวแม่มือ นิ้วชี้ และนิ้วกลางของมือขวาให้ตั้งฉาก

กัน แทนเวกเตอร์ $\vec{A}$ ด้วยนิ้วหัวแม่มือ แทนเวกเตอร์ $\vec{B}$ ด้วยนิ้วชี้ นิ้วกลางจะเป็นทิศทางของเวกเตอร์ $\vec{G}$) ตามรูป 2.2 จ

การบวก ลบ และคูณเวกเตอร์โดยการแทนเวกเตอร์ด้วยเส้นลูกศรที่กล่าวมาไม่สะดวกในทางปฏิบัติโดยเฉพาะเมื่อต้องใช้อธิบายการไหลสามมิติ ทางคณิตศาสตร์จึงนิยมเขียนเวกเตอร์ในรูปผลบวกของเวกเตอร์ส่วนย่อย (Component) ตามกำหนดพิกัดฉากได้แก่ พิกัดคาร์ทีเซียน พิกัดทรงกระบอก และพิกัดทรงกลมในพิกัดคาร์ทีเซียน (Cartesian coordinate) เวกเตอร์แต่ละตัวจะถูกแตกออกตามแกนตั้งฉากสามแกน x y และ z ให้ $\hat{i}, \hat{j}$ และ $\hat{k}$ เป็นหน่วยเวกเตอร์ตามแกนทั้งสามตามลำดับ ถ้า $\vec{A}$ เป็นเวกเตอร์ใดๆ ในพิกัดคาร์ทีเซียนจะได้

$$\vec{A} = A_x \hat{i} + A_y \hat{j} + A_z \hat{k}$$

เมื่อ A_x, A_y และ A_z คือขนาดของเวกเตอร์ย่อยตามแกน x, y และ z ตามลำดับ ในพิกัดทรงกระบอก (Cylindrical coordinate) เวกเตอร์แต่ละตัวจะถูกแตกออกตามแนวรัศมี (r) และตั้งฉากกับรัศมี (θ) ในระนาบ xy และตามแกน z ให้ $\hat{e}_r, \hat{e}_\theta$ และ $\hat{e}_z$ เป็นหน่วยเวกเตอร์ตามแนวทั้งสามตามลำดับ ถ้า $\vec{A}$ เป็นเวกเตอร์ใดๆ ในพิกัดทรงกระบอกจะได้

$$\vec{A} = A_r \hat{e}_r + A_\theta \hat{e}_\theta + A_z \hat{e}_z$$

เมื่อ A_r, A_θ และ A_z คือขนาดของเวกเตอร์ย่อยตามแกน r, θ และ z ตามลำดับ ในพิกัดทรงกลม (Spherical coordinate) เวกเตอร์แต่ละตัวจะถูกแตกออกตามแนวรัศมี (r) ตั้งฉากกับรัศมีในระนาบ rz (θ) และแนวตั้งฉากกับรัศมีในระนาบ xy (Φ) ให้ $\hat{e}_r, \hat{e}_\theta$ และ $\hat{e}_\Phi$ เป็นหน่วยเวกเตอร์ตามแนวทั้งสามตามลำดับ ถ้า $\vec{A}$ เป็นเวกเตอร์ใดๆ ในพิกัดทรงกระบอกจะได้

$$\vec{A} = A_r \hat{e}_r + A_\theta \hat{e}_\theta + A_\Phi \hat{e}_\Phi$$

เมื่อ A_r, A_θ และ A_Φ คือขนาดของเวกเตอร์ย่อยตามแกน r, θ และ Φ ตามลำดับ

ในรูปนี้การคูณเวกเตอร์สองตัวใดๆ ที่เขียนในพิกัดเดียวกันสามารถทำได้สะดวกโดยใช้ความสัมพันธ์ตามสมการ (2.3) มาช่วยจะได้ว่า ในพิกัดคาร์ทีเซียน

$$\hat{i} \cdot \hat{i} = \hat{j} \cdot \hat{j} = \hat{k} \cdot \hat{k} = 1 \quad \text{และ} \quad \hat{i} \cdot \hat{j} = \hat{j} \cdot \hat{k} = \hat{k} \cdot \hat{i} = 0$$

และจากสมการ (2.4) จะได้

$$\begin{aligned} \hat{i} \times \hat{i} &= \hat{j} \times \hat{j} = \hat{k} \times \hat{k} = 0 \\ \hat{i} \times \hat{j} &= \hat{k} ; \quad \hat{j} \times \hat{k} = \hat{i} ; \quad \hat{k} \cdot \hat{i} = \hat{j} \\ \hat{k} \cdot \hat{j} &= -\hat{i} ; \quad \hat{j} \times \hat{i} = -\hat{k} ; \quad \hat{i} \times \hat{k} = -\hat{j} \end{aligned}$$

ดังนั้นผลคูณของเวกเตอร์ $\vec{A}$ และ $\vec{B}$ จะเป็น

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z \quad (2.5)$$

และ
$$\vec{A} \times \vec{B} = \hat{i}(A_y B_z - A_z B_y) + \hat{j}(A_z B_x - A_x B_z) + \hat{k}(A_x B_y - A_y B_x)$$

$$\text{หรือ} \quad \bar{\mathbf{A}} \times \bar{\mathbf{B}} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} \quad (2.6)$$

สำหรับในพิกัดทรงกระบอกและพิกัดทรงกลมจะได้ผลลัพธ์ทำนองเดียวกันแต่จะมีรายละเอียดที่แตกต่างไปเนื่องจากหน่วยเวกเตอร์ $\hat{e}_r, \hat{e}_\theta, \hat{e}_z$ และ $\hat{e}_\phi$ จะมีทิศทางหมุนเปลี่ยนไปมาได้ ผู้เรียนสามารถทบทวนรายละเอียดของเรื่องนี้ได้จากตำราคณิตศาสตร์

2.3 คุณสมบัติของสนาม (Field Properties)

คุณสมบัติของการไหลที่สำคัญและเป็นที่สนใจได้แก่ ความดัน อุณหภูมิ ความหนาแน่น และความเร็วที่จริงแล้วเป็นคุณสมบัติของอนุภาคอากาศที่ไหลเคลื่อนที่ไปในบริเวณที่เรามุ่งความสนใจ เช่นรอบแพนอากาศ ในวิชากลศาสตร์การอธิบายคุณสมบัติเหล่านี้ทำได้ในสองแง่ คือ หนึ่งในแง่ เป็นคุณสมบัติของสนาม (Field properties) คือการอธิบายค่าของความดัน อุณหภูมิ และอื่นๆ ที่แต่ละจุดในบริเวณของการไหลไปพร้อมๆ กันที่เดียวในแต่ละช่วงเวลา (Anderson, 2016) กล่าวอีกอย่างคือการอธิบายคุณสมบัติในรูปฟังก์ชันของตำแหน่งในสนามการไหลและเวลา กับสองในแง่เป็นคุณสมบัติของอนุภาคของไหล (Fluid particle properties) คืออธิบายค่าคุณสมบัติของอนุภาคเล็ก ๆ ที่จำเพาะเจาะจงอันหนึ่งที่เคลื่อนที่ไปในสนามการไหล ณ เวลาใดๆ

การทราบคุณสมบัติของการไหลในแง่การอธิบายในลักษณะแรกเป็นที่ต้องการสำหรับปัญหาอากาศพลศาสตร์เพราะคงจำได้จากบทที่ 1 ว่าความดันกับแรงเฉือนรอบผิววัตถุที่กระแสน้ำอากาศไหลผ่านสามารถนำมาคำนวณแรงและโมเมนต์อากาศพลศาสตร์ที่เกิดขึ้นได้ ดังนั้นการทราบความดันที่กอดอยู่โดยรอบผิววัตถุทั้งหมดและความเร็วของกระแสน้ำอากาศรอบวัตถุที่สัมพันธ์กับแรงเฉือนบนผิววัตถุในขณะเดียวกันจึงเป็นคำตอบของปัญหาการเกิดแรงบนวัตถุ เราจึงต้องการทราบความดันและความเร็วของกระแสน้ำอากาศของจุดทุกจุดบนผิววัตถุพร้อมกัน กล่าวอีกอย่างคือเราต้องการทราบความดันและความเร็ว(รวมถึงอุณหภูมิและคุณสมบัติอื่นๆ) ในรูปที่เป็นฟังก์ชันของตำแหน่งและเวลา อย่างไรก็ตามเนื่องจากการเปลี่ยนแปลงของคุณสมบัติใดๆ ในสนามการไหลจะมีการเปลี่ยนแปลงอยู่ภายใต้กฎเกณฑ์ทางฟิสิกส์พื้นฐาน 3 ข้อ และกฎทั้ง 3 ข้อจะใช้ได้เฉพาะกับคุณสมบัติของมวลที่จำเพาะเจาะจงชุดหนึ่งเสมอ (มวลจำนวนนี้คือ “ระบบ” ในวิชาเทอร์โมไดนามิกส์) กล่าวคือในขณะที่อนุภาคของไหลที่มีมวลแน่นอนอนุภาคหนึ่งเคลื่อนที่ไปในสนามการไหลเนื่องจากอนุภาคของไหลประกอบขึ้นด้วยมวลของของไหลที่แน่นอนจำนวนหนึ่งเพราะฉะนั้นขณะที่เคลื่อนที่ไปมันจะต้อง (1) มีมวลคงที่ (Conservation of mass, กฎความถาวรของมวล) (2) การเปลี่ยนแปลงความเร็วจะเป็นผลจากแรงภายนอกที่มากระทำ (Conservation of momentum, กฎความถาวรของโมเมนตัมหรือกฎการเคลื่อนที่ของนิวตัน) และ (3) อัตราการเปลี่ยนแปลงระดับของพลังงานภายใน จะขึ้นอยู่กับ

ถ่ายเทความร้อนและงานจากสิ่งแวดล้อม (Conservation of Energy, กฎความถาวรของพลังงานหรือกฎข้อที่ 1 ของเทอร์โมไดนามิกส์) กฎทั้งสามแสดงความสัมพันธ์ระหว่างความดัน ความเร็ว อุณหภูมิ ฯลฯ ของอนุภาคของไหลขณะเคลื่อนที่ออกมาเป็นสมการ แต่ดังที่กล่าวแล้วว่าการอธิบายคุณสมบัติในแง่คุณสมบัติของอนุภาคของไหลไม่เป็นที่สนใจและไม่สะดวกที่จะนำไปใช้ในงานอากาศพลศาสตร์และเราต้องการการอธิบายคุณสมบัติในแง่คุณสมบัติของสนามมากกว่า ดังนั้นเราจะต้องพยายามโยงคุณสมบัติของอนุภาคเข้ากับคุณสมบัติของสนามให้ได้เพื่อสร้างความสัมพันธ์ของคุณสมบัติของสนามโดยใช้กฎพื้นฐานทั้งสาม รายละเอียดเรื่องนี้จะได้กล่าวถึงต่อไป

2.4 สนามของสเกลาร์ และสนามของเวกเตอร์ (Scalar & Vector Fields)

ปริมาณสเกลาร์ที่ถูกกำหนดให้เป็นฟังก์ชันของตำแหน่งและเวลา เรียกว่าสนามของสเกลาร์ (Scalar field) คุณสมบัติ เช่น ความดัน อุณหภูมิ และความหนาแน่น เป็นปริมาณสเกลาร์ ดังนั้น

$$p = p(x, y, z, t)$$

$$\rho = \rho(x, y, z, t)$$

$$T = T(x, y, z, t)$$

เป็นสนามสเกลาร์ของความดัน ความหนาแน่น และอุณหภูมิ เช่นเดียวกันปริมาณเวกเตอร์ที่ถูกกำหนดให้เป็นฟังก์ชันของตำแหน่งและเวลาเรียกว่าสนามของเวกเตอร์ (Vector field) ตัวอย่างเช่น เวกเตอร์ความเร็ว

$$\vec{V} = V_x \hat{i} + V_y \hat{j} + V_z \hat{k}$$

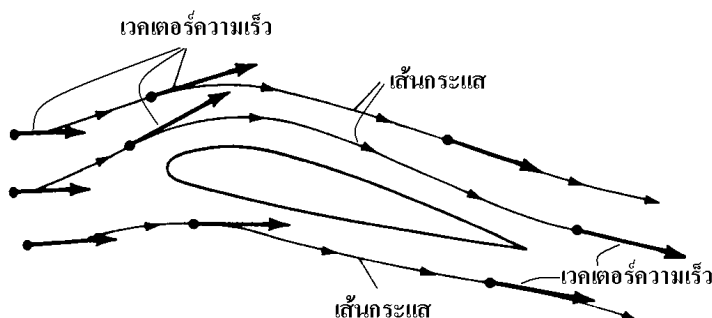
$$เมื่อ \quad V_x = V_x(x, y, z, t)$$

$$V_y = V_y(x, y, z, t)$$

$$V_z = V_z(x, y, z, t)$$

เป็นสนามของเวกเตอร์ความเร็วในกรอบคาร์ทีเซียน (Cartesian space) สังเกตว่าสนามของเวกเตอร์ความเร็วกำหนดได้ด้วยสนามสเกลาร์ของส่วนย่อย (Component) ของความเร็ว 3 สนามทับซ้อนกัน และในตัวอย่างข้างบนคุณสมบัติเป็นฟังก์ชันของพิกัดคาร์ทีเซียน (Cartesian coordinate) หรือพิกัด x, y, z แต่ความสัมพันธ์แบบเดียวกันในพิกัดทรงกระบอก (Cylindrical coordinate) หรือพิกัด r, θ, z และพิกัดทรงกลม (Spherical coordinate) หรือพิกัด r, θ, Φ ก็อาจใช้ได้เช่นกัน

สังเกตว่าสนามของความเร็วกำหนดด้วยค่าของขนาดและทิศทางที่แต่ละจุดในการไหลซึ่งต่างจากสนามของสเกลาร์ ถ้านิยามให้เส้นกระแส (Streamline) เป็นเส้นโค้งซึ่งจุดทุกจุดบนเส้นมีแนวสัมผัสเส้นโค้งอยู่ในทิศทางเดียวกันกับเวกเตอร์ของความเร็วที่จุดนั้น เราอาจจะใช้เส้นกระแสสร้างภาพการไหลตามที่แสดงในรูป 2.2 และอธิบายสนามของความเร็วได้โดยใช้สมการเส้นกระแสกับ



รูป 2.2 เวกเตอร์ของความเร็วและเส้นกระแส (Anderson, 2016)

ขนาดของความเร็วที่แต่ละจุดมาประกอบกัน ให้ค่าสมบูรณ์ของความเร็ว $\vec{V}$ แสดงด้วยสัญลักษณ์ $|\vec{V}|$ และสมการเส้นกระแสแสดงด้วยรอยตัดของพื้นผิวสองพื้นผิว (นักเรียนทบทวนเรื่องนี้ได้จากตำราคณิตศาสตร์) เราอาจอธิบายสนามความเร็วได้โดยชุดสมการ

$$|\vec{V}| = f(x, y, z) ; f_1(x, y, z) = 0 ; f_2(x, y, z) = 0$$

ในปัญหาสองมิติความสัมพันธ์ลดลงเหลือเพียงสมการสองสมการที่ใช้อธิบายลักษณะสนามของความเร็วได้ ดังจะเห็นจากตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่าง 2.1 ในเนื้อของวิชาอากาศพลศาสตร์มีหลายครั้งที่ข้อมูลของเส้นกระแส (Streamline) และขนาดของความเร็วเป็นสิ่งที่ถูกกำหนด แต่ในการคำนวณต้องการทราบส่วนย่อย (Component) ของความเร็วที่เป็นฟังก์ชันของพิกัดจุดเพื่อนำไปใช้จึงต้องคำนวณแปลงค่าข้อมูลจากแบบแรก ในการไหลสองมิติการแปลงค่ากระทำโดยหลักความจริงว่าอัตราส่วนส่วนย่อยของความเร็ว $\frac{v}{u}$ จะเท่ากับความชันของเส้นกระแสที่ทุกจุดในสนามการไหล และขนาดของความเร็วจะเท่ากับ $\sqrt{u^2 + v^2}$ ข้อมูลนี้ให้สมการสองสมการบนตัวแปรไม่ทราบค่าสองตัว คือ

$$\frac{dy}{dx} = \frac{v}{u} \quad \text{และ} \quad |\vec{V}| = \sqrt{u^2 + v^2}$$

และอาจนำไปใช้หาความเร็ว u และ v ในรูปฟังก์ชันของ x, y ได้ ตัวอย่างเช่น สมมติว่าเส้นกระแสเป็นเส้นรอบวงของวงกลมและขนาดของความเร็วมีค่าคงที่บนเส้นกระแสแต่ละเส้นตามรูป 2.3 จงหาว่าส่วนย่อยความเร็ว u และ v มีค่าเป็นฟังก์ชันของ x, y อย่างไร

วิธีทำ กำหนดให้เส้นกระแสเป็นเส้นรอบวงของวงกลมดังนั้นสมการของเส้นกระแสจะเป็น

$$x^2 + y^2 = \text{constant} \quad (i)$$

กำหนดให้ขนาดของความเร็วคงที่บนเส้นกระแสแต่ละเส้น ดังนั้นจะได้

$$|\vec{V}| = f(x^2 + y^2) \quad (ii)$$

จากสมการ(i)

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y} = \frac{v}{u}$$

จากความสัมพันธ์เวกเตอร์

$$|\vec{V}| = \sqrt{u^2 + v^2}$$

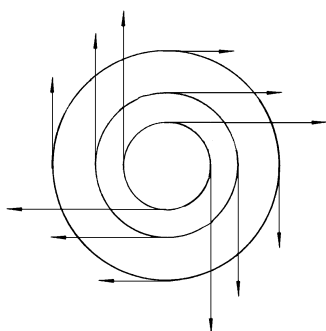
$$\therefore \text{จากสมการ (ii)} \quad u \sqrt{1 + \left(\frac{v}{u}\right)^2} = f(x^2 + y^2)$$

แทนค่า $-\frac{x}{y}$ สำหรับ $\frac{v}{u}$ ในสมการและแก้สมการหาค่า u

$$\text{จะได้ } u = + \frac{y f(x^2 + y^2)}{\sqrt{x^2 + y^2}} = + \frac{y f(r)}{r} \quad \text{ตอบ}$$

เมื่อ $x^2 + y^2 = r^2$ ทำนองเดียวกัน

$$v = - \frac{x f(x^2 + y^2)}{\sqrt{x^2 + y^2}} = - \frac{x f(r)}{r} \quad \text{ตอบ}$$



รูป 2.3 ตัวอย่าง 2.1 (Anderson, 2016)

ในสมการของ u และ v ที่เป็นคำตอบ r คือขนาดของรัศมีในพิกัดเชิงขั้ว (Polar coordinate) ซึ่งมีค่าคงที่บนวงกลมแต่ละวง u และ v ถูกกำหนดให้มีเครื่องหมายตรงข้ามกันเพื่อให้สอดคล้องกับความสัมพันธ์ $\frac{v}{u} = -\frac{x}{y}$ และจะกำหนดให้ตัวใดเป็นลบก็ได้เพราะทิศทางของความเร็ว $\vec{V} (u\hat{i} + v\hat{j})$ จะกำหนดโดยค่าของ $f(r)$ ซึ่งอาจเป็นบวกหรือลบก็ได้ ถ้า $f(r)$ เป็นบวกค่าของ u และ v จะเป็นตามสมการ ถ้า $f(r)$ เป็นลบค่าของ u และ v จะเป็นตรงข้ามกับสมการ แต่ไม่ว่าจะเป็นกรณีใดก็ตามคำตอบจะเป็นไปตามข้อกำหนดของการไหล คือ เส้นกระแส (Streamline) เป็นวงกลม และขนาดของความเร็วมีค่าคงที่บนเส้นกระแสแต่ละเส้น

หมายเหตุ ในตัวอย่างนี้ถ้าพิจารณาคำตอบในพิกัดเชิงขั้ว (Polar coordinate) ที่ส่วนย่อย (Component) ของความเร็วจะอยู่ในแนวรัศมีและตั้งฉากกับรัศมี V_r และ V_θ แล้วการพิจารณาจะง่ายกว่าในพิกัดคาร์ทีเซียนมาก เส้นกระแสจะกำหนดด้วยสมการ $r = \text{const.}$ และทิศทางของความเร็วจะอยู่ในแนวเส้นสัมผัสกับเส้นกระแส (ในที่นี้คือเส้นรอบวงวงกลม) เสมอ ดังนั้นส่วนย่อยของความเร็วในแนวรัศมี V_r ซึ่งตั้งฉากกับเส้นรอบวงจะมีค่าเป็นศูนย์ ความเร็วจึงกำหนดโดยสมการ $V_r = 0$ และ $V_\theta = f(r)$ และส่วนย่อยของความเร็ว u กับ v ในคำตอบข้างบนจะเป็นส่วนย่อยของ V_θ ในทิศทาง x กับ y นั่นเอง

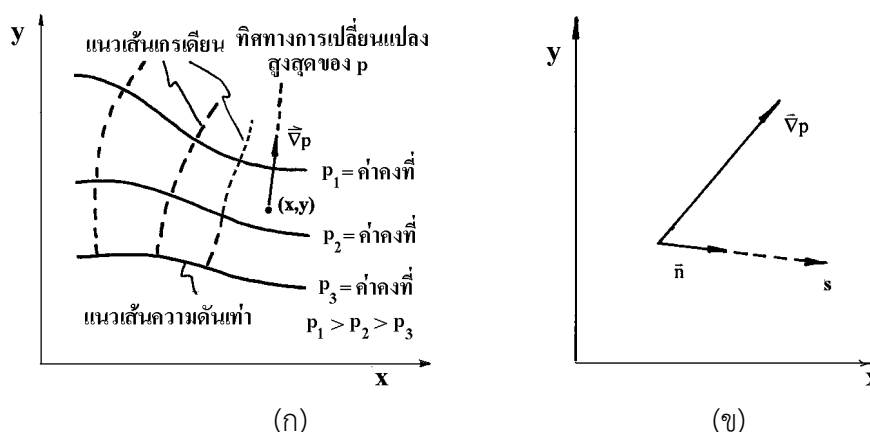
2.5 เกรเดียนของสนามสเกลาร์ (Gradient of Scalar Field)

คุณสมบัติของสนามสเกลาร์ เช่น ความดัน อุณหภูมิ และอื่น ๆ ถ้าไม่เปลี่ยนแปลงไปกับเวลา เราถือว่าอยู่ในสภาวะคงตัว (Steady) พิจารณาสถาณสเกลาร์

$$p = p(x, y, z)$$

เกรเดียนของ p (แทนด้วย ∇p) ณ จุดใดในบริเวณที่พิจารณา เป็นเวกเตอร์ที่

- ก) ขนาดของมันเป็นค่าสูงสุดของการเปลี่ยนแปลงของ p ต่อหน่วยระยะทาง ณ จุดนั้น
- ข) ทิศทางเป็นทิศทางของเวกเตอร์ที่แสดงการเปลี่ยนแปลงสูงสุด ณ จุดนั้น



รูป 2.4 (ก) เส้นเท่าและเส้นเกรเดียนของสนามสเกลาร์ (ข) Directional derivative
(Anderson, 2016)

ลองพิจารณาสถาณความดันสองมิติในรูป 2.4 ก เป็นตัวอย่าง ในรูปเส้นทึบเป็นเส้นความดันคงที่ คือเส้นที่ลากต่อจุดที่มีค่าความดันเท่ากันในสนาม เส้นอย่างนี้เรียกว่าเส้นเท่า (Isoline) ต่อไปพิจารณาจุด (x, y) ใดๆในรูป 2.4 ก ถ้าเราขยับจากจุดนี้ไป p จะมีค่าเปลี่ยนแปลงเนื่องจากเราเคลื่อนที่ออกจากจุดเดิมไปสู่ตำแหน่งใหม่ในสนาม การเปลี่ยนแปลงค่าของ p ต่อระยะทางไปในทิศทางต่างๆจะไม่เท่ากัน และจะต้องมีทิศทางใดทิศทางหนึ่งจากจุดนี้ที่การเปลี่ยนแปลงของ p ต่อหน่วยระยะทางจะมีค่าสูงสุด เรานิยามให้ทิศทางนี้เป็นทิศทางของเกรเดียนของ p ซึ่งแสดงในรูปขนาดของ ∇p คืออัตราการเปลี่ยนแปลงของ p ไปในทิศทางนั้น ทั้งขนาดและทิศทางของ ∇p จะเปลี่ยนไปตามตำแหน่งในบริเวณ เส้นที่ลากในบริเวณโดยมี ∇p อยู่ในแนวเส้นสัมผัสทุกจุดเรียกเส้นเกรเดียน (Gradient line) แสดงเป็นเส้นประในรูป เส้นเกรเดียนและเส้นเท่าจะตัดกันเป็นมุมฉากทุกจุดในบริเวณเสมอ (จะพิสูจน์ให้เห็นต่อไป)

พิจารณา $\vec{\nabla}p$ ณ จุดใดๆ (x,y) ตามที่แสดงในรูป 2.4 ข เลือทิศทาง s ใดๆออกจากจุด และ $\hat{n}$ เป็นหน่วยเวกเตอร์ในทิศทาง s อัตราการเปลี่ยนแปลงของ p ไปในทิศทาง s จะเป็น

$$\frac{dp}{ds} = \vec{\nabla}p \cdot \hat{n} \quad (2.7)$$

ในสมการ(2.7) dp/ds เรียกว่า “Directional derivative” ในทิศทาง s สังเกตว่าจากสมการ (2.7) อัตราการเปลี่ยนแปลงของ p ในทิศทางใดๆ จะเป็นส่วนย่อยของเวกเตอร์ $\vec{\nabla}p$ ในทิศทางนั้น

อธิบายการเปลี่ยนแปลง p จากจุดหนึ่งไปยังอีกจุดหนึ่งโดยใช้การกระจายอนุกรมของ เทย์เลอร์ (Taylor's serie expansion) ให้ p_A และ p_B เป็นค่าของ p ที่จุด A และจุด B ในสนาม จะได้

$$\begin{aligned} p_B = p_A &+ \left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)_A (x_B - x_A) + \left(\frac{\partial p}{\partial y}\right)_A (y_B - y_A) + \left(\frac{\partial p}{\partial z}\right)_A (z_B - z_A) \\ &+ \left(\frac{\partial^2 p}{\partial x^2}\right)_A \frac{(x_B - x_A)^2}{2!} + \dots + \left(\frac{\partial^3 p}{\partial x^3}\right)_A \frac{(x_B - x_A)^3}{3!} + \dots \end{aligned}$$

ให้จุด B เข้าใกล้จุด A จนเกือบทับกัน ดังนั้น $(p_B - p_A)$ เข้าสู่ค่า dp , $(x_B - x_A)$ เข้าสู่ค่า dx , $(y_B - y_A)$ เข้าสู่ค่า dy และ $(z_B - z_A)$ เข้าสู่ค่า dz ในขีดจำกัดนี้ เทอมที่ 4 ขึ้นไปในอนุกรมมีค่าน้อยและตัดทิ้งได้ เพราะฉะนั้น

$$dp = \left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)dx + \left(\frac{\partial p}{\partial y}\right)dy + \left(\frac{\partial p}{\partial z}\right)dz \quad (2.8)$$

สมการ (2.8) สามารถขยายต่อไปโดยใช้นิยามของ “Directional derivative” ซึ่งแสดงอัตราการเปลี่ยนแปลงของ p เทียบต่อระยะทางไปในทิศทางหนึ่ง เรากำหนดทิศทางการเปลี่ยนแปลงของ p ในช่วงหนึ่งๆ ให้อยู่ในแนวสัมผัสกับเส้นโค้งอันหนึ่ง ณ จุดที่กำหนด ให้ s เป็นตัวแปรแสดงระยะทางที่วัดไปตามเส้นโค้งที่กำหนดจากจุดอ้างอิง ดังนั้นพิกัดจุด (x, y, z) และ ค่าความแตกต่างน้อยๆ (Differentials) dx, dy, dz ณ จุดใด ๆ บนโค้ง s จะเป็น

$$x = x(s) \quad \text{และ} \quad dx = \left(\frac{dx}{ds}\right)ds \quad (2.9a)$$

$$y = y(s) \quad \text{และ} \quad dy = \left(\frac{dy}{ds}\right)ds \quad (2.9b)$$

$$z = z(s) \quad \text{และ} \quad dz = \left(\frac{dz}{ds}\right)ds \quad (2.9c)$$

แทนสมการ (2.9) ในสมการ (2.8) จะได้การเปลี่ยนแปลงของ p ไปตามเส้นโค้ง s (การเปลี่ยนแปลงของ p ในแนวสัมผัสกับโค้ง)

$$\frac{dp}{ds} = \frac{\partial p}{\partial x} \frac{dx}{ds} + \frac{\partial p}{\partial y} \frac{dy}{ds} + \frac{\partial p}{\partial z} \frac{dz}{ds} \quad (2.10)$$

ในรูป 2.5 ก เส้นโค้ง s แสดงรวม กับเส้นเท่า (Isoline) ซึ่งคือแนวเส้นโค้งที่ p มีค่าคงที่ และเส้นเกรเดียน (Gradient line) ซึ่งแสดงแนวที่ p มีการเปลี่ยนแปลงสูงสุด จากรูป 2.5 ก การเปลี่ยนแปลงตามเส้นโค้ง s ของ x และ y คือ

$$\frac{dx}{ds} = \cos \alpha \quad \text{และ} \quad \frac{dy}{ds} = \sin \alpha$$

ดังนั้น

$$\frac{dp}{ds} = \frac{\partial p}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial p}{\partial y} \sin \alpha \quad (2.11)$$

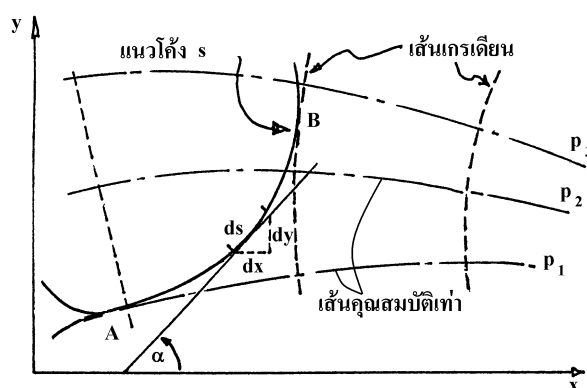
จะเห็นจากรูป 2.5 ก ว่าค่าของ p ที่กระจายอยู่ในระนาบสองมิติถูกกำหนดด้วยชุดของเส้นเท่า หรือชุดของเส้นเกรเดียน หาความสัมพันธ์ระหว่างแนวทั้งสองจะได้ ในรูป 2.5 ก ที่จุด A เส้นโค้ง s สัมผัสกับแนว p_1 คงที่ ดังนั้นที่จุดนี้ $\frac{dp}{ds} = 0$ ให้ α_i แทนทิศทางตามแนวเส้นสัมผัสที่จุด A จากสมการ (2.11) จะได้ว่า

$$\tan \alpha_i = -\frac{\partial p / \partial x}{\partial p / \partial y} \quad (2.12)$$

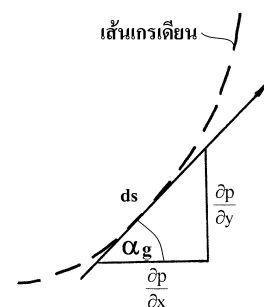
ทำนองเดียวกันให้ α_g แสดงทิศทางของแนวเส้นสัมผัสโค้งที่จุด B ซึ่งแนวเส้นโค้งสัมผัสกับเส้นเกรเดียน ดังนั้น $\frac{dp}{ds}$ จะมีค่าสูงสุดที่จุดนี้ ค่า α_g จึงเป็นค่ามุม α ซึ่งอนุพันธ์ของสมการ (2.11) เทียบต่อ α เป็นศูนย์

$$\frac{d}{d\alpha} \left(\frac{dp}{ds} \right) = 0 = -\frac{\partial p}{\partial x} \sin \alpha_g + \frac{\partial p}{\partial y} \cos \alpha_g$$

$$\tan \alpha_g = \frac{\partial p / \partial y}{\partial p / \partial x} \quad (2.13)$$



(ก)



(ข)

รูป 2.5 เกรเดียนเวกเตอร์ (Anderson, 2016)

จะเห็นว่าทางขวาของสมการ (2.13) เป็นลบส่วนกลับของสมการ (2.12) จึงสรุปได้ว่า ทุกจุดในสนาม ค่าความชันของแนวสัมผัสของเส้นเท่ากับเส้นเกรเดียนจะตั้งฉากกัน เพราะฉะนั้นเส้น เกรเดียนกับเส้นเท่าจะตั้งฉากกันที่ทุกจุดในสนาม

สังเกตว่าการเปลี่ยนแปลง p ต่อระยะทางในแนวเส้นเกรเดียนมีค่าสูงสุดดังนี้

$$\left(\frac{dp}{ds}\right)_{\max} = \frac{\partial p}{\partial x} \cos \alpha_g + \frac{\partial p}{\partial y} \sin \alpha_g \quad (2.14)$$

จากสมการ (2.14) และรูป 2.5 ข จะได้

$$\sin \alpha_g = \frac{\partial p / \partial y}{\sqrt{\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial p}{\partial y}\right)^2}} \quad \text{และ} \quad \cos \alpha_g = \frac{\partial p / \partial x}{\sqrt{\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial p}{\partial y}\right)^2}}$$

นั่นคือการเปลี่ยนแปลงสูงสุดของ p จะมีค่า

$$\left(\frac{dp}{ds}\right)_{\max} = \sqrt{\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial p}{\partial y}\right)^2} \quad (2.15)$$

และมีทิศทางที่กำหนดโดยหน่วยเวกเตอร์ (Unit vector)

$$\hat{n} = \frac{\frac{\partial p}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial p}{\partial y} \hat{j}}{\sqrt{\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial p}{\partial y}\right)^2}} \quad (2.16)$$

ดังนั้นสำหรับสเกลาร์ฟังก์ชัน $p(x, y)$ เวกเตอร์ที่ได้จากผลบวกของอัตราการเปลี่ยนแปลงของ p ไปในทิศทาง x และ y , $\frac{\partial p}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial p}{\partial y} \hat{j}$, จะเป็นเวกเตอร์ที่มีขนาดเท่ากับอัตราการเปลี่ยนแปลงต่อระยะทางของ p สูงสุด และชี้ไปในทิศทางของการเปลี่ยนแปลงสูงสุด (หรือสัมผัสกับเส้นเกรเดียน) เรียกเวกเตอร์นี้ว่า เกรเดียนของ p ($\text{grad } p$, $\vec{\nabla} p$) สังเกตว่า

$$\frac{\partial p}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial p}{\partial y} \hat{j} = \left(\frac{\partial}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial}{\partial y} \hat{j} \right) (p)$$

หรือ ถ้าแทน $\frac{\partial}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial}{\partial y} \hat{j}$ ด้วยสัญลักษณ์ $\vec{\nabla}$ จะได้

$$\text{grad } p = \vec{\nabla} p = \frac{\partial p}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial p}{\partial y} \hat{j}$$

ผลสรุปที่ได้จะเป็นจริงเช่นกันในบริเวณ 3 มิติ ดังนั้นเกรเดียนของ p

$$\vec{\nabla} p = \frac{\partial p}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial p}{\partial y} \hat{j} + \frac{\partial p}{\partial z} \hat{k} \quad (2.17)$$

ในพิกัดคาร์ทีเซียน เมื่อ $\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial}{\partial y} \hat{j} + \frac{\partial}{\partial z} \hat{k}$ เราอาจแทน p ด้วยสนามสเกลาร์ใดๆ เช่น สนามของอุณหภูมิหรือสนามของความหนาแน่นก็ได้ เช่น

$$\vec{\nabla} T = \frac{\partial T}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial T}{\partial y} \hat{j} + \frac{\partial T}{\partial z} \hat{k}$$

จะเป็นเวกเตอร์ที่ชี้ไปในทิศทางที่อุณหภูมิมีการเปลี่ยนแปลงต่อระยะทางสูงสุด และมีขนาดเท่ากับ อัตราการเปลี่ยนแปลงสูงสุดนั้นและเป็นไปในทำนองเดียวกันสำหรับสเกลาร์ฟังก์ชันอื่นๆ

ในการพิจารณาที่ผ่านมาเราใช้พิกัดคาร์ทีเซียน คือ $p = p(x, y, z)$ แต่การกำหนดตำแหน่งในสนามเราอาจใช้พิกัดทรงกระบอกหรือพิกัดทรงกลมก็ได้ ดังนั้นเกรเดียนต์ของคุณสมบัติ (p, T, ρ) อาจแสดงในพิกัดทรงกระบอก $p = p(r, \theta, z)$

$$\vec{\nabla} p = \frac{\partial p}{\partial r} \hat{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta} \hat{e}_\theta + \frac{\partial p}{\partial z} \hat{e}_z \quad (2.18)$$

และในพิกัดทรงกลม $p = p(r, \theta, \Phi)$

$$\vec{\nabla} p = \frac{\partial p}{\partial r} \hat{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta} \hat{e}_\theta + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial p}{\partial \Phi} \hat{e}_\Phi \quad (2.19)$$

2.6 ไตเวเจนส์ของสนามเวกเตอร์ (Divergence of a Vector Field)

สนามของเวกเตอร์ที่สำคัญในการศึกษาการไหลก็คือสนามของความเร็ว สนามของเวกเตอร์ต่างจากสนามสเกลาร์ในแง่ที่ค่าของเวกเตอร์ (ในที่นี้คือความเร็ว) ณ จุดใดๆ ในการไหลมีทั้งขนาดและทิศทาง การเปลี่ยนแปลงของสนามเวกเตอร์จึงขึ้นอยู่กับการเปลี่ยนแปลงขนาดและทิศทางอย่างใดอย่างหนึ่งหรือทั้งสองอย่างประกอบกัน ให้ $\vec{V}$ เป็นเวกเตอร์ของความเร็วซึ่งเขียนในรูปส่วนย่อย (Component) ในพิกัดคาร์ทีเซียน

$$\vec{V} = u \hat{i} + v \hat{j} + w \hat{k} \quad (2.20)$$

เมื่อ u, v, w เป็นความเร็วย่อยตามแกน x, y และ z การกำหนดสนามของความเร็วทำได้โดยกำหนด u, v, w เป็นฟังก์ชันของ x, y, z และ t จะเห็นว่าการเปลี่ยนแปลงของความเร็ว $\vec{V}$ ในสนามที่เกิดจาก

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{V} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \quad (2.21)$$

มีความหมายคนละอย่างกับเกรเดียนต์ของความดัน สมการ (2.21) แสดงค่า $\vec{\nabla} \cdot \vec{V}$ เรียกไตเวเจนส์ (divergence) ของสนามความเร็ว เราจะพิสูจน์ให้เห็นว่าค่า $\vec{\nabla} \cdot \vec{V}$ จะเท่ากับอัตราการเปลี่ยนแปลงของปริมาตรเทียบกับปริมาตรเดิมของอนุภาคของไหลที่เคลื่อนที่ไปในสนามการไหล (Flow field) ในหัวข้อต่อไป

ในสมการ (2.21) ไตเวเจนส์ของความเร็วยู่ในพิกัด x, y, z สำหรับในพิกัดทรงกระบอก และ พิกัดทรงกลมไตเวเจนส์ของความเร็วจึงเป็น

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{V} = \frac{1}{r} \frac{\partial(r V_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial V_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial V_z}{\partial z} \quad (2.22)$$

เมื่อ V_r, V_θ และ V_z เป็นส่วนของความเร็วนั้นในแนว r, θ, z ของพิกัดทรงกระบอก และ

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{V} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r}(r^2 V_r) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta}(V_\theta \sin \theta) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial V_\phi}{\partial \Phi} \quad (2.23)$$

เมื่อ V_r, V_θ และ V_ϕ เป็นส่วนของความเร็วนั้นในแนว r, θ, Φ ของพิกัดทรงกลม

2.7 เคอร์ของสนามเวกเตอร์ (Curl of a Vector Field)

การเปลี่ยนแปลงของสนามความเร็วนอกจากในรูปไตเวเจนส์ของความเร็ว $\vec{\nabla} \cdot \vec{V}$ อย่างใน หัวข้อ 2.5 แล้ว ยังอาจพิจารณาการเปลี่ยนแปลงที่เป็นรูปของการคูณกันแบบเวกเตอร์

$$\vec{\nabla} \times \vec{V} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ u & v & w \end{vmatrix}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{V} = \hat{i} \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \right) + \hat{j} \left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right) + \hat{k} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) \quad (2.24)$$

เรียก $\vec{\nabla} \times \vec{V}$ ว่าเคอร์ (Curl) ของสนามความเร็ว จะเห็นว่าไตเวเจนส์เป็นการเปลี่ยนแปลงของ สนามความเร็วที่มีค่าเป็นสเกลาร์ ส่วนเคอร์เป็นการเปลี่ยนแปลงของสนามความเร็วที่แสดงค่าเป็น เวกเตอร์ จะพิสูจน์ต่อไปให้เห็นว่าเคอร์ของความเร็วนั้น $\vec{\nabla} \times \vec{V}$, จะมีค่าเป็นสองเท่าของความเร็วจึงมุม แต่ละจุดของสนามการไหล ในสมการ (2.24) เคอร์ของความเร็วยู่ในพิกัด x, y, z สำหรับในพิกัด ทรงกระบอก

$$\vec{V} = V_r \hat{e}_r + V_\theta \hat{e}_\theta + V_z \hat{e}_z$$

เคอร์ของสนามความเร็วจะเป็น

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \times \vec{V} &= \frac{1}{r} \begin{vmatrix} \hat{e}_r & r\hat{e}_\theta & \hat{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ V_r & rV_\theta & V_z \end{vmatrix} \\ &= \frac{\hat{e}_r}{r} \left(\frac{\partial V_z}{\partial \theta} - \frac{\partial(rV_\theta)}{\partial z} \right) + \hat{e}_\theta \left(\frac{\partial V_r}{\partial z} - \frac{\partial V_z}{\partial r} \right) + \frac{\hat{e}_z}{r} \left(\frac{\partial(rV_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial V_r}{\partial \theta} \right) \end{aligned} \quad (2.25)$$

ในพิกัดทรงกลม

$$\vec{V} = V_r \hat{e}_r + V_\theta \hat{e}_\theta + V_\phi \hat{e}_\phi$$

เคอร์ของสนามความเร็วจะเป็น

$$\vec{\nabla} \times \vec{V} = \frac{1}{r^2 \sin \theta} \begin{vmatrix} \hat{e}_r & r\hat{e}_\theta & (r \sin \theta) \hat{e}_\phi \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \theta} & \frac{\partial}{\partial \Phi} \\ V_r & rV_\theta & (r \sin \theta) V_\phi \end{vmatrix} \quad (2.26)$$

2.8 ความหมายของอนุพันธ์ (Derivative) ของสนามความเร็วในทางกายภาพ

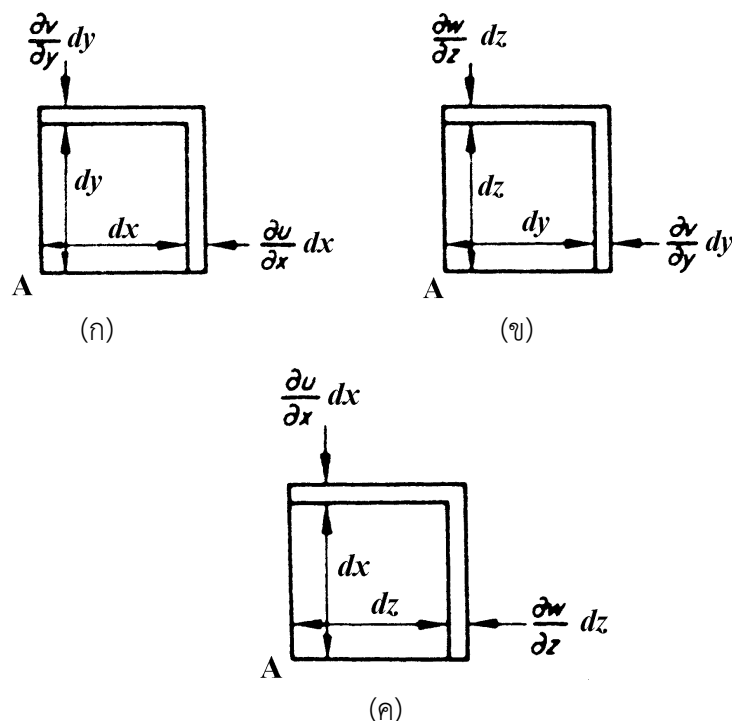
การเปลี่ยนแปลงของสนามความเร็วทั้งไดเวเจนส์และเคอร์ในฟังก์ชันที่เขียนจะเกี่ยวข้องกับอนุพันธ์ (Derivative) หรือเกรเดียนต์ของความเร็ว u , v และ w เทียบกับ x , y , z ในรูปของเกรเดียนต์ของความเร็วย่อย (Houghton & Carpenter, 2019)

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial z} & \frac{\partial v}{\partial z} & \frac{\partial w}{\partial z} \end{vmatrix}$$

อนุพันธ์ทั้ง 9 ตัวที่ปรากฏอยู่ในไดเวเจนส์และเคอร์มีความหมายทางกายภาพ ดังนี้

2.8.1 ความหมายของไดเวเจนส์ของสนามความเร็ว

พิจารณาอนุภาคของไหล (Fluid particle) รูปสี่เหลี่ยมลูกบาศก์ขนาด $dx dy dz$ ที่มีด้านขนานกับแกน x, y, z เคลื่อนที่อยู่ในสนามความเร็วที่เกรเดียนต์ของความเร็วย่อยทุกตัวเป็นศูนย์ยกเว้น $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial v}{\partial y}$ และ $\frac{\partial w}{\partial z}$ ให้ u , v , w เป็นความเร็วตามแกน x, y, z ของจุด A ตามที่แสดงในรูป 2.6



รูป 2.6 แสดงอัตราการเพิ่มความยาวด้านต่อหน่วยเวลา (Houghton & Carpenter, 2019)

พิจารณาด้านของอนุภาคที่ตั้งฉากกับแกน x ในรูป 2.6 ก หน้าด้านซ้ายของลูกบาศก์ที่ทับอยู่บนแกน y จะเคลื่อนที่ไปทางขวาในทิศทางตามแกน x ด้วยความเร็ว u เสมอกันทั้งหน้า ส่วนหน้าด้านขวาของลูกบาศก์อยู่ที่ระยะห่างออกมาตามแกน x เป็นระยะ dx จะเคลื่อนที่ไปทางขวาในทิศทาง

ตามแกน x ด้วยความเร็ว $u + \frac{\partial u}{\partial x} dx$ ทำให้ในช่วงเวลา dt สั้นๆ ลูกบาศก์จะเคลื่อนที่ในลักษณะที่ความยาวของด้านที่ขนานกับแกน x ซึ่งมีความยาวเดิม dx จะยืดออกเป็น $dx + \frac{\partial u}{\partial x} dx dt$ (หรือหดสั้นลงถ้า $\frac{\partial u}{\partial x}$ เป็นลบ) ทำนองเดียวกันด้านของลูกบาศก์ที่ขนานกับแกน y จะยาวขึ้นจาก dy เป็น $dy + \frac{\partial v}{\partial y} dy dt$ และด้านของลูกบาศก์ที่ขนานกับแกน z จะยาวขึ้นจาก dz เป็น $dz + \frac{\partial w}{\partial z} dz dt$ เพราะฉะนั้นอนุภาคของไหลที่เคลื่อนที่ในสนามความเร็วที่มีเกรเดียนต์ $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial v}{\partial y}$ และ $\frac{\partial w}{\partial z}$ จะมีการเปลี่ยนแปลงปริมาตรขณะกำลังเคลื่อนที่ผ่านออกจากจุดใด ๆ ในสนามที่หาได้จาก

$$\begin{aligned}\frac{dV}{dt} &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta V}{\Delta t} \\ &= \frac{(dx + \frac{\partial u}{\partial x} dx dt)(dy + \frac{\partial v}{\partial y} dy dt)(dz + \frac{\partial w}{\partial z} dz dt) - dx dy dz}{dt}\end{aligned}$$

พิจารณาทางขวาของสมการเทอมแรกของเศษมีผลคูณเป็น

$$\begin{aligned}&(dx + \frac{\partial u}{\partial x} dx dt)(dy + \frac{\partial v}{\partial y} dy dt)(dz + \frac{\partial w}{\partial z} dz dt) \\ &= dx dy dz + (\frac{\partial u}{\partial x}) dx dy dz dt + (\frac{\partial v}{\partial y}) dx dy dz dt + (\frac{\partial w}{\partial z}) dx dy dz dt \\ &+ (\frac{\partial u}{\partial x})(\frac{\partial v}{\partial y}) dx dy dz dt^2 + (\frac{\partial v}{\partial y})(\frac{\partial w}{\partial z}) dx dy dz dt^2 + (\frac{\partial w}{\partial z})(\frac{\partial u}{\partial x}) dx dy dz dt^2 \\ &+ (\frac{\partial u}{\partial x})(\frac{\partial v}{\partial y})(\frac{\partial w}{\partial z}) dx dy dz dt^3\end{aligned}$$

ในขีดจำกัด $dt \rightarrow 0$ เทอมหลังเทอมที่ 4 จะมีค่าน้อยเมื่อเทียบกับสี่เทอมแรก เพราะฉะนั้น

$$\frac{dV}{dt} = \frac{(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z})}{dt} dx dy dz dt$$

จะได้
$$\frac{1}{dx dy dz} \frac{dV}{dt} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = \vec{\nabla} \cdot \vec{V}$$

แต่ $dx dy dz = V$ ดังนั้น

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{V} = \frac{1}{V} \frac{dV}{dt} \quad (2.27)$$

นั่นคือ ไดเวเจนส์ของความเร็วแสดงอัตราการเปลี่ยนแปลงปริมาตรเทียบกับปริมาตรเดิมของอนุภาคของไหล ณ จุดใด ๆ ในสนามของการไหลขณะที่อนุภาคของไหลกำลังเคลื่อนที่ออกจากจุดนั้น ที่สำคัญคือสนามความเร็วที่ $\vec{\nabla} \cdot \vec{V} = 0$ แสดงว่าอนุภาคของไหลเคลื่อนที่อยู่ในสนามในลักษณะที่เมื่อเคลื่อนที่จากจุดหนึ่งไปอีกจุดหนึ่งปริมาตรของมันไม่เปลี่ยนแปลง ดังนั้นความหนาแน่นของ

อนุภาคจะคงที่ กล่าวอีกอย่างคือสนามความเร็วที่มีค่าไดเวเจนส์เป็นศูนย์เป็นสนามความเร็วของการไหลที่มีค่าความหนาแน่นคงที่หรือเป็นการไหลที่ไม่มีการอัดตัว (Incompressible flow) นั้นเอง

ตัวอย่าง 2.2 สนามของการไหลอันหนึ่งกำหนดด้วยสนามความเร็วแบบ 2 มิติ $u = x^3 \sin y$;
 $v = 3x^2 \cos y$ จงแสดงว่าการไหลเป็นแบบไร้การอัดตัว

วิธีทำ จากสมการที่ (2.20) การไหลไร้การอัดตัวแสดงด้วยความเร็ว $\vec{\nabla} \cdot \vec{V} = 0$

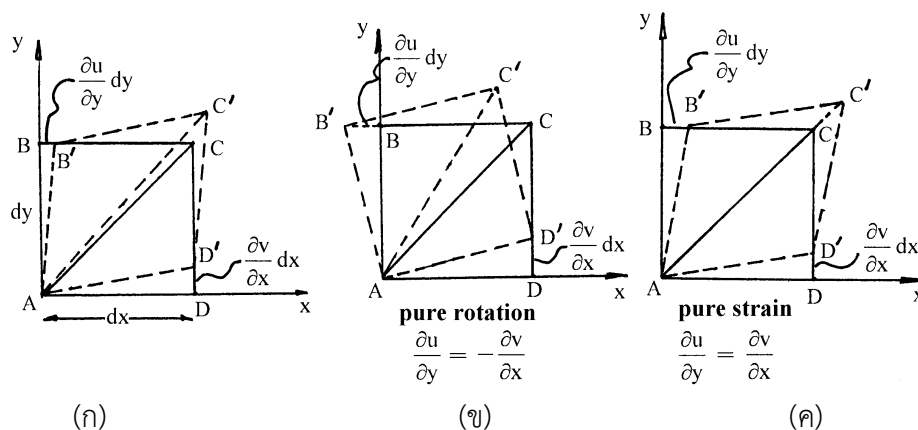
$$\begin{aligned} \text{ในสองมิติ} \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{V} &= \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \\ &= \frac{\partial}{\partial x}(x^3 \sin y) + \frac{\partial}{\partial y}(3x^2 \cos y) \\ &= 3x^2 \sin y - 3x^2 \sin y \\ &= 0 \end{aligned}$$

เพราะฉะนั้นการไหลเป็นแบบไร้การอัดตัว

ตอบ

2.8.2 ความหมายของเคอร์ (Curl) ของสนามความเร็ว ความเร็วเชิงมุม และวอร์ทิซิตี

พิจารณาอนุภาคของไหลรูปลูกบาศก์ขนาด $dx dy dz$ ที่เคลื่อนที่อยู่ในสนามความเร็วที่เกรเดียนของความเร็วย่อยทุกตัวเป็นศูนย์ยกเว้น $\frac{\partial u}{\partial y}$ และ $\frac{\partial v}{\partial x}$ พิจารณาด้าน AB และ AC ในรูป 2.7 ก จุด A มีความเร็ว u, v ตามแกน x และแกน y จุด B อยู่ห่างจากจุด A เป็นระยะ dy ตามแกน y เคลื่อนที่ไปทางขวาตามแกน x ด้วยความเร็ว $u + \frac{\partial u}{\partial y} dy$ และเคลื่อนที่ไปตามแกน y ด้วยความเร็ว v จุด D อยู่ห่างจากจุด A เป็นระยะ dx ตามแกน x เคลื่อนที่ไปทางขวาตามแกน x ด้วยความเร็ว u และเคลื่อนที่ไปตามแกน y ด้วยความเร็ว $v + \frac{\partial v}{\partial x} dx$ ดังนั้นในช่วงเวลาสั้นๆ dt ด้าน AB จะเคลื่อนที่ไปเป็น AB' และด้าน AD จะเคลื่อนที่ไปเป็น AD' เช่นเดียวกันเส้นทแยงมุม AC จะเคลื่อนที่ไปเป็น AC'



รูป 2.7 แสดงอัตราการหมุนรอบแกน xyz ต่อหน่วยเวลาของด้านแต่ละด้าน (Anderson, 2016)

จะเห็นว่าในสนามการไหลนี้ด้าน AB และ AC จะไม่เปลี่ยนแปลงความยาวแต่จะเบนไปจากแนวเดิมจนทำให้มุม BAD ซึ่งเป็นมุมฉากเปลี่ยนไปเป็นมุม B'AD' จากรูป 2.7 ก

$$BB' = \frac{\partial u}{\partial y} dy dt \quad \text{และ} \quad DD' = \frac{\partial v}{\partial x} dx dt$$

เพราะฉะนั้น มุม $BAB' = \tan^{-1} \frac{BB'}{AB} \cong \frac{BB'}{AB} = \frac{\partial u}{\partial y} dt$

มุม $DAD' = \tan^{-1} \frac{DD'}{AD} \cong \frac{DD'}{AD} = \frac{\partial v}{\partial x} dt$

เมื่อ $\tan \theta \cong \theta$ สำหรับมุม θ ที่มีค่าน้อย

นั่นคือในช่วงเวลา dt ด้าน AB จะหมุนตามเข็มนาฬิกาไปรอบแกน z เป็นมุม $\frac{\partial u}{\partial y} dt$

และ ด้าน AD จะหมุนทวนเข็มนาฬิกาไปรอบแกน z เป็นมุม $\frac{\partial v}{\partial x} dt$ เพราะฉะนั้นความเร็วเชิงมุมรอบแกน z ของด้าน AB และ AD คือ

$$\omega_{AB} = \frac{BAB'}{dt} = -\frac{\partial u}{\partial y} \quad \text{และ} \quad \omega_{AD} = \frac{DAD'}{dt} = \frac{\partial v}{\partial x}$$

เครื่องหมายลบของ ω_{AB} ใช้เพื่อให้สอดคล้องกับการหมุนตามเข็มนาฬิกาของด้าน AB โดยใช้นิยามความเร็วเชิงมุมในระนาบ xy ของอนุภาคเป็นค่าเฉลี่ยของความเร็วเชิงมุมของด้าน AB และ ด้าน AD ดังนั้น

$$\begin{aligned} \omega_z &= \frac{1}{2}(\omega_{AB} + \omega_{AD}) \\ \omega_z &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right) \end{aligned} \quad (2.28)$$

ถ้าเราหาค่าความเร็วเชิงมุมของเส้นทแยงมุม AC โดยใช้ความสัมพันธ์เรขาคณิตในรูป 2.7 ก เพื่อความสะดวกพิจารณาให้ด้าน $AB = AD$ (ในตอนแรกอนุภาคมีด้านเป็นสี่เหลี่ยมจัตุรัส)

จะได้มุม $CAD = \frac{1}{2} BAD = 45^\circ$

$$\text{มุม } B'AD' = 90^\circ - BAB' - DAD' \cong 2 \cdot C'AD'$$

ดังนั้น

$$\begin{aligned} \text{มุม } CAC' &= C'AD - CAD = C'AD' + D'AD - CAD \\ &= \frac{1}{2} B'AD' + DAD' - CAD \\ &= \frac{1}{2} (90^\circ - BAB' - DAD') + DAD' - CAD \\ &= \frac{1}{2} \left(90^\circ - \frac{\partial u}{\partial y} dt - \frac{\partial v}{\partial x} dt\right) + \frac{\partial v}{\partial x} dt - 45^\circ \end{aligned}$$

เพราะฉะนั้นในช่วงเวลา dt ด้านทแยงมุม AC จะหมุนไปรอบแกน z เป็นมุม

$$CAC' = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right)dt$$

นั่นคือความเร็วเชิงมุมของด้าน $AC = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right)$ เท่ากับความเร็วเชิงมุมเฉลี่ยระหว่างด้าน AB กับ AD บนระนาบ xy (สมการ 2.28) จึงอาจสรุปว่าความเร็วเชิงมุมของด้านทแยงมุมคือความเร็วเชิงมุมของอนุภาคของไหลขณะที่เคลื่อนที่ผ่านจุดใดๆ ในสนามการไหลรอบแกน z

ขอให้สังเกตกรณีพิเศษในรูป 2.7 ข เมื่อ $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$ อัตราการหมุนรอบแกน z ของอนุภาคจะเท่ากับ $\frac{\partial v}{\partial x}$ (หรือ $-\frac{\partial u}{\partial y}$) อนุภาคจะหมุนรอบแกน z โดยที่ด้านที่ทำมุมฉากกันอยู่เดิมจะมีมุมระหว่างกันคงที่ แต่ในรูป 2.7 ค ค่า $\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial x}$ ด้าน AB และ AD จะลู่ออกเข้าหากันด้วยอัตราเท่ากัน ความเร็วเชิงมุมของด้าน AC จะเป็นศูนย์นั่นคืออนุภาคของไหลเคลื่อนที่โดยไม่มีการหมุน แต่มีการบิดเบี้ยวของรูปร่างเกิดขึ้น เราเรียกการที่ด้านที่ทำมุมฉากกันของอนุภาคมีแนวโน้มที่จะโย้เข้าหากัน (หรือออกจากกัน) ว่ามีอัตราแปรรูปหรืออัตราการเกิดความเครียด (Rate of strain) เพราะฉะนั้นในรูป 2.7 ข อนุภาคจะเคลื่อนที่โดยมีการหมุนแต่ไม่มีการแปรรูป แต่ในรูป 2.7 ค อนุภาคเคลื่อนที่โดยมีการแปรรูปแต่ไม่มีการหมุน จะเห็นว่าความเร็วเชิงมุมของเส้นทแยงมุมจะแทนความเร็วเชิงมุมของอนุภาคนั่นเอง ทำนองเดียวกันความเร็วเชิงมุมของอนุภาคของไหลรอบแกน x และ y จะกำหนดโดยอนุพันธ์ $\frac{\partial w}{\partial y}$, $\frac{\partial v}{\partial z}$, $\frac{\partial u}{\partial z}$ และ $\frac{\partial w}{\partial x}$ เป็น

$$\omega_x = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \right) \quad (2.29)$$

$$\omega_y = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right) \quad (2.30)$$

ให้ $\vec{\omega} = \omega_x \hat{i} + \omega_y \hat{j} + \omega_z \hat{k}$ เป็นเวกเตอร์ของความเร็วเชิงมุมของอนุภาคของไหล จะได้ความสัมพันธ์ของสนามความเร็วกับความเร็วเชิงมุม

$$\vec{\nabla} \times \vec{V} = \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \right) \hat{i} + \left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right) \hat{j} + \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) \hat{k}$$

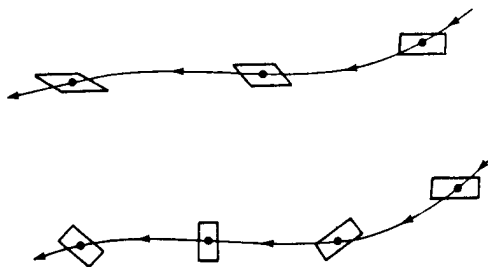
$$\vec{\xi} = 2\vec{\omega} \quad (2.31)$$

เราเรียกเคอร์ของสนามความเร็ว $\vec{\nabla} \times \vec{V}$ ว่าวอร์ทิซิตีเวกเตอร์ (Vorticity vector) ใช้สัญลักษณ์ $\vec{\xi}$ (อ่านว่า “ซี”, Xi) เป็นเวกเตอร์ที่มีค่าเป็นสองเท่าของความเร็วเชิงมุมในสนามการไหล

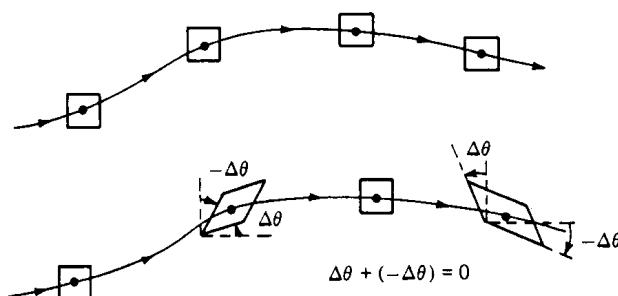
ที่กล่าวมาทั้งหมดนำไปสู่ข้อสรุปสำคัญ 2 ประการคือ

1. ถ้า $\vec{\nabla} \times \vec{V} \neq 0$ ที่ทุกจุดในการไหล เราเรียกการไหลว่าเป็นแบบมีการหมุน ซึ่งแสดงให้เห็นว่าอนุภาคของไหลมีความเร็วเชิงมุม รูป 2.8 แสดงลักษณะการไหลแบบมีการหมุน (Rotational flow) บนเส้นกระแสที่ต่างกันสองเส้น
2. ถ้า $\vec{\nabla} \times \vec{V} = 0$ ที่ทุกจุดในการไหล เราเรียกการไหลว่าเป็นแบบไร้การหมุน ซึ่งแสดงให้เห็นว่าอนุภาคของไหลเลื่อนไหลไปในสนามการไหล โดยไม่มีความเร็วเชิงมุม หรือการ

เคลื่อนที่เป็นแบบไร้การหมุนโดยสิ้นเชิง (Pure translation) รูป 2.9 แสดงลักษณะการไหลแบบไม่มีการหมุน (Irrotational flow) บนเส้นกระแสที่ต่างกันสองเส้น



รูป 2.8 การไหลแบบมีการหมุนในแบบต่าง ๆ



รูป 2.9 การไหลไร้การหมุนในแบบต่าง ๆ (Anderson, 2016)

ตัวอย่าง 2.3 จงคำนวณวอร์ทิซิตีเวกเตอร์ของสนามความเร็ว $u = \frac{y}{x^2 + y^2}$; $v = \frac{-x}{x^2 + y^2}$

วิธีทำ จาก $\xi = \nabla \times \vec{V}$

$$\begin{aligned}
 &= \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{y}{x^2 + y^2} & \frac{-x}{x^2 + y^2} & 0 \end{vmatrix} \\
 &= \hat{i}[0 - 0] - \hat{j}[0 - 0] + \hat{k} \left[\frac{(x^2 + y^2)(-1) + x(2x)}{x^2 + y^2} - \frac{(x^2 + y^2)(-1) + x(2x)}{x^2 + y^2} \right] \\
 &= 0\hat{i} + 0\hat{j} + 0\hat{k} = 0
 \end{aligned}$$

เพราะฉะนั้นสนามการไหลเป็นแบบไร้การหมุน (Irrotational) ทุกจุดยกเว้นที่ $x^2 + y^2 = 0$ ตอบ

2.8.3 อัตราการแปรรูป (Strain Rate)

อนุภาคของไหลที่เคลื่อนที่ในสนามความเร็วจะพบการแปรรูปเนื่องจากการที่แต่ละส่วนของอนุภาคเคลื่อนที่ด้วยความเร็วที่ต่างกัน ในวิชากลศาสตร์เราพิจารณาการแปรรูปเป็นสองแบบคือการยืดออกหรือหดเข้าของความยาวด้านซึ่งทำให้เกิดการเปลี่ยนแปลงปริมาตรเรียกความเค้นตึงฉาก

(Normal strain) กับการบิดเบี้ยวของรูปร่างจากการลู่เข้าหากันของด้านที่ประกบกันเรียกว่า ความเค้นเฉือน (Shear strain) ความเค้นตั้งฉากจะเกี่ยวข้องกับเกรเดียนต์ $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial v}{\partial y}$ และ $\frac{\partial w}{\partial z}$ ตามที่แสดงให้เห็นแล้วในหัวข้อ 2.7.1 สำหรับความเค้นเฉือนถ้ากลับไปดูหัวข้อ 2.7.2 คงพอสรุปได้ว่าอัตราการบิดเบี้ยวเข้าหากันของด้านที่ประกบกัน (รูป 2.7 ค) แสดงอัตราการความเค้นเฉือน (Rate of shear strain) ของอนุภาคของไหลและต้องเกี่ยวข้องกับเกรเดียนต์ $\frac{\partial u}{\partial y}$, $\frac{\partial u}{\partial z}$, $\frac{\partial v}{\partial x}$, $\frac{\partial v}{\partial z}$, $\frac{\partial w}{\partial x}$ และ $\frac{\partial w}{\partial y}$ พิจารณารูป 2.7 ค บนระนาบ xy อัตราการเกิดความเค้นเฉือนระหว่างด้าน AB และ AD จะเท่ากับอัตราที่ด้านทั้งสองหมุนเข้าหาซึ่งเท่ากับ $\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}$ ให้ ϵ_{xy} เป็นอัตราการเกิดความเค้นเฉือนบนระนาบ xy จะได้

$$\epsilon_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}$$

ให้ τ_{xy} เป็นแรงเค้นเฉือนที่ทำบนหน้าตั้งฉากกับแกน x และ τ_{yx} เป็นแรงเค้นเฉือนที่ทำบนหน้าตั้งฉากกับแกน y ตามรูป 2.10 พิจารณาโมเมนต์รอบจุด A จะได้

$$\tau_{yx} dx dy dz - \tau_{xy} dx dy dz = I_z \dot{\omega}_z \quad (2.32)$$

เมื่อ $\dot{\omega}_z$ คือ ความเร่งเชิงมุมรอบแกน z ของอนุภาค I_z คือโมเมนต์เฉื่อย (moment of inertia) รอบแกน z แต่

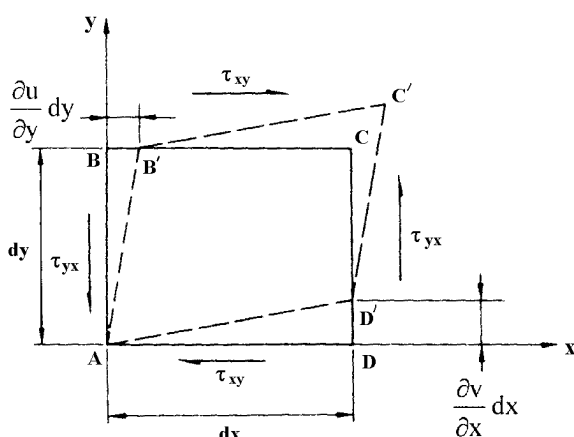
$$I_z = \rho dx dy dz k_z^2$$

เมื่อ k_z คือ radius of gyration รอบจุด A ในระนาบ xy ของอนุภาคของไหลและ k_z จะมีค่าอยู่ในลำดับของ dx หรือ dy ดังนั้นอาจสรุปได้ว่าค่าของ I_z จะแปรผันกับ $\rho dV(dx)^2$ เพราะฉะนั้นเทอมทางขวาของสมการ (2.32) จะมีลำดับของขนาดน้อยกว่าเทอมทางซ้ายถึงสองลำดับ เมื่อให้

ขนาดของอนุภาคของไหลเข้าสู่ศูนย์ (เล็กมากจนเป็นจุด) เทอมทางขวาซึ่งเป็น dx^5 จะเข้าสู่ศูนย์เร็วกว่าเทอมทางซ้ายซึ่งเป็นเทอม dx^3 ดังนั้นสำหรับการประมาณอันดับสมการ (2.32) จะเป็น

$$\tau_{yx} dx dy dz - \tau_{xy} dx dy dz = 0$$

นั่นคือความเค้นเฉือนบนอนุภาค τ_{yx} จะเท่ากับ τ_{xy} เสมอ จากนิยามของความหนืดในหัวข้อ 1.2.5 สมการ (1.7) และจากรูป 2.10 จะเห็นว่าความเครียดเฉือนบนระนาบ xy ต้องเป็นผลจากแรงเฉือน



รูป 2.10 ความเค้นเฉือน

τ_{xy} และ τ_{yx} นั่นคือ $\tau_{xy} = \tau_{yx} \propto \epsilon_{xy}$ และค่าคงที่ของการแปรผันเท่ากับสัมประสิทธิ์ความหนืด μ ดังนั้นอาจสรุปได้ว่า

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} = \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \quad (2.33)$$

ทำนองเดียวกันความเค้นเฉือน τ_{yz} , τ_{zy} , τ_{xz} และ τ_{zx} จะทำให้เกิดความเครียดเฉือนบนหน้าที่เหลือของอนุภาคเช่นเดียวกัน คือ

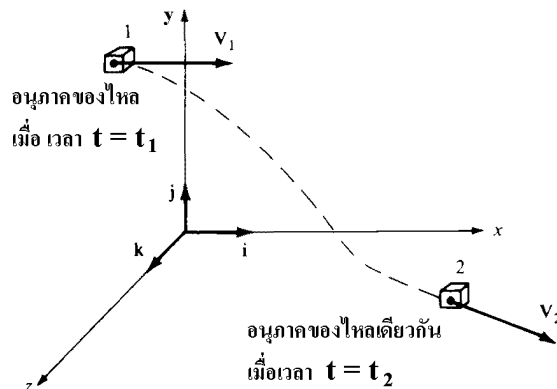
$$\text{บนระนาบ } yz \quad \epsilon_{yz} = \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}$$

$$\tau_{yz} = \tau_{zy} = \mu \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right) \quad (2.34)$$

$$\text{และบนระนาบ } xz \quad \epsilon_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}$$

$$\tau_{xz} = \tau_{zx} = \mu \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \quad (2.35)$$

2.9 อนุพันธ์สับสแตนเชียล (Substantial Derivative)



รูป 2.11 อนุพันธ์สับสแตนเชียล (Anderson, 2016)

พิจารณาอนุภาคของไหลที่เคลื่อนที่ในสนามการไหลที่กำหนดด้วยสนามความเร็ว

$$\vec{V} = u\hat{i} + v\hat{j} + w\hat{k}$$

เมื่อ $u = u(x, y, z, t)$; $v = v(x, y, z, t)$ และ $w = w(x, y, z, t)$ เป็นส่วนย่อยของความเร็วดำเนินตามแกน x , y และ z ให้ความหนาแน่นของสนามกำหนดโดย

$$\rho = \rho(x, y, z, t)$$

และให้ความหนาแน่นของอนุภาคของไหลอันหนึ่งที่เคลื่อนที่ไปในสนามเป็น

$$\rho' = \rho'(t)$$

เมื่อเวลา t_1 อนุภาคของไหลอยู่ที่ตำแหน่ง 1 ในรูป 2.11 และมีความหนาแน่น

$$\rho'_1(t_1) = \rho(x_1, y_1, z_1, t_1)$$

ในที่นี้ ρ'_1 คือความหนาแน่นของอนุภาคของไหล ณ เวลา t_1 หรือเมื่ออนุภาคอยู่ที่ตำแหน่ง (x_1, y_1, z_1) ณ ตำแหน่งนี้และเวลานี้ความหนาแน่นของสนาม $\rho(x_1, y_1, z_1, t_1)$ คือความหนาแน่นของอนุภาคที่เราพิจารณานั้นเองเพราะตำแหน่งทับกันพอดี ต่อมาเมื่อเวลา t_2 อนุภาคเคลื่อนที่ไปสู่จุด 2 ในรูป 2.11 ณ ตำแหน่งใหม่นี้ความหนาแน่นของอนุภาคเปลี่ยนไปเป็น

$$\rho'_2(t_2) = \rho(x_2, y_2, z_2, t_2)$$

ดังนั้นถ้ากระจายค่า ρ โดยใช้อนุกรมเทย์เลอร์รอบจุด 1 จะได้ว่า

$$\begin{aligned} \rho(x_2, y_2, z_2, t_2) = & \rho(x_1, y_1, z_1, t_1) + \left(\frac{\partial \rho}{\partial x}\right)_1 (x_2 - x_1) + \left(\frac{\partial \rho}{\partial y}\right)_1 (y_2 - y_1) + \left(\frac{\partial \rho}{\partial z}\right)_1 (z_2 - z_1) \\ & + \left(\frac{\partial \rho}{\partial t}\right)_1 (t_2 - t_1) + \frac{1}{2!} \left(\frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2}\right)_1 (x_2 - x_1)^2 + \dots + \frac{1}{3!} \left(\frac{\partial^3 \rho}{\partial x^3}\right)_1 (x_2 - x_1)^3 + \dots \end{aligned}$$

หารตลอดด้วย $(t_2 - t_1)$ และตัดทิ้ง เทอมที่มีกำลังสองขึ้นไปจะได้

$$\begin{aligned} \frac{\rho(x_2, y_2, z_2, t_2) - \rho(x_1, y_1, z_1, t_1)}{t_2 - t_1} = & \left(\frac{\partial \rho}{\partial x}\right)_1 \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} + \left(\frac{\partial \rho}{\partial y}\right)_1 \frac{y_2 - y_1}{t_2 - t_1} \\ & + \left(\frac{\partial \rho}{\partial z}\right)_1 \frac{z_2 - z_1}{t_2 - t_1} + \left(\frac{\partial \rho}{\partial t}\right)_1 \end{aligned} \quad (2.36)$$

พิจารณาแต่ละเทอมในสมการ (2.36) เทอม $\frac{\rho(x_2, y_2, z_2, t_2) - \rho(x_1, y_1, z_1, t_1)}{t_2 - t_1}$ ทางซ้าย

ของสมการเท่ากับ $\frac{\rho'_2(t_2) - \rho'_1(t_1)}{t_2 - t_1}$ ซึ่งเป็นอัตราการเปลี่ยนแปลงความหนาแน่นโดยเฉลี่ยของ

อนุภาคของไหลขณะเคลื่อนที่จากจุด 1 ไปจุด 2 ในขีดจำกัด $t_2 \rightarrow t_1$ เทอมนี้จะเป็น

$$\frac{D\rho}{Dt} = \lim_{t_2 \rightarrow t_1} \frac{\rho(x_2, y_2, z_2, t_2) - \rho(x_1, y_1, z_1, t_1)}{t_2 - t_1} \equiv \lim_{t_2 \rightarrow t_1} \frac{\rho'_2 - \rho'_1}{t_2 - t_1} = \frac{d\rho}{dt}$$

ในที่นี้ $\frac{D\rho}{Dt}$ เป็นสัญลักษณ์แทนอัตราการเปลี่ยนแปลงของสนามความหนาแน่น ณ จุด 1 เรียก

สัญลักษณ์ $\frac{D}{Dt}$ ว่า “อนุพันธ์สับสแตนเชียล”(Substantial derivative) สังเกตว่า $\frac{D\rho}{Dt}$ จะเท่ากับ

$\frac{d\rho}{dt}$ ซึ่งเป็นอัตราการเปลี่ยนแปลงความหนาแน่นของอนุภาคของไหลที่เคลื่อนที่ไปในสนามในชั่วขณะที่กำลังจะขยับออกจากจุด 1 นั่นคือเราจับตามองอนุภาคที่กำลังเคลื่อนที่ไปและสังเกตการเปลี่ยนแปลง

ความหนาแน่นของมันขณะผ่านจุด 1 อันนี้จะแตกต่างจาก $\left(\frac{\partial \rho}{\partial t}\right)_1$ ซึ่งแสดงการเปลี่ยนแปลงของ ρ ของ

จุด 1 เมื่อเวลาผ่านไป สำหรับ $\left(\frac{\partial \rho}{\partial t}\right)_1$ เราจับตามองจุด 1 ไว้ตลอดเวลาและสังเกตการเปลี่ยนแปลง

ความหนาแน่นที่เกิดจากการที่สนามมีการเปลี่ยนแปลงขึ้นลง ดังนั้น $\frac{D\rho}{Dt}$ กับ $\frac{\partial\rho}{\partial t}$ จึงเป็นปริมาณที่ต่างกันทั้ง ความหมายทางกายภาพและค่าที่อาจวัดได้ กลับไปที่สมการ (2.36) สังเกตว่าในขีดจำกัด $t_2 \rightarrow t_1$

$$\lim_{t_2 \rightarrow t_1} \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} = u ; \quad \lim_{t_2 \rightarrow t_1} \frac{y_2 - y_1}{t_2 - t_1} = v ; \quad \lim_{t_2 \rightarrow t_1} \frac{z_2 - z_1}{t_2 - t_1} = w$$

สมการ (2.36) จะเป็น

$$\frac{D\rho}{Dt} = u \frac{\partial\rho}{\partial x} + v \frac{\partial\rho}{\partial y} + w \frac{\partial\rho}{\partial z} + \frac{\partial\rho}{\partial t} \quad (2.37)$$

จากสมการ (2.37) จะเห็นว่าในพิกัดคาร์ทีเซียน อนุพันธ์สับสแตนเชียล แสดงด้วยสมการ

$$\frac{D}{Dt} \equiv \frac{\partial}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial y} + w \frac{\partial}{\partial z} \quad (2.38)$$

หรือถ้าใช้สัญลักษณ์ $\vec{V} \equiv \hat{i} \frac{\partial}{\partial x} + \hat{j} \frac{\partial}{\partial y} + \hat{k} \frac{\partial}{\partial z}$ สมการ (2.38) จะเป็น

$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + (\vec{V} \cdot \vec{\nabla}) \quad (2.39)$$

สมการ (2.39) เป็นนิยามของอนุพันธ์สับสแตนเชียลในสัญลักษณ์เวกเตอร์ และอาจนำไปใช้กับพิกัดอื่นได้เช่นกัน ในสมการ (2.39) เทอม $\frac{\partial}{\partial t}$ เป็นอนุพันธ์ประจำตำบล (Local derivative) ซึ่งแสดงการเปลี่ยนแปลง ณ จุดใดจุดหนึ่งเทียบกับเวลา ส่วนเทอม $\vec{V} \cdot \vec{\nabla}$ เป็นอนุพันธ์จร (Convective derivative) ซึ่งแสดงการเปลี่ยนแปลงเนื่องจากการเปลี่ยนตำแหน่งของอนุภาคของไหลจากจุดหนึ่งไปยังจุดอื่นที่คุณสมบัติของการไหลเปลี่ยนไป ในตัวอย่างที่ได้กล่าวมาเราใช้ความหนาแน่นเป็นคุณสมบัติของการไหลที่พิจารณาแต่ขอให้จำไว้ว่าอนุพันธ์สับสแตนเชียล (Substantial derivative) นำไปใช้ได้กับคุณสมบัติของการไหลทุกตัวที่เขียนในรูปคุณสมบัติของสนามทั้งที่เป็นสเกลาร์และเวกเตอร์ ตัวอย่างเช่น

$$\frac{DT}{Dt} \equiv \frac{\partial T}{\partial t} + (\vec{V} \cdot \vec{\nabla})T \equiv \frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} + w \frac{\partial T}{\partial z} \quad (2.40)$$

สมการ (2.40) แสดงการเปลี่ยนแปลงอุณหภูมิของอนุภาคของไหลขณะเคลื่อนที่ผ่านไปในสนามการไหล การเปลี่ยนแปลงจะประกอบจากการเปลี่ยนแปลง ณ จุดใดจุดหนึ่ง เพราะจุดนั้นอุณหภูมิอาจเปลี่ยนแปลงขึ้นลงตามเวลา (Local derivative) และการเปลี่ยนแปลงเพราะอนุภาคของไหลกำลังจะเคลื่อนที่ไปยังจุดอื่นในสนามที่มีอุณหภูมิเปลี่ยนไป (Convective derivative)

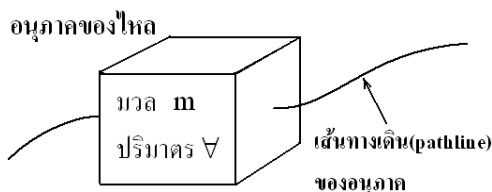
2.10 สมการการไหลต่อเนื่อง: สมการพื้นฐานอันดับแรก (Continuity Equation)

คงจำได้ว่าสมการพื้นฐานอันดับแรกได้จากกฎการของมวล นั่นคือในขณะที่อนุภาคของไหลเคลื่อนที่ไปในสนามมวลของมันจะต้องคงที่ ให้ ρ และ $\forall$ เป็นความหนาแน่นและปริมาตรของอนุภาค จากกฎทรงมวลจะได้ว่าขณะเคลื่อนที่ไปมวลของอนุภาคของไหลไม่เปลี่ยนแปลง นั่นคือ

$$\frac{D(\rho\forall)}{Dt} = 0$$

$$\rho \frac{D\forall}{Dt} + \forall \frac{D\rho}{Dt} = 0$$

$$\frac{1}{\rho} \frac{D\rho}{Dt} = -\frac{1}{\forall} \frac{D\forall}{Dt}$$



จากสมการ(2.27) ในหัวข้อ 2.7.1

รูป 2.12 อนุภาคของไหลขณะเคลื่อนที่

$$\frac{1}{\forall} \frac{d\forall}{dt} = \frac{1}{\forall} \frac{D\forall}{Dt} = \vec{\nabla} \cdot \vec{V}$$

แทนค่ากลับในสมการข้างบนจะได้

$$\frac{1}{\rho} \frac{D\rho}{Dt} = -\vec{\nabla} \cdot \vec{V} \Rightarrow \frac{D\rho}{Dt} + \rho(\vec{\nabla} \cdot \vec{V}) = 0$$

แทนค่าอนุพันธ์สับสแตนเชียล (Substantial derivative) $\frac{D\rho}{Dt} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + (\vec{V} \cdot \vec{\nabla})\rho$ จะได้

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + (\vec{V} \cdot \vec{\nabla})\rho + \rho(\vec{\nabla} \cdot \vec{V}) = 0$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{V}) = 0 \quad (2.41)$$

สมการ (2.41) คือสมการการไหลต่อเนื่อง (Continuity equation) ในรูปอนุพันธ์

สำหรับการไหลคงตัว (Steady flow) $\rho = \rho(x, y, z)$ สมการการไหลต่อเนื่องจะลดรูปลงเหลือ

$$\vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{V}) = 0 \quad (2.42)$$

และสำหรับการไหลไร้การอัดตัว $\rho = \text{constant}$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{V} = 0 \quad (2.43)$$

ขอให้สังเกตความสอดคล้องของสมการ (2.43) กับข้อสรุปในหัวข้อ 2.7.1

2.11 สมการโมเมนตัม: สมการพื้นฐานตัวที่ 2 (Momentum Equation)

กฎเกณฑ์อีกข้อหนึ่งสำหรับอนุภาคของไหลที่เคลื่อนที่ไปในสนามการไหลคือกฎของนิวตันที่ว่าอัตราการเปลี่ยนแปลงของโมเมนตัมจะเท่ากับแรงภายนอกที่มากระทำ นั่นคือ

$$\Sigma \vec{F} = m \frac{d\vec{V}}{dt}$$

พิจารณาอนุภาคของไหลที่มีด้าน dx, dy, dz ขนานกับแกน x, y, z ตามรูป 2.13 มวลของอนุภาคคำนวณจากความหนาแน่นคูณปริมาตร

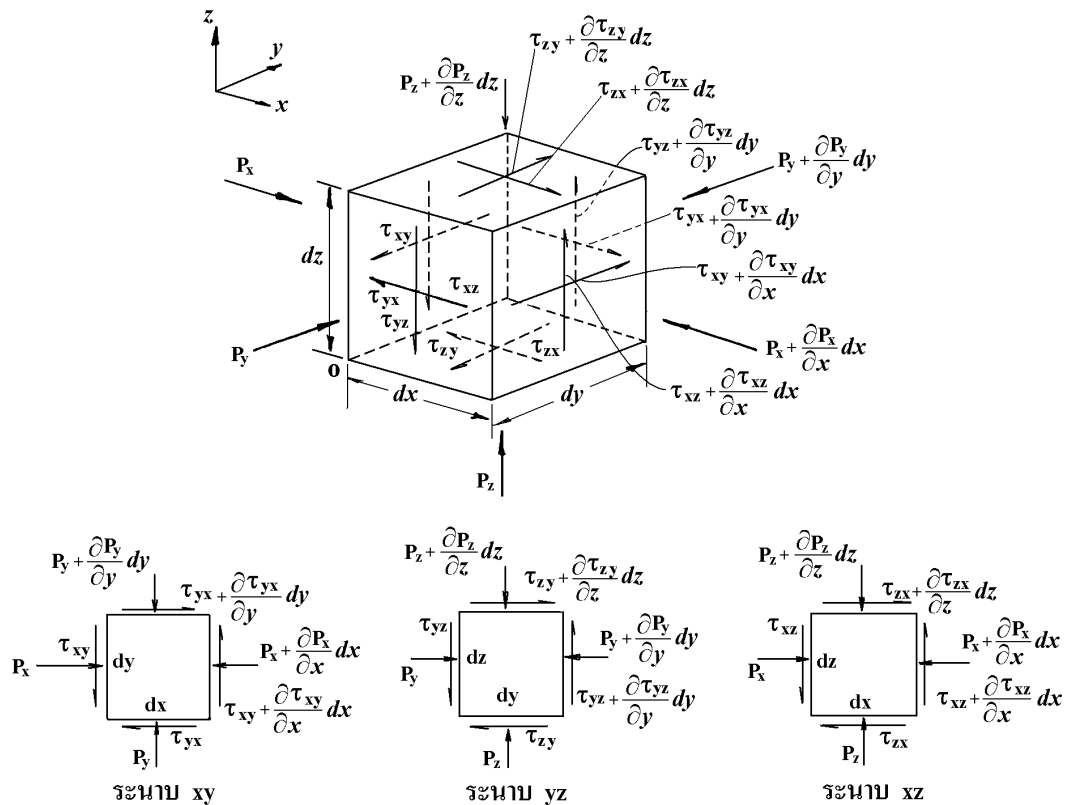
$$m = \rho dV = \rho dx dy dz$$

และอัตราการเปลี่ยนแปลงโมเมนตัมคำนวณจากมวลคูณความเร่ง

$$(\rho dV) \frac{D\vec{V}}{Dt} = (\rho dV) \left(\frac{Du}{Dt} \hat{i} + \frac{Dv}{Dt} \hat{j} + \frac{Dw}{Dt} \hat{k} \right)$$

พิจารณาอนุภาคของไหลในรูป 2.13 จะเห็นว่าแรงที่กระทำจากภายนอกแบ่งได้เป็น 3 กลุ่ม คือ

1. แรงเนื่องจากแรงเค้นที่ทำตั้งฉากกับด้านทั้ง 6
2. แรงเนื่องจากแรงเค้นเฉือนบนด้านทั้ง 6
3. แรงเนื่องจากน้ำหนักของอนุภาคของไหลหรือแรงในเนื้อ (Body force) เนื่องจากอิทธิพลบางอย่าง เช่น แรงแม่เหล็กไฟฟ้า หรือนิวเคลียร์



รูป 2.13 แรงกระทำบนอนุภาคของไหล (Kueth & Chow, 1997)

เพื่อความสะดวกเราพิจารณาผลของแรงตามแกนต่างๆ เป็นอิสระแยกจากกันได้ดังนี้
ตามแกน x ผลลัพธ์ของแรงจากทั้ง 3 กลุ่ม เป็น

$$\begin{aligned} \Sigma \bar{F}_x = & \rho g_x dx dy dz + P_x dy dz - \left(P_x + \frac{\partial P_x}{\partial x} dx \right) dy dz + \left(\tau_{yx} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} dy \right) dz dx \\ & - \tau_{yx} dz dx + \left(\tau_{zx} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} dz \right) dx dy - \tau_{zx} dx dy \end{aligned}$$

$$= dx dy dz (\rho g_x - \frac{\partial P_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z})$$

เมื่อ g_x คือส่วนย่อยของความโน้มถ่วง $\bar{g}$ ตามแกน x

เพราะฉะนั้นจากกฎข้อสองของนิวตัน

$$\begin{aligned} \rho dx dy dz \frac{Du}{Dt} &= dx dy dz (\rho g_x - \frac{\partial P_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z}) \\ \rho \frac{Du}{Dt} &= \rho g_x - \frac{\partial P_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} \end{aligned} \quad (2.44a)$$

ทำนองเดียวกันตามแกน y และ z เราจะได้สมการ

$$\rho \frac{Dv}{Dt} = \rho g_y - \frac{\partial P_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} \quad (2.44b)$$

$$\rho \frac{Dw}{Dt} = \rho g_z - \frac{\partial P_z}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} \quad (2.44c)$$

ในสมการ (2.44) แรงเค้นตึงฉาก (Normal stress) P_x , P_y และ P_z จะประกอบด้วยสองส่วน ส่วนหนึ่งคือความดัน p ที่กดลงบนผิวโดยรอบกับอีกส่วนเป็นแรงเค้นเนื่องจากความหนืด μ เรียกว่า แรงเค้นจากความหนืด (Viscous normal stress) ให้ τ_{xx} , τ_{yy} และ τ_{zz} เป็นแรงเค้นตึงฉาก (Normal stress) เนื่องจากความหนืดที่ทำบนด้านตั้งฉากกับแกน x , y , z เพราะฉะนั้น

$$P_x = p - \tau_{xx}$$

$$P_y = p - \tau_{yy}$$

$$P_z = p - \tau_{zz}$$

$$\rho \frac{Du}{Dt} = \rho g_x - \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} \quad (2.45a)$$

$$\rho \frac{Dv}{Dt} = \rho g_y - \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} \quad (2.45b)$$

$$\rho \frac{Dw}{Dt} = \rho g_z - \frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zz}}{\partial z} \quad (2.45c)$$

แทนอนุพันธ์สับสแตนเชียล $\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + (\bar{V} \cdot \bar{\nabla})$ ลงในสมการและใช้ความสัมพันธ์จากสมการต่อเนื่อง

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \bar{\nabla} \cdot (\rho \bar{V}) = 0 \quad \text{จะได้}$$

$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial t} = \bar{\nabla} \cdot (\rho u \bar{V}) = \rho g_x - \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} \quad (2.46a)$$

$$\frac{\partial(\rho v)}{\partial t} = \bar{\nabla} \cdot (\rho v \bar{V}) = \rho g_y - \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} \quad (2.46b)$$

$$\frac{\partial(\rho w)}{\partial t} = \bar{\nabla} \cdot (\rho w \bar{V}) = \rho g_z - \frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zz}}{\partial z} \quad (2.46c)$$

สมการ (2.45) และ (2.46) คือสมการโมเมนตัมตามแกน x, y และ z ตามลำดับ ในสมการความเค้นเนื่องจากความหนืดจะมีความสัมพันธ์กับเกรเดียนต์ของความเร็วดังนี้ ใช้ความสัมพันธ์จากหัวข้อ 2.7.3 จะได้

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} = \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \quad (2.33)$$

$$\tau_{yz} = \tau_{zy} = \mu \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \quad (2.34)$$

$$\tau_{xz} = \tau_{zx} = \mu \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \quad (2.35)$$

นอกจากนี้เราอาจแสดงให้เห็นได้ด้วยว่า τ_{xx} , τ_{yy} และ τ_{zz} มีความสัมพันธ์กับอนุพันธ์ของความเร็ว u, v, w ในรูป

$$\tau_{xx} = \lambda \vec{\nabla} \cdot \vec{V} + 2\mu \frac{\partial u}{\partial x} \quad (2.47a)$$

$$\tau_{yy} = \lambda \vec{\nabla} \cdot \vec{V} + 2\mu \frac{\partial v}{\partial y} \quad (2.47b)$$

$$\tau_{zz} = \lambda \vec{\nabla} \cdot \vec{V} + 2\mu \frac{\partial w}{\partial z} \quad (2.47c)$$

ความสัมพันธ์ตามสมการ (2.33) ถึง (2.35) และ สมการ (2.47) พิสูจน์ให้เห็นได้ง่ายๆ เพียงแต่ต้องอาศัยความรู้ในเรื่องกลศาสตร์ตัวกลางต่อเนื่อง (Continuum Mechanic) มาช่วยซึ่งอยู่นอกเหนือเนื้อหาของเราจึงจะทิ้งไว้ให้นักเรียนศึกษาเองจากเอกสารอ้างอิง ในสมการ (2.47) λ คือสัมประสิทธิ์ตัวหนึ่งที่ถือเป็นคุณสมบัติของของไหลหนืด (Viscous fluid) เรียกว่า “สัมประสิทธิ์ที่สองของความหนืด” (Second coefficient of viscosity) สำหรับอากาศ Stoke ได้ตั้งสมมติฐานไว้ว่า

$$\lambda = -\frac{2}{3}\mu \quad (2.48)$$

แทนความสัมพันธ์ของ ความเค้นจากความหนืด τ_{xx} , τ_{yy} , τ_{zz} , τ_{xy} , τ_{yz} , τ_{xz} กับเกรเดียนต์ของความเร็วตามสมการ (2.33) - (2.35) และสมการ (2.47) ลงในสมการ (2.46) จะได้สมการโมเมนตัมที่บอกความสัมพันธ์ระหว่าง ความเร็ว ความหนาแน่น และความดัน ที่เรียกว่า สมการเนเวียร์-สโตค (Navier – Stokes equation) รายละเอียดของสมการนี้จะได้กล่าวภายหลังการศึกษาเรื่องการไหลหนืด (Viscous flow)

สังเกตว่าสำหรับอากาศแรงเนื่องจากน้ำหนักจะมีค่าน้อยเมื่อเทียบกับแรงอื่น และถ้าเราพิจารณาการไหลในย่านที่สมมติให้เป็นการไหลไร้ความหนืด (Inviscid flow) นั่นคือ ไม่มีผลจากความหนืดมาเกี่ยวข้องสมการโมเมนตัมจะลดรูปลงเป็น

$$\rho \frac{Du}{Dt} = -\frac{\partial p}{\partial x} \quad (2.49a)$$

$$\rho \frac{Dv}{Dt} = -\frac{\partial p}{\partial y} \quad (2.49b)$$

$$\rho \frac{Dw}{Dt} = -\frac{\partial p}{\partial z} \quad (2.49c)$$

เพราะว่าเนื้อหาในบทที่ 3, 4, 5 จะเกี่ยวข้องกับการไหลแบบไร้ความหนืดที่ไม่มีน้ำหนักมาเกี่ยวข้อง สมการ (2.49) จึงจะเป็นสมการหลักของเราต่อไป สมการโมเมนตัมในรูปของสมการ (2.49) คือสมการที่เรียกกันว่าสมการของออยเลอร์ (Euler equation) นั่นเอง

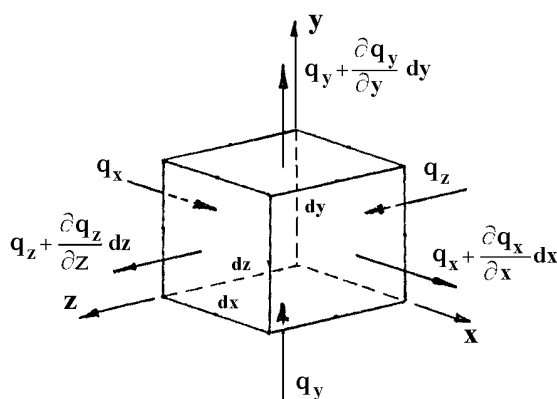
2.12 สมการพลังงาน: สมการพื้นฐานตัวที่ 3 (Energy Equation)

ขณะเคลื่อนที่ไปในสนามการไหลอนุภาคของไหลมีการเปลี่ยนแปลงระดับของพลังงานที่เป็นไปตามกฎข้อที่ 1 ของเทอร์โมไดนามิกส์ คือเท่ากับอัตราการถ่ายเทความร้อนสุทธิที่อนุภาค ได้รับจากสิ่งแวดล้อมบวกกับอัตรางานที่ได้รับหรือให้กับสิ่งแวดล้อมพิจารณาอนุภาคของไหลขนาด $dx dy dz$ (dV) ที่เคลื่อนที่ไปในสนาม กฎทรงพลังงานจะกำกับให้อัตราสุทธิของพลังงานที่อนุภาคได้รับต้องเท่ากับอัตราการเปลี่ยนแปลงพลังงานที่บรรจุอยู่ในมวลของอนุภาค พลังงานที่ถ่ายเทเข้าสู่อนุภาคของไหลจะเกิดขึ้นจากทางใดทางหนึ่งดังต่อไปนี้

1. จากการนำความร้อนผ่านเข้าออกโดยตรงผ่านด้านทั้งหกด้านของอนุภาคของไหล
2. งานที่เกิดจากแรงกระทำที่ผิวทั้งหกด้านของอนุภาคของไหล ได้แก่ ความดัน และแรงเค้นเนื่องจากความหนืด
3. งานที่เกิดจากแรงกระทำต่อมวลในอนุภาคของไหล เช่น น้ำหนัก
4. ความร้อนที่กำเนิดขึ้นในเนื้อของอนุภาคของไหลเนื่องจากปฏิกิริยาเคมี เช่น การสันดาปของเชื้อเพลิง หรือจากคุณสมบัติทางไฟฟ้าหรือนิวเคลียร์

และการเปลี่ยนแปลงระดับของพลังงานที่บรรจุในอนุภาคของไหลจะเกิดขึ้นในรูปแบบ

5. การเปลี่ยนแปลงพลังงานจลน์ (Kinetic energy)
6. การเปลี่ยนแปลงพลังงานภายใน (Internal energy)



รูป 2.14 แสดงการนำความร้อนผ่านเข้าออกอนุภาคของไหล (Kuethe & Chow, 1997)

เพื่อความสะดวกเราจะพิจารณาทีละเทอม

1. อัตราการถ่ายเทความร้อนเข้าสู่อนุภาคของไหล

พิจารณาตามรูป 2.14 ให้ q_x เป็นอัตราการนำความร้อนผ่านด้าน $x = 0$ เพราะฉะนั้น $q_x + \frac{\partial q_x}{\partial x} dx$ จะเป็นอัตราการนำความร้อนออกจากอนุภาคผ่านด้าน $x = dx$ เพราะฉะนั้นอัตราการถ่ายเทความร้อนสุทธิผ่านหน้าตั้งฉากกับแกน x จะเป็น

$$\begin{aligned}\text{อัตราการนำความร้อนสุทธิผ่านด้านตั้งฉากแกน } x &= q_x - (q_x + \frac{\partial q_x}{\partial x} dx) \\ &= -\frac{\partial q_x}{\partial x} dx\end{aligned}$$

ทำนองเดียวกันสำหรับหน้าตั้งฉากกับแกน y และ z จะเป็น

$$\text{อัตราการนำความร้อนสุทธิผ่านด้านตั้งฉากแกน } y = -\frac{\partial q_y}{\partial y} dy$$

$$\text{อัตราการนำความร้อนสุทธิผ่านด้านตั้งฉากแกน } z = -\frac{\partial q_z}{\partial z} dz$$

จากกฎของ Fourier อัตราการถ่ายเทความร้อนผ่านหน้าตัดใดจะขึ้นอยู่กับค่าเกรเดียนของอุณหภูมิข้ามพื้นที่และขนาดของพื้นที่ เพราะฉะนั้น

$$q_x = -k \frac{\partial T}{\partial x} dydz$$

$$q_y = -k \frac{\partial T}{\partial y} dxdz$$

$$q_z = -k \frac{\partial T}{\partial z} dxdy$$

ในสมการ k คือค่าสัมประสิทธิ์การนำความร้อนของของไหล เครื่องหมายลบถูกใช้เนื่องจากความร้อนจะไหลจากที่มีอุณหภูมิสูงไปต่ำเสมอ

ให้ $\dot{Q}'$ เป็นอัตราการถ่ายเทความร้อนสุทธิผ่านเข้าออกอนุภาคของไหลต่อหน่วยปริมาตร ผ่านด้านทั้งหกเพราะฉะนั้น

$$\dot{Q}' dxdydz = \left\{ \frac{\partial}{\partial x} k \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} k \left(\frac{\partial T}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} k \left(\frac{\partial T}{\partial z} \right) \right\} dxdydz \quad (2.50)$$

2. อัตรางานที่เกิดจากความดันและความหนืด

ก่อนอื่นพิจารณาอัตราการทำงานของแรงจากความดันบนหน้าตั้งฉากกับแกน x บนหน้าด้านซ้ายความดัน p ทำให้เกิดแรงกดบนพื้นที่ $p dydz$ และทำให้เกิดงานในอัตรา $p dydz$ บนหน้าด้านขวาความดันทำให้เกิดแรงกดบนพื้นที่ $(p + \frac{\partial p}{\partial x} dx) dydz$ และทำให้เกิดงานบนอนุภาคในอัตรา

$$-(p + \frac{\partial p}{\partial x} dx) (u + \frac{\partial u}{\partial x} dx) dydz$$

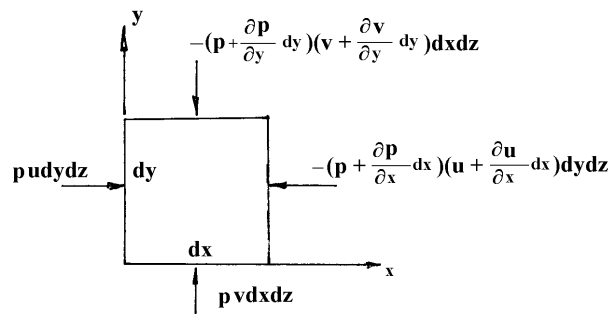
ดังนั้นอัตราการทำงาน เนื่องจากแรงจากความดันสุทธิในทิศทาง x จะเป็น

$$-(u \frac{\partial p}{\partial x} + p \frac{\partial u}{\partial x}) dx dy dz \Rightarrow -\frac{\partial(pu)}{\partial x} dx dy dz$$

ทำนองเดียวกันงานสุทธิจากความดันในทิศทาง y และ z จะเป็น

$$-(v \frac{\partial p}{\partial y} + p \frac{\partial v}{\partial y}) dx dy dz \Rightarrow -\frac{\partial(pv)}{\partial y} dx dy dz$$

$$-(w \frac{\partial p}{\partial z} + p \frac{\partial w}{\partial z}) dx dy dz \Rightarrow -\frac{\partial(pw)}{\partial z} dx dy dz$$



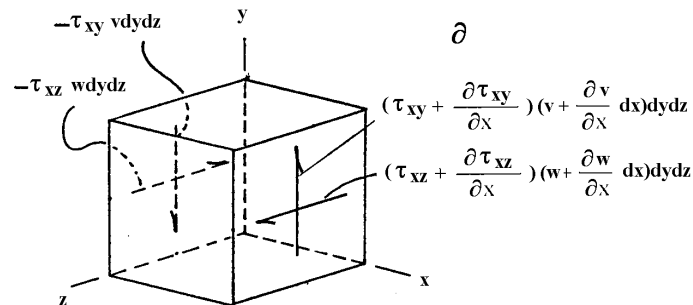
รูป 2.15 งานจากแรงฉก (Kueth & Chow, 1997)

เพราะฉะนั้นอัตราของงานเนื่องจากความดันที่ทำบนอนุภาคจะเป็น

$$-(\frac{\partial(pu)}{\partial x} + \frac{\partial(pv)}{\partial y} + \frac{\partial(pw)}{\partial z}) dx dy dz \quad (2.51)$$

ด้วยการพิจารณาแบบเดียวกันนี้งานเนื่องจากแรงหนืด τ_{xx} , τ_{yy} และ τ_{zz} จะเป็น

$$\left[\frac{\partial(\tau_{xx} u)}{\partial x} + \frac{\partial(\tau_{yy} v)}{\partial y} + \frac{\partial(\tau_{zz} w)}{\partial z} \right] dx dy dz \quad (2.52)$$



รูป 2.16 งานจากแรงเฉือนบนหน้าตั้งฉากกับแกน x (Kueth & Chow, 1997)

ต่อไปพิจารณาอัตราการทำงานเนื่องจากแรงเฉือนบนด้านตั้งฉากกับแกน x บนด้าน $x = 0$ งานจาก τ_{xy} ที่ทำในทางแกน y มีอัตรา $-\tau_{xy} v dy dz$ และงานจาก τ_{xz} ที่ทำในทางแกน z มีอัตรา $-\tau_{xz} w dy dz$ ส่วนบนด้าน $x = dx$ งานเนื่องจากแรงเฉือนในทิศทาง y จะเป็น

$$\tau_{xy}vdydz + \frac{\partial}{\partial x} \tau_{xy}vdx dydz$$

ดังนั้นอัตรางานเนื่องจากแรงเฉือนบนด้านตั้งฉากกับแกน x สุทธิ จะเท่ากับ

$$\frac{\partial}{\partial x} (\tau_{xy}v + \tau_{xz}w) dx dydz$$

ทำนองเดียวกันบนด้านตั้งฉากกับแกน y และ z อัตรางานจากแรงเฉือนจะเป็น

$$\frac{\partial}{\partial y} (\tau_{yz}w + \tau_{yx}u) dx dydz$$

$$\frac{\partial}{\partial z} (\tau_{zx}u + \tau_{zy}v) dx dydz$$

เพราะฉะนั้น อัตราของงานเนื่องจากแรงหนืดทั้งหมดสุทธิจะเป็น

$$= \left[\frac{\partial(\tau_{xx}u)}{\partial x} + \frac{\partial(\tau_{yx}u)}{\partial y} + \frac{\partial(\tau_{zx}u)}{\partial z} + \frac{\partial(\tau_{xy}v)}{\partial x} + \frac{\partial(\tau_{yy}v)}{\partial y} + \frac{\partial(\tau_{zy}v)}{\partial z} + \frac{\partial(\tau_{xz}w)}{\partial x} + \frac{\partial(\tau_{yz}w)}{\partial y} + \frac{\partial(\tau_{zz}w)}{\partial z} \right] dx dydz \quad (2.53)$$

เพื่อความสะดวกเราจะรวมเรียกผลบวกในวงเล็บใหญ่ด้วยสัญลักษณ์ $\dot{W}'_{\text{viscous}}$

3. งานที่เกิดจากน้ำหนักของอนุภาคของไหล

อัตรางานเนื่องจากน้ำหนักของอนุภาคของไหลได้จากผลคูณของน้ำหนักกับความเร็วมวลของอนุภาค เพราะฉะนั้น

$$\text{งานเนื่องจากน้ำหนัก} = (\rho \vec{g} dx dy dz)(\vec{V}) = \rho(\vec{g} \cdot \vec{V}) dx dy dz$$

4. ความร้อนที่เกิดขึ้นในเนื้ออนุภาคของไหล

ให้ $\dot{q}$ เป็นอัตราการกำเนิดความร้อนต่อหน่วยปริมาตรในเนื้ออนุภาค เพราะฉะนั้น

$$\text{อัตราความร้อนที่เกิดขึ้นในเนื้อ} = \rho \dot{q} dx dy dz$$

5 & 6 การเปลี่ยนแปลงพลังงานจลน์และพลังงานภายในของ particle

$$\text{พลังงานจลน์ของอนุภาค} = \rho dx dy dz \frac{V^2}{2}$$

$$\text{เมื่อ } V^2 = \vec{V} \cdot \vec{V} = u^2 + v^2 + w^2$$

ให้ e เป็นพลังงานภายในต่อหน่วยมวลของอนุภาค

$$\text{พลังงานภายในของอนุภาค} = \rho e dx dy dz$$

$$\text{เพราะฉะนั้น ระดับพลังงานของอนุภาคของไหล} = \rho \left(e + \frac{V^2}{2} \right) dx dy dz$$

สมการพลังงานได้จากเทอมทั้งหมดในข้อ 1 ถึง 6

อัตราการเปลี่ยนแปลงพลังงาน = ความร้อนและงานที่แลกเปลี่ยนกับสิ่งแวดล้อม

แทนค่าแต่ละเทอมจากข้อ 1 ถึง 6 จะได้

$$\rho + \frac{D(e + \frac{v^2}{2})}{Dt} dx dy dz = \rho \dot{q} dx dy dz - \left(\frac{\partial(pu)}{\partial x} + \frac{\partial(pv)}{\partial y} + \frac{\partial(pw)}{\partial z} \right) dx dy dz + \dot{Q}' dx dy dz + \dot{W}'_{\text{viscous}} dx dy dz + \rho(\bar{g} \cdot \bar{V}) dx dy dz$$

เมื่อ $\dot{Q}'$ และ $\dot{W}'_{\text{viscous}}$ แทนเทอมในสมการ (2.50) และ (2.53) ตัด $dx dy dz$ ทั้งทั้งสองข้างและแทน $\frac{\partial(pu)}{\partial x} + \frac{\partial(pv)}{\partial y} + \frac{\partial(pw)}{\partial z} = \bar{\nabla} \cdot (p\bar{V})$ จะได้สมการพลังงาน

$$\rho + \frac{D(e + \frac{v^2}{2})}{Dt} = \rho \dot{q} - \bar{\nabla} \cdot (p\bar{V}) + \rho(\bar{g} \cdot \bar{V}) + \dot{Q}' + \dot{W}'_{\text{viscous}} \quad (2.54)$$

สมการ (2.54) เป็นสมการพลังงานในรูปอนุพันธ์ (Differential form) ซึ่งรวมเอาเทอมที่เกี่ยวข้องที่เป็นไปได้ทั้งหมดไว้ในสมการ แต่ไม่ได้คิดการเปลี่ยนแปลงพลังงานศักย์ เนื่องจากการเปลี่ยนระดับรวมไว้ด้วย เพราะในปัญหาที่เราสนใจอนุภาคของไหลจะเคลื่อนที่ไปในบริเวณซึ่งเปลี่ยนระยะสูงไม่มาก (เช่น การไหลอ้อมแพนอากาศ) แต่ถ้าสนามการไหลมีขอบเขตที่มีการเปลี่ยนระยะสูงมาก ต้องเพิ่มเอาเทอม gz คือพลังงานศักย์ต่อหน่วยมวลเข้ารวมกับพลังงานจลน์กับพลังงานภายในในสมการด้วย

ถ้าเราพิจารณาการไหลไร้ความหนืด ($\dot{W}'_{\text{viscous}} = 0$) ที่ไม่มีการถ่ายเทความร้อน (Adiabatic, $\dot{Q}' = 0$) และไม่คิดงานจากน้ำหนักสำหรับอากาศที่เบา ($p\bar{g} = 0$) รวมทั้งไม่มีการกำเนิดความร้อน ($\dot{q} = 0$) ซึ่งก็คือการพิจารณากระแสอากาศที่ไหลแบบมีการอัดตัว นอกชั้นขีดผิวที่เป็นปัญหาพื้นฐานอันหนึ่งในวิชาอากาศพลศาสตร์สมการพลังงานจะเป็น

$$\rho + \frac{D(e + \frac{v^2}{2})}{Dt} = -\bar{\nabla} \cdot (p\bar{V}) \quad (2.55)$$

ถ้าการไหลเป็นแบบคงตัว (Steady) สมการ (2.55) จะลดรูปลงเป็น

$$\rho \left(\bar{V} \cdot \bar{\nabla} (e + \frac{v^2}{2}) \right) = -\bar{\nabla} \cdot (p\bar{V}) \quad (2.56)$$

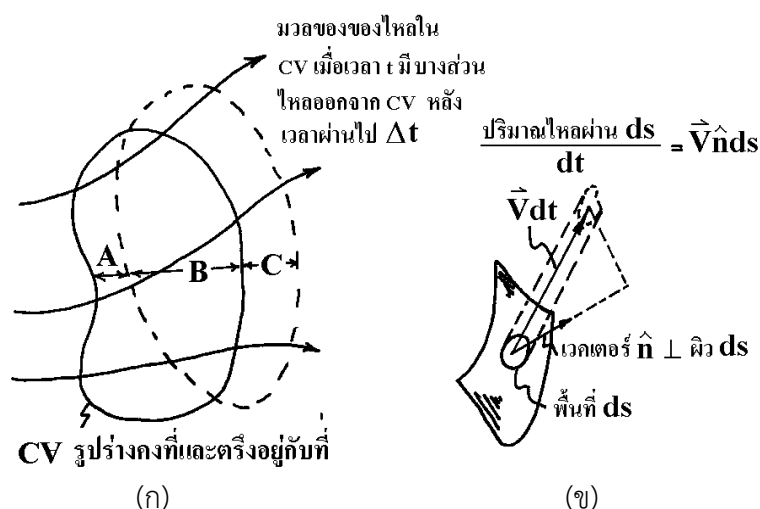
สมการพลังงาน (2.56) มีตัวแปรเพิ่มขึ้นมาอีกหนึ่งตัวนอกเหนือจาก $\bar{V}, p, \rho$ คือ e เพราะฉะนั้นเราจึงมีความสัมพันธ์ตามสมการ 3 สมการ คือ สมการต่อเนื่อง สมการโมเมนตัม และสมการพลังงานของตัวแปรสี่ตัว การแก้สมการจะทำได้ก็ต่อเมื่อมีสมการที่ 4 มาเพิ่มเพื่อให้จำนวนสมการเท่ากับจำนวนตัวแปร สมการที่ 4 ก็คือ สมการสถานะของก๊าซ (Equation of state)

$$p = \rho RT \quad (1.3)$$

มองดูอาจน่าสงสัย เพราะในสมการนี้มีตัวแปร T เพิ่มมาอีกเป็นตัวที่ 5 สมการน่าจะน้อยกว่าตัวแปร แต่อย่าลืมว่าความสัมพันธ์ระหว่าง e กับ T มาจากเทอร์โมไดนามิกส์ สำหรับก๊าซสมบูรณ์ (Perfect gas), $e = c_v T$ เมื่อ c_v คือค่าความร้อนจำเพาะเมื่อปริมาตรคงที่ (Specific heat at constant volume) ซึ่งทำให้จำนวนตัวแปรกับจำนวนสมการสมดุลกัน

ขอให้สังเกตว่าในกรณีที่ทั่วไปและไม่อยู่ในข้อจำกัดข้างต้น เทอมที่ประกอบด้วยแรงหนืด หรือการถ่ายเทความร้อนที่จะมาปรากฏเพิ่มในสมการ เช่น τ Q' มีความสัมพันธ์กับความเร็ว $\vec{V}$ และอุณหภูมิ T อย่างในสมการ (2.33), (2.34), (2.35), (2.47) และ (2.50) อยู่ทุกเทอม ดังนั้นก็พอสรุปได้ว่า สมการต่อเนื่อง สมการโมเมนตัม สมการพลังงาน และสมการสภาวะ มีตัวแปรในสมการที่เราต้องแก้หาค่าคือ p , T , ρ และ $\vec{V}$ และจุดที่น่าสนใจอีกจุดหนึ่งคือ ถ้าเราพิจารณาการไหลที่ไร้การอัดตัว หรือ ρ คงที่ (และไม่มีการถ่ายเทความร้อน) สมการต่อเนื่องและสมการโมเมนตัมก็เพียงพอที่จะแก้หาความสัมพันธ์ระหว่างความเร็วกับความดันที่แต่ละจุดของสนามการไหล พุดอีกอย่างหนึ่งก็คือถ้าการไหลไม่มีการอัดตัว (ความหนาแน่นมีค่าคงที่) ตัวแปรในสมการต่อเนื่องและสมการโมเมนตัมจะเหลือเพียงความสัมพันธ์ระหว่าง $\vec{V}$ กับ p ในกรณีนี้อาจสรุปได้ว่า สำหรับการไหลไร้การอัดตัวความเร็วจะเปลี่ยนแปลงสัมพันธ์กับความดัน และความสัมพันธ์นี้จะหาได้จากสมการต่อเนื่องและสมการโมเมนตัม ส่วนสมการพลังงานจะเข้ามาเกี่ยวข้องเมื่อมีการเปลี่ยนแปลงสนามของอุณหภูมิ (เมื่อมีการอัดตัวหรือเมื่อมีการถ่ายเทความร้อน) เกิดขึ้นในสนามการไหลด้วย

2.13 การพิจารณาความสัมพันธ์ตามกฎเกณฑ์พื้นฐานโดยใช้ปริมาตรควบคุม



รูป 2.17 ปริมาตรควบคุม (Anderson, 2016)

ในหัวข้อที่ผ่านมาเราพิจารณาการเปลี่ยนแปลง มวล โมเมนตัม และพลังงานของอนุภาคของไหลที่ประกอบด้วยมวลแน่นอนจำนวนหนึ่งที่เคลื่อนที่ไปในสนามการไหลเสมอ เราอาจพิจารณาความสัมพันธ์ตามกฎเกณฑ์ดังกล่าวได้อีกวิธีหนึ่งที่แตกต่างออกไปโดยพิจารณาการเปลี่ยนแปลงมวล โมเมนตัม และพลังงานของของไหลที่บรรจุอยู่ในบริเวณที่กำหนดขึ้นมาในสนามการไหล ขอบเขตที่

กำหนดขึ้นนี้เราเรียกว่าปริมาตรควบคุม (Control volume, CV) และให้พื้นที่ผิวสมมติที่ล้อมรอบปริมาตรควบคุมเรียกว่าพื้นผิวควบคุม (Control surface, CS)

สมมติให้ปริมาตรควบคุมมีรูปร่างแน่นอนและตรึงอยู่กับที่ในบริเวณหนึ่งของการไหล ในแต่ละช่วงเวลาจะมีมวลของของไหลไหลเข้าออกปริมาตรควบคุมผ่านพื้นผิวควบคุม การพิจารณา มวล โมเมนตัม และพลังงาน ที่สะสมในปริมาตรควบคุมจึงต้องพิจารณาการไหลเข้าออกของมวล โมเมนตัม และพลังงาน ที่ไหลมาพร้อมกระแสด้วย

พิจารณาปริมาตรควบคุมที่ล้อมรอบด้วยเส้นทึบ (ปริมาตร A + B) ในรูป 2.17 ก ให้มวลของของไหลในปริมาตรควบคุมเมื่อเวลา t เป็นระบบที่เราจะพิจารณาการเปลี่ยนแปลงของมวล โมเมนตัม และพลังงาน หลังเวลาผ่านไป Δt มวลในปริมาตรควบคุมจะเคลื่อนที่ไปอยู่ในบริเวณที่ล้อมรอบด้วยเส้นประ (ปริมาตร B + C) เพราะฉะนั้นในปริมาตร C จะเป็นมวลของของไหลที่ไหลผ่านพื้นผิวควบคุมออกมาจากปริมาตรควบคุมและมวลในปริมาตร A จะเป็นมวลของของไหลที่ไหลจากนอกปริมาตรควบคุมเข้าไปแทนที่มวลในปริมาตรควบคุมในช่วงเวลา Δt ให้ M เป็นคุณสมบัติใดๆ (มวล โมเมนตัม พลังงาน) ของของไหลและให้ β เป็นคุณสมบัติต่อหน่วยมวลของ M (M/m) ดังนั้นอาจพิจารณาการเปลี่ยนแปลงได้ดังนี้

$$\text{เมื่อเวลา } t \text{ คุณสมบัติของมวลในปริมาตรควบคุม} = M_A(t) + M_B(t)$$

$$\text{หลังเวลาผ่านไป } \Delta t \text{ คุณสมบัติของมวลจำนวนเดิม} = M_B(t+\Delta t) + M_C(t+\Delta t)$$

ดังนั้นการเปลี่ยนแปลงคุณสมบัติ M ของระบบในช่วง Δt จะเป็น

$$\Delta M = [M_B(t + \Delta t) + M_C(t + \Delta t)] - [M_A(t) + M_B(t)]$$

หารตลอดด้วย Δt ในขีดจำกัด $\Delta t \rightarrow 0$ จะได้

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta M}{\Delta t} &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{[M_B(t + \Delta t) - M_B(t)] + [M_C(t + \Delta t) - M_A(t)]}{\Delta t} \\ \frac{d(M_{\text{syst}})}{dt} &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{[M_B(t + \Delta t) - M_B(t)] + [M_C(t + \Delta t) - M_A(t)]}{\Delta t} \end{aligned}$$

$d(M_{\text{syst}})/dt$ คืออัตราการเปลี่ยนแปลงคุณสมบัติ M ของระบบ ส่วนทางขวาของสมการในขีดจำกัด $\Delta t \rightarrow 0$ เทอมแรก $M_B(t + \Delta t) - M_B(t)$ จะแทนอัตราการเปลี่ยนแปลงคุณสมบัติ M ในปริมาตรควบคุมที่ล้อมรอบด้วยพื้นผิวควบคุม

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{M_B(t + \Delta t) - M_B(t)}{\Delta t} = \frac{d}{dt} \iiint_{CV} \beta \rho dV = \iiint_{CV} \frac{\partial}{\partial t} (\beta \rho) dV$$

เทอมที่สองจะแทนอัตราที่คุณสมบัติกำลังจะไหลออกจากปริมาตรควบคุมลบด้วยอัตราที่คุณสมบัติกำลังจะไหลเข้าปริมาตรควบคุมผ่านพื้นผิวควบคุม รูป 2.17 ข แสดงอัตราการไหลของปริมาตร (Volume flow rate) ผ่านพื้นที่ผิวเล็กๆ dS ที่มีหน่วยเวกเตอร์ตั้งฉาก (Unit normal) $\hat{n}$ ถ้าให้ $\hat{n}$ ของพื้นผิวควบคุมเป็นเวกเตอร์ที่ชี้ออกจากปริมาตรควบคุมจะเห็นได้ว่า

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{M_C(t + \Delta t) - M_A(t)}{\Delta t} = \iint_{CS} \beta \rho (\vec{V} \cdot \hat{n}) dS$$

จะได้ความสัมพันธ์

$$\frac{d(M_{syst})}{dt} = \iiint_{CV} \frac{\partial}{\partial t} (\beta \rho) dV + \iint_{CS} \beta \rho (\vec{V} \cdot \hat{n}) dS \quad (2.57)$$

ใน (2.57) ถ้า M_{syst} เป็นมวล $\beta = 1$

ถ้า M_{syst} เป็นโมเมนตัม $\beta = \vec{V}$

ถ้า M_{syst} เป็นพลังงาน $\beta = (e + \frac{V^2}{2})$

อัตราการเปลี่ยนแปลงของมวล โมเมนตัม และพลังงานของระบบสัมพันธ์กับมวลโมเมนตัม และพลังงานของมวลในปริมาตรควบคุม และมวล โมเมนตัม และพลังงานที่ไหลผ่านพื้นผิวควบคุมเข้าออกปริมาตรควบคุมตามสมการ (2.57)

สมมติว่ากำลังพิจารณามวลของระบบ

$$\frac{d(m_{syst})}{dt} = 0 = \iiint_{CV} \frac{\partial}{\partial t} (\rho) dV + \iint_{CS} \rho (\vec{V} \cdot \hat{n}) dS \quad (2.58)$$

สมการ (2.58) บอกเราว่าอัตราการไหลสุทธิของมวลออกจากปริมาตรควบคุมจะเท่ากับอัตราการลดลงของมวลภายในปริมาตรควบคุม และถ้าสนามการไหลเป็นแบบคงตัว $\iiint_{CV} \frac{\partial}{\partial t} (\rho) dV = 0$ อัตราไหลเข้าต้องเท่ากับอัตราไหลออก $\dot{m}_m = \dot{m}_{out}$ ซึ่งคือสมการที่เราใช้พิจารณาเสมอในกลศาสตร์ของไหล ในสมการ (2.58) ถ้าเราใช้ความสัมพันธ์ตามทฤษฎีของ Gauss ที่เรียกว่าทฤษฎีไดเวอร์เจน (Divergence theorem) จะได้

$$\iint_{CS} \rho (\vec{V} \cdot \hat{n}) dS = \iiint_{CV} \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{V}) dV$$

แทนใน (2.58)

$$\begin{aligned} \iiint_{CV} \frac{\partial \rho}{\partial t} dV + \iiint_{CV} \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{V}) dV &= 0 \\ \iiint_{CV} \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{V}) \right) dV &= 0 \end{aligned}$$

ซึ่งแสดงว่าในเมื่อปริมาตรควบคุมมีขนาดแน่นอน (ไม่เป็นศูนย์) อินทิเกรตจะเป็นศูนย์ก็ต่อเมื่อเทอมในวงเล็บเป็นศูนย์

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{V}) = 0 \quad (2.41)$$

คือสมการเดียวกับสมการ (2.41) ในหัวข้อ 2.9 นั้นเอง ถึงจะมีจุดเริ่มต้นคนละอย่างแต่ผลสรุปเป็นอย่างเดียวกัน เพราะเป็นตัวแทนของกฎพื้นฐานเดียวกันคือ มวลจะต้องคงที่ไม่สามารถสร้างขึ้นเองหรือทำลายลงได้ เพียงแต่สมการ (2.41) แสดงความสัมพันธ์นี้ที่แต่ละจุดในการไหล ส่วนสมการ (2.59) แสดงผลที่เกิดขึ้นโดยรวมกับปริมาตรควบคุม ที่มีบริเวณแน่นอนอันหนึ่ง

ทำนองเดียวกันถ้า M ที่พิจารณาเป็นโมเมนต์ ทางซ้ายของสมการ (2.57) จะเป็น

$$\frac{d(m\bar{V})}{dt} = \Sigma \bar{F} = \text{แรงภายนอกที่กระทำกับระบบ}$$

เนื่องจากระบบของเราอยู่ในปริมาตรควบคุม เพราะฉะนั้นแรงภายนอกที่กระทำจึงกระทำที่ผิวของปริมาตรควบคุมรวมกับแรงกระทำเนื่องจากแรงในเนื้อมวล (Body force) ของมวลในปริมาตรควบคุมนั่นเอง เพราะฉะนั้นจะมีความสัมพันธ์

$$\Sigma \bar{F} = \iiint_{CV} \frac{\partial(\rho \bar{V})}{\partial t} dV + \iint_{CS} \rho \bar{V} (\bar{V} \cdot \hat{n}) dS \quad (2.59)$$

ผลรวมของแรงภายนอกที่กระทำบนปริมาตรควบคุม

= อัตราการเปลี่ยนแปลงโมเมนต์ภายในปริมาตรควบคุม
+ อัตราสุทธิที่โมเมนต์ไหลออกจากปริมาตรควบคุม

ถ้าให้

$$\text{แรงกระทำที่ผิว} = \bar{F}_s$$

$$\text{แรงจากความดัน} = - \iint_{CS} p \hat{n} dS$$

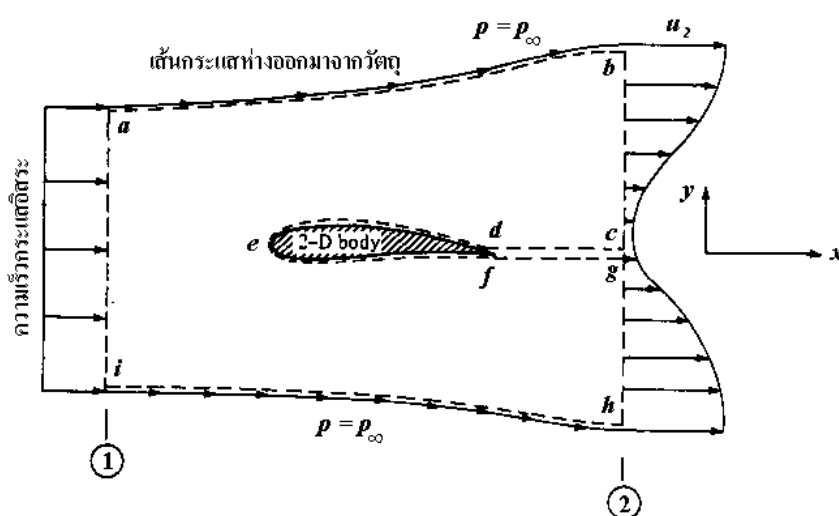
และ

$$\text{แรงจากน้ำหนัก} = \iiint_{CV} \rho g dV$$

สมการ (2.59) จะเป็น

$$\bar{F}_s - \iint_{CS} p \hat{n} dS + \iiint_{CV} \rho g dV = \iiint_{CV} \frac{\partial(\rho \bar{V})}{\partial t} dV + \iint_{CS} \rho \bar{V} (\bar{V} \cdot \hat{n}) dS \quad (2.60)$$

สมการ (2.60) สามารถเอาไปใช้งานได้อย่างน่าสนใจ ตามตัวอย่างต่อไปนี้



รูป 2.18 ปริมาตรควบคุมรอบแพนอากาศในอุโมงค์ลม (Anderson, 2016)

การทดสอบหาแรงยกและแรงต้านของรูปแพนอากาศ ทำได้โดยติดตั้งรูปแพนอากาศที่มีความยาวตลอดทั้งหน้าตัดของส่วนทดลองของอุโมงค์ลม โดยยึดปลายปีกทั้งสองข้างไว้กับผนังอุโมงค์ทั้งสอง

ด้าน ซึ่งทำให้การไหลผ่านของกระแสอากาศ มีลักษณะเป็นสองมิติ การวัดแรง ไม่สามารถทำได้โดยการติดตั้งแบบจำลองกับเครื่องวัดแรง เพราะปีกถูกตรึงไว้กับผนัง แต่การวัดแรงยกทำได้โดยการวัดความดันที่แจกแจงบนเพดานและพื้นอุโมงค์ด้านบนและด้านล่างของแบบจำลอง ส่วนแรงต้านได้จากการวัดความเร็วกระแสด้านท้ายลมเทียบกระแสลมที่เป็นแบบสม่ำเสมอ (Uniform) ด้านหน้าของแบบจำลอง ในตอนแรกวิธีการวัดแรงยกและแรงต้านนี้อาจดูแปลก แต่เมื่อพิจารณาดี ๆ แล้วมันใช้หลักการตามสมการ (2.60) นั่นเอง

พิจารณาปริมาตรควบคุมที่มีพื้นผิวควบคุมตามรูป 2.18 ซึ่งเป็นปริมาตรควบคุมสำหรับการไหลสองมิติลึกลงไปในหน้ากระดาษ 1 หน่วย ล้อมรอบด้วย

1. เส้นกระแสห่างจากปีกไปด้านบนและด้านล่าง (ab และ hi ตามลำดับ)
2. เส้นตั้งฉากกับความเร็วยังไปทางด้านหน้าและด้านหลังของแบบจำลอง (ai และ bh)
3. รอยตัดล้อมรอบผิวแพนอากาศ (edefg)

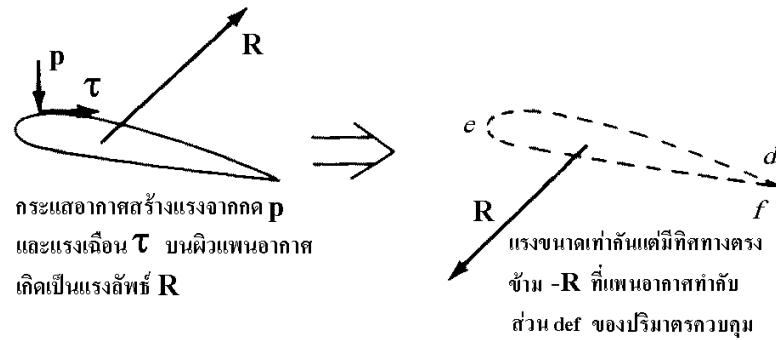
ปริมาตรควบคุม abcdefghia มีกระแสไหลเข้าที่ตำแหน่ง 1 ผ่านหน้า ai และไหลออกที่ตำแหน่ง 2 ผ่านหน้า bh ส่วนด้าน ab และด้าน ih ทับเส้นกระแสจึงไม่มีกระแสไหลข้าม สมมติให้เส้นรอบรูป abhi อยู่ห่างออกมาจากพอที่ความดันจะมีค่าเท่ากันตลอดเท่ากับความดันของกระแสอิสระ $p = p_\infty$ พร้อมทั้งให้ความเร็วไหลเข้าผ่านหน้า 1 มีค่าสม่ำเสมอ u_1 ตลอด ai (อย่างที่ควรจะเป็นในการไหลจริงหรือในอุโมงค์ลม) แต่ความเร็วไหลออกผ่านหน้า 2 จะไม่สม่ำเสมอผ่าน bh เพราะการไหลผ่านแพนอากาศ ทำให้เกิดกระแสลวนไปทางด้านหลัง อย่างไรก็ตามสมมติให้ u_1 และ u_2 อยู่ในทิศทาง x เพราะฉะนั้น $u_1 = \text{cont.}$ และ $u_2 = f(y)$

แรงที่ทำบนพื้นผิวปริมาตรควบคุมพิจารณาได้จากสองส่วน คือ

1. จากความดันที่กดอยู่โดยรอบบนด้าน abhi $= - \iint_{abhi} p \cdot \hat{n} \, ds$
2. แรงทำบนผิว def ที่ทับกับผิวแพนอากาศ

ทั้ง 2 ส่วนเราไม่คิดแรงเฉือนบนผิว abhi เพราะจะมีค่าน้อยมาก (บริเวณที่ห่างผิววัตถุออกมาเกรเดียนความเร็วจะน้อย) และแรงที่เกิดบนรอยตัด cd และ fg จะมีขนาดเท่ากันแต่ทิศทางตรงข้าม เพราะฉะนั้นจะหักล้างกันหมดไป และแรงบนผิว def จะมีขนาดเท่ากัน แต่มีทิศทางตรงข้ามกับแรงจากความดันและแรงเฉือนบนแพนอากาศ รูป 2.19 แสดงการไหลผ่านแพนอากาศ กระแสจะสร้างความดันและแรงเฉือนบนผิวซึ่งมีแรงลัพธ์เท่ากับ R' ต่อหน่วยความยาว ในทางกลับกัน แพนอากาศจะออกแรงในรูปความดันและแรงเฉือนแบบเดียวกันแต่ทิศทางตรงข้ามกับกระแสหรือกับ พื้นผิวควบคุมตามกฎข้อสามของนิวตัน แพนอากาศจะออกแรง $-R'$ บนส่วน def ของพื้นผิวควบคุมดังแสดงไว้ทางขวาของรูป เพราะฉะนั้นจะได้ผลรวมแรงที่ทำบนผิวปริมาตรควบคุม ทั้งหมดเป็น

$$\Sigma \vec{F} = \iiint_{CV} \hat{p} \hat{n} \, dS - \vec{R}'$$



รูป 2.19 แรงบนแพนอากาศ (Anderson, 2016)

เมื่อไม่คิดแรงจากน้ำหนักรวมนี้จะเป็นแรงรวมทั้งหมดที่ทำกับปริมาตรควบคุมในรูป 2.18 แทนค่าลงในสมการ (2.60) จะได้

$$\iiint_{CV} \frac{\partial(\rho \vec{V})}{\partial t} dV + \iint_{CS} \rho \vec{V} (\vec{V} \cdot \hat{n}) dS = \iint_{abhi} p \hat{n} dS - \vec{R}'$$

สมมติให้การไหลเป็นแบบคงตัวสมการจะเป็น

$$\vec{R}' = - \iint_{CS} (\rho \vec{V} \cdot \hat{n}) \vec{V} dS - \iint_{abhi} p \hat{n} dS \quad (2.61)$$

สมการ (2.61) เป็นสมการเวกเตอร์ สามารถแยกออกเป็นส่วนย่อย (Component) ตามแกน x และ y ได้ส่วนย่อยของ $\vec{R}'$ ตามแกน x คือ D' เพราะฉะนั้น

$$\begin{aligned} D' &= - \iint_{CS} (\rho \vec{V} \cdot \hat{n}) u dS - \iint_{abhi} p (\hat{n} \cdot \hat{i}) dS \\ D' &= - \iint_{CS} (\rho \vec{V} \cdot \hat{n}) u dS - \iint_{abhi} (pdS) \end{aligned} \quad (2.62)$$

ในกรณีนี้บน abhi $p = p_\infty$ เท่ากันตลอดเพราะเราเลือกพื้นผิวควบคุมให้ห่างออกจากแพนอากาศ

$$\iint_{abhi} (pdS)_x = 0$$

$(pdS)_x$ คือส่วนของแรงกดบนพื้นที่ dS จากความดัน p ไปในทิศทาง x และในกรณีนี้มีค่าเป็น 0 เพราะว่า เมื่อมองไปตามแกน x ในรูป 2.18 แรงดันไปทางขวาจากความดัน p จะพอดีเท่ากับแรงที่ดันกลับไปทางซ้ายเนื่องจากความดัน p ไม่ว่ารูปร่าง abhi จะเป็นอย่างไรก็ตาม トラบที่ความดัน p มีค่าคงที่โดยรอบพื้นผิว ดังนั้นสมการ (2.62) จะเป็น

$$D' = - \iint_{CS} (\rho \vec{V} \cdot \hat{n}) u dS \quad (2.63)$$

ในสมการ (2.63) ค่าอินทิเกรตทางขวาของสมการประมาณบนพื้นผิวควบคุมทั้งหมดจะเห็นว่าส่วน ab hi และ def คือเป็นเส้นกระแสที่ไม่มีการไหลผ่าน ดังนั้น $\vec{V} \cdot \hat{n} = 0$ ตลอดผิวเหล่านี้ ส่วนของผิว cd และ fg เป็นด้านประชิดกัน ดังนั้นกระแสที่ไหลออกจากด้านหนึ่งจะไหลเข้าไปในด้านตรงข้าม ทำให้ผลรวมของการอินทิเกรตเป็นศูนย์ ผลคือการอินทิเกรตในสมการจะเหลือเทอมที่เป็น

โมเมนต์ไหลผ่านด้าน ai และ bh ด้าน ai และ bh มีทิศทางขนานกับแกน y และเล็ก 1 หน่วย นั่นคือ $dS = dy$ (1) และหน่วยเวกเตอร์ตั้งฉากมีทิศชี้ออกจากปริมาตรควบคุม เพราะฉะนั้นบน ai $\hat{n} = -\hat{i}$ บน bh $\hat{n} = \hat{i}$ อินทิเกรตใน (2.63) จะเป็น

$$\iint_{CS} (\rho \vec{V} \cdot \hat{n}) u \, dS = -\int_i^a \rho_1 u_1^2 dy + \int_h^b \rho_2 u_2^2 dy \quad (2.64)$$

ค่าลบของเทอมแรกทางขวาของสมการเป็นผลจากการที่ความเร็ว u_1 มีทิศทางสวนกับ $\hat{n}_1$ บนด้าน ai แสดงถึงเทอมที่เป็นโมเมนต์ไหลเข้า ตรงข้ามกับเทอมที่สองที่เป็นบวกเพราะ u_2 มีทิศทางไปทางเดียวกันกับ $\hat{n}_2$

ก่อนที่จะพิจารณาต่อไปให้มากกว่านี้เราอาจพิจารณาสมการต่อเนื่อง (2.41) สำหรับการไหล คงตัวจะได้ว่าสำหรับปัญหานี้ของเรา

$$\text{มวลไหลเข้า} = \text{มวลไหลออก}$$

$$\text{เพราะฉะนั้น} \quad \int_i^a \rho_1 u_1 dy = \int_h^b \rho_2 u_2 dy$$

หรือเมื่อคูณตลอดด้วย u_1 จะได้ (อย่าลืมว่า u_1 คงที่)

$$\int_i^a \rho_1 u_1^2 dy = \int_h^b \rho_2 u_1 u_2 dy \quad (2.65)$$

แทนใน (2.64) จะได้ความสัมพันธ์

$$\begin{aligned} \iint_{CS} (\rho \vec{V} \cdot \hat{n}) u \, dS &= -\int_i^a \rho_2 u_1 u_2 dy + \int_h^b \rho_2 u_2^2 dy \\ \text{หรือ} \quad \iint_{CS} (\rho \vec{V} \cdot \hat{n}) u \, dS &= -\int_i^a \rho_2 u_2 (u_1 - u_2) dy \end{aligned} \quad (2.66)$$

แทนไปใน (2.63) จะได้

$$D' = \int_i^a \rho_2 u_2 (u_1 - u_2) dy \quad (2.67)$$

สมการ (2.67) คือผลลัพธ์ที่เราต้องการซึ่งแสดงว่าแรงต้านบนแผ่นอากาศสามารถคำนวณได้จากความเร็วกระแสอิสระและคุณสมบัติของการไหลด้านหลังแผ่นอากาศ u_1 , u_2 และ ρ_2 ตัวแปรทั้งสามนี้สามารถวัดได้ในอุโมงค์ลม และแรงต้านต่อหน่วยความยาว D' จะประมาณได้จากสมการ (2.67) โดยใช้ค่าที่วัดได้นี้

พิจารณาสมการ (2.67) ให้ละเอียดจะเห็นว่า $(u_1 - u_2)$ คือความเร็วที่มีค่าลดลงที่ระยะ y ต่างๆ นั่นคือเพราะแรงต้านบนแผ่นอากาศจะทำให้เกิดกระแสลวนซึ่งเป็นรอยไปด้านท้ายของแผ่นอากาศ ในรอยนี้จะมีการสูญเสียความเร็วของกระแสไปเท่ากับ $(u_1 - u_2)$ จำนวน $\rho_2 u_2$ คือฟลักซ์ของมวลที่ไหลผ่านหน้า bh ในช่วง dy เมื่อนำมาคูณกับ $(u_1 - u_2)$ ก็จะเท่ากับจำนวนโมเมนต์

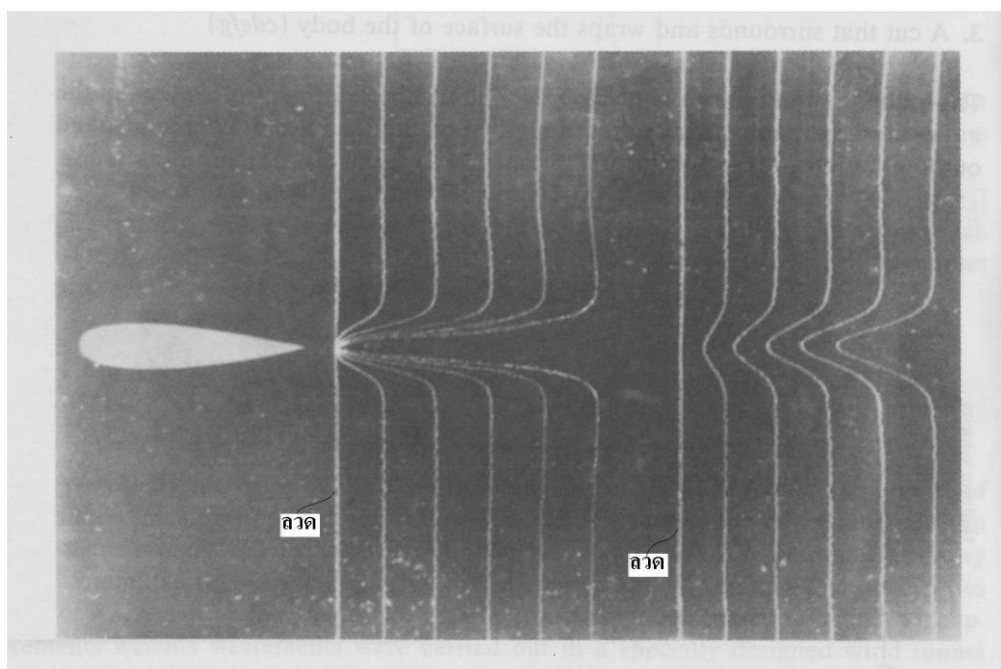
ที่สูญเสียไป ดังนั้นอินทิเกรตในสมการ (2.67) แสดงถึงการที่ค่าโมเมนตัมลดลงในรอยกระแสวน และค่าที่ลดลงนี้จะเท่ากับแรงต้านบนแผ่นอากาศ

สำหรับการไหลไร้การอัดตัว ρ มีค่าคงที่ตลอดทั้งปริมาตรควบคุม ในกรณีของเราสมการ (2.67) จะเป็น

$$D' = \rho \int_i^a u_2 (u_1 - u_2) dy \quad (2.68)$$

สมการ (2.68) แสดงให้เห็นว่าการวัดการแจกแจงความเร็ว $u(y)$ ข้ามรอยด้านหลังของแผ่นอากาศนำมาหาค่า D' ได้โดยตรง การวัดค่า $u_2(y)$ ทำได้โดยใช้แผงท่อปีโตต์ (Pitot rake) ซึ่งเป็นอุปกรณ์ที่นำเอาท่อปีโตต์หลายหลายท่อมายึดเรียงกันบนแท่งโลหะที่ระยะห่างเท่า ๆ กัน ซึ่งเมื่อนำไปวางด้านหลังวัตถุจะวัดความเร็วข้ามรอยกระแสวนในแนวตั้งได้

สำหรับการวัดแรงยกสามารถพิจารณาได้โดยวิธีคล้ายกันซึ่งจะทิ้งไว้เป็นการบ้านให้ผู้เรียนลองทำดู



รูป 2.20 ผลทดลองการไหลผ่านแผ่นอากาศ โปรไฟล์ความเร็วด้านท้ายน้ำสร้างขึ้นโดยใช้ฟองอากาศที่เกิดจากการผ่านกระแสไฟฟ้าไปในขดลวดที่ตั้งฉากกับทิศทางการไหล

ตัวอย่าง 2.4 พิจารณาการไหลไร้การอัดตัวในชั้นขีดผิวลามินาร์ของการไหลเหนือแผ่นเรียบความยาว c ตามแสดงในรูป จากการศึกษาพบว่าความหนาของชั้นขีดผิว δ ที่ท้ายหลังของแผ่นจะเป็น

$$\frac{\delta}{c} = \frac{5}{\sqrt{Re_c}}$$

และสัมประสิทธิ์แรงต้านจากแรงเสียดทาน

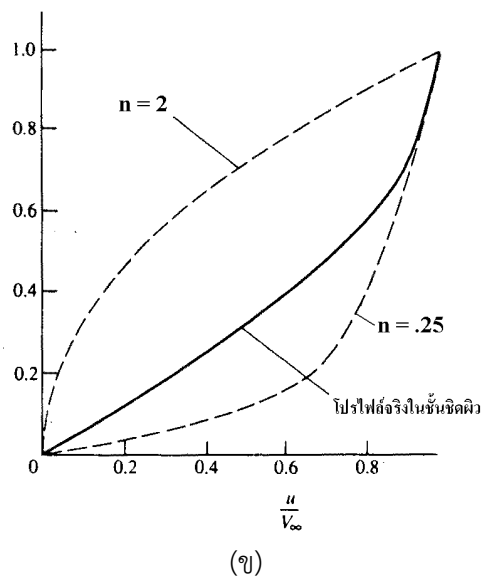
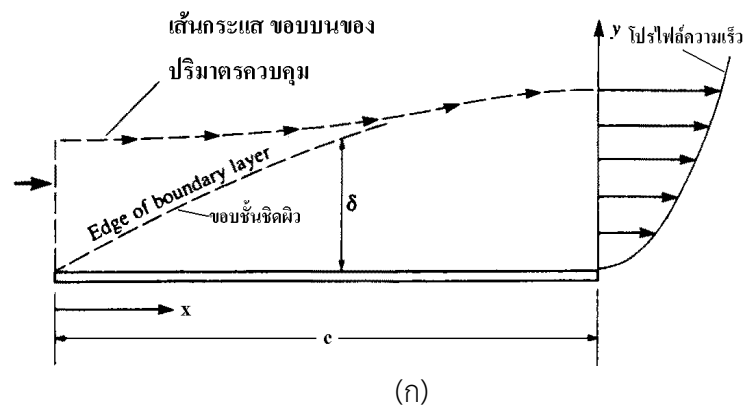
$$c_f = \frac{D'}{q_\infty c(l)} = \frac{1.328}{\sqrt{Re_c}}$$

เมื่อ Re_c คือเลขเรย์โนลด์คิดเทียบกับความยาวคอร์ด c

สมมุติว่าโปรไฟล์ของความเร็วในชั้นขีดผิวอยู่ในรูปสมการ

$$u = V_\infty \left(\frac{y}{\delta} \right)^n$$

ให้ประเมินค่า n ที่สอดคล้องกับข้อมูลที่มี



รูป 2.21 (ก) ปริมาตรควบคุมในตัวอย่าง 2.4 (ข) โปรไฟล์ความเร็วตามตัวอย่าง 2.4

(Anderson, 2016)

วิธีทำ จากสมการ (2.68) $D' = \rho \int_0^a u_2(u_1 - u_2) dy$ หาค่าโดย $q_\infty c$ จะได้

$$c_f = \frac{D'}{q_\infty c} = \frac{\rho_\infty}{\frac{1}{2} \rho_\infty V_\infty^2 c} \int_0^\delta u_2(u_1 - u_2) dy$$

เมื่อการอินทิเกรตทำที่ตำแหน่งชายหลังแผ่น ($x = c$)

$$c_f = 2 \int_0^{\delta/c} \frac{u_2}{V_\infty} \left(\frac{u_1}{V_\infty} - \frac{u_2}{V_\infty} \right) d\left(\frac{y}{c}\right)$$

สำหรับปริมาตรควบคุมในตัวอย่างนี้ $u_1 = V_\infty$ ดังนั้น

$$c_f = 2 \int_0^{\delta/c} \frac{u_2}{V_\infty} \left(1 - \frac{u_2}{V_\infty} \right) d\left(\frac{y}{c}\right)$$

แทนค่า c_f สำหรับชั้นขีตผิวลามินาร์ และค่าสมมติของโปรไฟล์ความเร็วตามโจทย์กำหนด

$$\frac{1.328}{\sqrt{Re_c}} = 2 \int_0^{\delta/c} \left(\frac{y}{\delta}\right)^n \left[1 - \left(\frac{y}{\delta}\right)^n \right] d\left(\frac{y}{c}\right)$$

$$\frac{1.328}{\sqrt{Re_c}} = 2 \int_0^{\delta/c} \left[\left(\frac{y}{\delta}\right)^n - \left(\frac{y}{\delta}\right)^{2n} \right] d\left(\frac{y}{c}\right)$$

$$\frac{1.328}{\sqrt{Re_c}} = 2 \int_0^{\delta/c} \left[\left(\frac{y/c}{\delta/c}\right)^n - \left(\frac{y/c}{\delta/c}\right)^{2n} \right] d\left(\frac{y}{c}\right)$$

หลังจากการอินทิเกรต จะได้

$$\frac{1.328}{\sqrt{Re_c}} = \frac{2}{n+1} \left(\frac{\delta}{c}\right) - \frac{2}{2n+1} \left(\frac{\delta}{c}\right)$$

แต่ $\frac{\delta}{c} = \frac{5}{\sqrt{Re_c}}$ ดังนั้น

$$\frac{1.328}{\sqrt{Re_c}} = \frac{10}{n+1} \left(\frac{1}{\sqrt{Re_c}}\right) - \frac{10}{2n+1} \left(\frac{1}{\sqrt{Re_c}}\right)$$

$$\frac{1.328}{10} = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{2n+1}$$

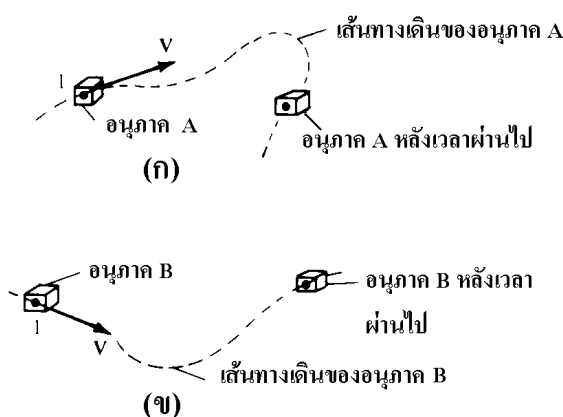
แก้สมการได้ $n = 2$ และ $n = 0.25$

ตอบ

โดยการสมมติโปรไฟล์ความเร็วเป็นแบบยกกำลังตามตัวอย่าง เราได้ลักษณะของความเร็วต่างกันสองแบบสอดคล้องกับหลักการโมเมนตัมที่ใช้กับปริมาตรควบคุมในรูป 2.21 รูปร่างของโปรไฟล์ทั้งสองแบบแสดงเทียบกับโปรไฟล์จริง สังเกตว่าค่า $n = 2$ ให้โปรไฟล์ที่มีลักษณะคอดลงซึ่งไม่สอดคล้องกับความเป็นจริง ส่วนค่า $n = 0.25$ จะได้โปรไฟล์ที่สมจริงแต่ต่างจากโปรไฟล์ของความเร็วจริงมาก ดังนั้นสมมติฐานว่าความเร็วเปลี่ยนแปลงตามสมการ $u = V_\infty \left(\frac{y}{\delta}\right)^n$ จึงไม่สมจริงนักทั้งๆ ที่ความจริงแล้ว เมื่อ $n = 2$ หรือ 0.25 โปรไฟล์สมมติจะสอดคล้องกับหลักโมเมนตัมที่เราใช้กับปริมาตรควบคุมในปัญหาก็ตาม

2.14 เส้นทางและเส้นกระแสของการไหล (Pathline & Streamlines of Flow)

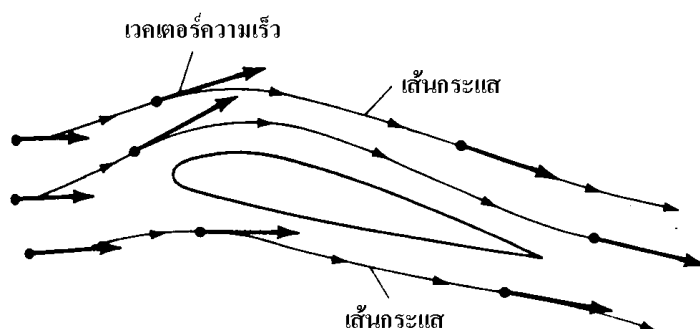
นอกจากใช้คุณสมบัติเช่นความดัน ความเร็ว และอื่นๆ เพื่ออธิบายภาพการไหลแล้วในทางอากาศพลศาสตร์ยังนิยมอธิบายการไหลโดยใช้ลักษณะการเคลื่อนที่ของของไหลซึ่งทำได้โดยการกำหนดสร้างเส้นทาง (Pathline) หรือ/และเส้นกระแส (Streamline) ของการไหลขึ้นมา ความหมายและข้อแตกต่างของเส้นทั้งสองจะได้กล่าวถึงในหัวข้อนี้



รูป 2.22 เส้นทางของอนุภาคของไหลที่ผ่านจุดจุดเดียวกันในการไหลแบบสภาวะไม่คงที่

พิจารณาสนามการไหลแบบสภาวะไม่คงที่ที่กำหนดโดยสนามความเร็ว $\vec{V}(x,y,z,t)$ พร้อมกันนั้นสังเกตการเคลื่อนที่ของอนุภาคของไหลใดๆ ที่เคลื่อนที่ไปในกระแสการไหล สมมติว่าเป็น อนุภาค A ในรูป 2.22 ให้อนุภาค A เคลื่อนที่ผ่านตำแหน่ง 1 ของการไหล ถ้าเราติดตามการเคลื่อนที่ของ A ไปอีกช่วงเวลาหนึ่ง A จะเคลื่อนออกจากตำแหน่ง 1 ตามเส้นประที่แสดงในรูป 2.22 ก เส้นทางที่ A เคลื่อนที่ไปนี้เรานิยามให้เป็นเส้นทาง (Pathline) ของอนุภาค A ต่อไปถ้าเราติดตามการเคลื่อนที่ของอนุภาคของไหลอื่นสมมติว่าเป็นอนุภาค B ตามที่แสดงในรูป 2.22 ข ให้ B เคลื่อนที่ผ่านตำแหน่ง 1 เช่นเดียวกับ A แต่เป็นคนละช่วงเวลา เส้นประในรูป 2.22 ข แสดงเส้นทางของอนุภาค B เนื่องจากสนามการไหลเป็นแบบสภาวะไม่คงที่ความเร็วของจุด 1 (รวมทั้งจุดอื่นในการไหลด้วย) จึงเปลี่ยนแปลงไปตามเวลา ดังนั้น A และ B จะเคลื่อนที่ไปตามเส้นทางที่เป็นเส้นโค้งที่ต่างกัน โดยทั่วไปสำหรับการไหลสภาวะไม่คงที่นั้นอนุภาคของไหลที่เคลื่อนที่ผ่านจุดจุดเดียวกันจะมีเส้นทางต่างกัน

ในตัวอย่าง 2.4 ได้เคยกล่าวถึงเส้นกระแส (Streamline) แล้วว่าหมายถึงเส้นโค้งซึ่งทุกจุดบนเส้นแนวสัมผัสจะอยู่ในทิศทางเดียวกับทิศทางของความเร็ว ณ จุดนั้น ตามที่แสดงในรูป 2.23 เส้นกระแสถูกวาดให้แนวสัมผัสกับเส้นที่ทุกจุดอยู่ในแนวเดียวกับความเร็วของจุดนั้น ถ้าการไหลเป็นแบบไม่คงตัว (Unsteady) รูปแบบของเส้นกระแสจะเปลี่ยนแปลงไปตามเวลา เนื่องจากความเร็วที่แต่ละจุดมีขนาดและทิศทางเปลี่ยนแปลงไปตามเวลา

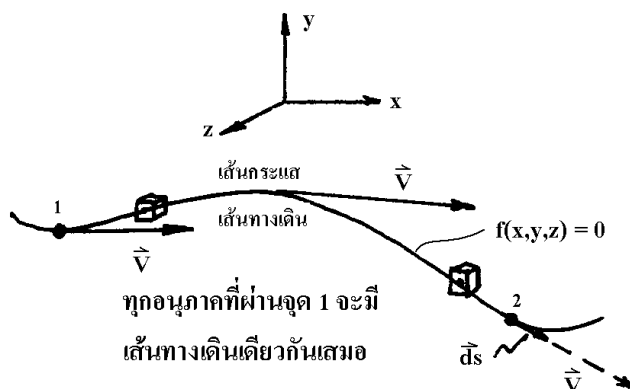


รูป 2.23 เส้นกระแส (streamline)

จะเห็นว่าโดยทั่วไปเส้นทางและเส้นกระแสของการไหลที่ผ่านจุดใดจุดหนึ่งจะแตกต่างกัน ให้นึกภาพของการถ่ายภาพติดต่อกันเป็นชุดสำหรับการเคลื่อนที่ของอนุภาคของไหลอนุภาคหนึ่งที่ตำแหน่งของอนุภาคบนภาพแต่ละภาพเมื่อนำมาเรียงกันจะได้เส้นทางที่อนุภาคเคลื่อนที่ แต่เส้นที่ลากจุดต่อจุดโดยขยับไปตามแนวของความเร็วตรงจุดนั้นทีละน้อยบนภาพแต่ละภาพจะได้เป็นเส้นโค้งซึ่งเป็นเส้นกระแสนภาพแต่ละภาพ ในการไหลสภาวะไม่คงที่ภาพที่ถ่ายแต่ละภาพจะให้เส้นกระแสที่เป็นเส้นโค้งที่ต่างกัน

อย่างไรก็ตามสำหรับการไหลที่เป็นแบบสภาวะคงตัว (ซึ่งเป็นแบบการไหลส่วนใหญ่ในปัญหาของเรา) ขนาดและทิศทางของความเร็วที่แต่ละจุดจะคงที่ไม่แปรเปลี่ยนไปกับเวลา รูปแบบการไหลจะแน่นอน อนุภาคของไหลทุกอนุภาคที่ไหลผ่านจุดเดียวกันในการไหลจะมีเส้นทางเดียวกันเสมอและยิ่งกว่านั้นก็คือเส้นทางของอนุภาคนี้จะทับเส้นกระแสที่ผ่านจุดนั้น ดังนั้นสำหรับการไหลสภาวะคงตัวจะไม่มี ความแตกต่างระหว่างเส้นทางกับเส้นกระแส เพราะเส้นทางของอนุภาคที่เคลื่อนที่ผ่านจุดจุดหนึ่งจะคงที่เสมอและเวกเตอร์ความเร็วจะอยู่ในแนวสัมผัสกับเส้นทางไปทุกจุดตลอดเส้นทาง แนวของเส้นทางจึงทับแนวของเส้นกระแส

อย่างที่ได้อธิบายไว้ในตัวอย่าง 2.1 แล้ว ในกรณีที่ทราบสนามความเร็วของการไหลเราสามารถนำมาใช้หาสมการของเส้น กระแส ได้ ขอให้สังเกตว่าเส้นกระแสคือเส้นโค้งเส้นหนึ่งซึ่งเราอาจกำหนดเทียบกับแกนพิกัดได้ด้วยสมการในรูป $f(x, y, z) = 0$ ได้เสมอ ค่าของฟังก์ชัน f สำหรับการไหลใดๆ เราหาได้จากคณิตศาสตร์ง่ายๆ ดังนี้ ให้เวกเตอร์ $d\mathbf{r}$ เป็นส่วนสั้นๆ บนเส้นเส้นกระแสที่กำหนดด้วย $f(x, y, z) = 0$ เส้นหนึ่งอย่างเช่นที่จุด 2 ในรูป 2.24 ให้ความเร็วที่จุด 2



รูป 2.24 เส้นทางและเส้นกระแสสำหรับการไหลคงตัว (Anderson, 2016)

เป็น $\vec{V}$ จากนิยามของเรา $\vec{V}$ จะขนานกับ $d\vec{s}$ ดังนั้นจากการคูณเวกเตอร์จะได้

$$d\vec{s} \times \vec{V} = 0$$

ในพิกัดคาร์ทีเซียน

$$d\vec{s} = dx\hat{i} + dy\hat{j} + dz\hat{k}$$

$$\vec{V} = u\hat{i} + v\hat{j} + w\hat{k}$$

ดังนั้น
$$d\vec{s} \times \vec{V} = \hat{i}(w dy - v dz) + \hat{j}(u dz - w dx) + \hat{k}(v dx - u dy) = 0$$

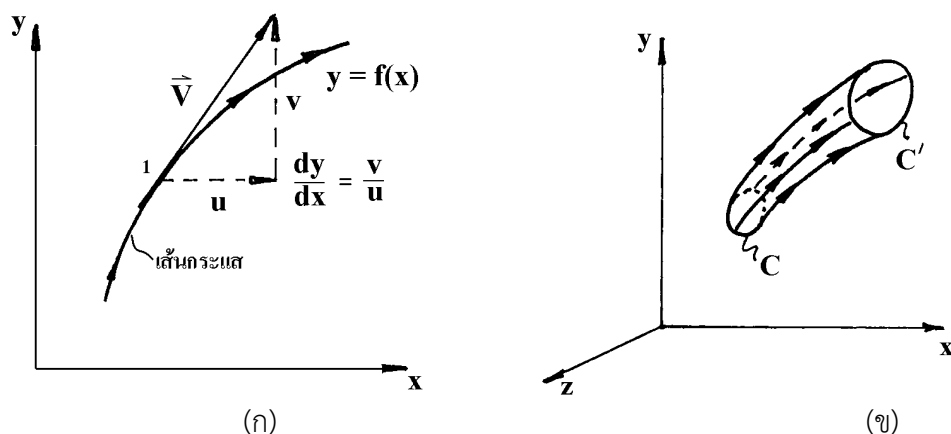
ผลลัพธ์ในสมการเป็นศูนย์ก็ต่อเมื่อแต่ละส่วนย่อยเป็นศูนย์ ดังนั้น

$$w dy - v dz = 0 \quad (2.69)$$

$$u dz - w dx = 0 \quad (2.70)$$

$$v dx - u dy = 0 \quad (2.71)$$

สมการ (2.69) ถึง (2.71) เป็นสมการดิฟเฟอเรนเชียลสำหรับเส้นกระแส ถ้าทราบความเร็ว u , v , w เป็นฟังก์ชันของ x , y , z ก็สามารถอินทิเกรตเพื่อหาสมการของเส้นกระแส $f(x,y,z) = 0$ ได้



รูป 2.25 (ก) สมการเส้นกระแสในการไหลสองมิติ (ข) ท่อกระแส (Streamtube) ในพิกัดสามมิติ (Kuethe & Chow, 1997)

รูป 2.25 ก แสดงเส้นกระแสของการไหลสองมิติเพื่อช่วยให้เข้าใจความหมายของ สมการ (2.71) ได้ดียิ่งขึ้น ในรูปสมการของเส้นกระแสจะเป็น $y = f(x)$ ดังนั้นที่จุด 1 บนเส้นกระแสดังกล่าว ความชันของโค้งจะเป็น dy/dx แต่ความเร็ว $\vec{V}$ มี u และ v เป็นส่วนย่อยตามแกน x และ y สัมพันธ์กับโค้งที่จุด 1 เช่นกัน ดังนั้น ค่าความชันจะเป็นอย่างที่เราแสดงในภาพซึ่งเท่ากับ v/u นั่นคือ

$$\frac{dy}{dx} = \frac{v}{u} \quad (2.72)$$

สมการ (2.72) เป็นสมการดิฟเฟอเรนเชียลของเส้นกระแสในสองมิติและเป็นสมการเดียวกับสมการ (2.71) นั่นเอง

รูป 2.25 ข แสดงแนวคิดที่เรานำมาใช้มากในการวิเคราะห์การไหลเรียกท่อกระแส (Stream tube) ซึ่งเกี่ยวข้องกับเส้นกระแส สมมติโค้ง C เป็นโค้งปิดใดๆ ในการไหลดังแสดงในรูป 2.25 ข ถ้าพิจารณาว่ามีเส้นกระแสผ่านจุดทุกจุดที่เรียงอยู่บนโค้งปิด C เส้นกระแสจะเรียงกันแน่นเป็นผนังท่อในรูปเรียกท่อกระแส (Streamtube) ภายในนี้กระแสจะเหมือนไหลในท่อปิด กระแสที่ผ่านพื้นที่ในโค้งปิด C ทั้งหมดจะไหลผ่านพื้นที่ในโค้งปิด C' และไม่เล็ดลอดผ่านผนังท่อกระแสออกไป

ตัวอย่าง 2.5 พิจารณาสนามความเร็ว $u = \frac{y}{x^2 + y^2}$ และ $v = \frac{-x}{x^2 + y^2}$ จงคำนวณหาสมการของเส้นกระแสที่ผ่านจุด $(0, 5)$

วิธีทำ จากสมการ (2.72)
$$\frac{dy}{dx} = \frac{v}{u} = -\frac{x}{y}$$

$$y dy = -x dx$$

อินทิเกรตสองข้างจะได้

$$y^2 = -x^2 + C$$

เมื่อ C เป็นค่าคงที่ สำหรับเส้นกระแสที่ผ่านจุด $(0, 5)$ แทนพิกัดในสมการเส้นกระแสจะได้

$$5^2 = -0^2 + C$$

$$C = 25$$

สมการเส้นกระแสจะเป็น

$$x^2 + y^2 = 25$$

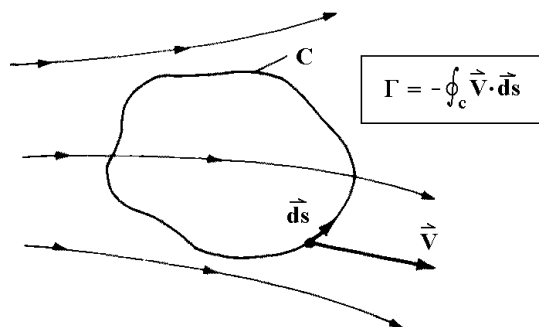
ตอบ

2.15 การหมุนวน (Circulation)

ในหัวข้อที่ผ่านมาเรามาลักษณะของสนามความเร็วอย่างเช่น $\vec{V} \cdot \vec{V}$ และ $\vec{V} \times \vec{V}$ แสดงลักษณะสำคัญของการไหลบางอย่างตามที่ได้อธิบายไปแล้ว ยังมีลักษณะสำคัญอีกอย่างหนึ่งที่พิจารณาจากความเร็วของการไหลซึ่งต่อไปจะพบว่าเกี่ยวข้องโดยตรงกับการเกิดแรงยก

พิจารณาโค้งปิด C ใดๆ ในสนามการไหลที่กำหนดด้วยความเร็ว $\vec{V}$ ถ้า $d\vec{s}$ เป็นส่วนของโค้งสั้น ๆ บน C แต่ละจุดบนโค้ง C ความเร็วของกระแสจะเปลี่ยนไป เรานิยามค่าการหมุนวน (Circulation) ว่าเป็น

$$\Gamma = - \oint_C \vec{V} \cdot d\vec{s} \quad (2.73)$$

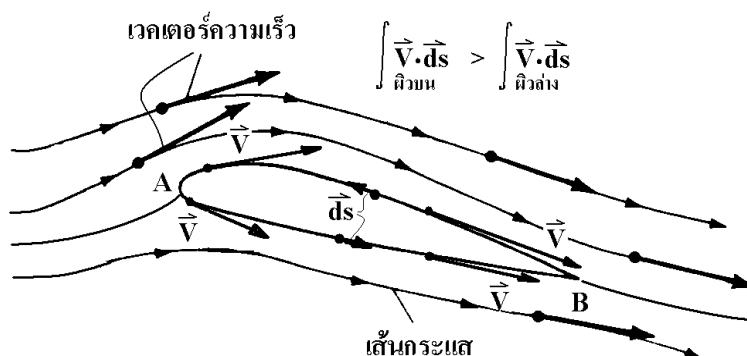


รูป 2.26 การหมุนวน (Circulation) (Moran, 2010)

ค่าการหมุนวน คือ ค่าลบของอินทิเกรตตามเส้นของความเร็ว $\vec{V}$ ไปรอบโค้งปิด C (Moran, 2010) คงจำได้จากวิชาแคลคูลัสว่าอินทิเกรตรอบโค้งปิดจะเป็นบวกเมื่อทวนเข็มนาฬิกา เครื่องหมายลบในสมการ(2.73) จึงใช้เพื่อความสะดวกเนื่องจากในอากาศพลศาสตร์จะพิจารณาให้ Γ เป็นบวกตามเข็มนาฬิกา การใช้คำว่า “หมุนวน” อาจทำให้เกิดความเข้าใจผิดและทำให้นักไปถึงการเคลื่อนที่ไปรอบๆ โค้ง C ของกระแสหรืออะไรบางอย่าง ดังนั้นอาจทำให้เข้าใจไปว่าการหมุนวนแสดงถึงการไหลไปรอบโค้ง C ซึ่งเป็นสิ่งที่ผิดโดยสิ้นเชิง สำหรับอากาศพลศาสตร์ค่าการหมุนวนมีความหมายที่เฉพาะตัวในทางเทคนิคตามสมการ (2.73) ซึ่งไม่จำเป็นว่าจะต้องมีอนุภาคของไหลเคลื่อนที่วนไปรอบโค้ง C ในสนามการไหล เพียงแต่ว่าเมื่อมีค่าการหมุนวนรอบโค้ง C แสดงว่าอินทิเกรตตามสมการ (2.73) ได้ผลลัพธ์ไม่เท่ากับศูนย์ เช่น การไหลผ่านแพนอากาศที่มีมุมปะทะในรูป 2.27 กระแสลมจะปะทะแพนอากาศ ที่จุด A ในรูปจากนั้นจะแยกไหลผ่านไปตามผิวด้านบนและผิวด้านล่างของแพนอากาศแล้วจะไปบรรจบกันที่ชายหลังตรงจุด B เพราะสภาพที่ระยะทางตามผิวด้านบนยาวกว่าระยะทางตามผิวด้านล่าง กระแสอากาศจะไหลไปบรรจบกันพอดีที่ชายหลังได้ กระแสอากาศที่ไหลเฉียดไปตามผิวด้านบนจะต้องมีความเร็วสูงกว่ากระแสอากาศที่ไหลเฉียดไปตามผิวด้านล่าง ถ้าเราอินทิเกรตค่า $\vec{V} \cdot d\vec{s}$ ไปตามโค้งของผิวด้านบนและผิวด้านล่างจากจุด A ไปจุด B จะได้ $\int_{\text{upper}} \vec{V} \cdot d\vec{s} > \int_{\text{lower}} \vec{V} \cdot d\vec{s}$ หรือถ้าพิจารณาการหมุนวนรอบโค้งของเส้นรอบรูปแพนอากาศจะได้

$$\Gamma = - \oint_{\text{airfoil}} \vec{V} \cdot d\vec{s} = \int_{\text{upper}} \vec{V} \cdot d\vec{s} - \int_{\text{lower}} \vec{V} \cdot d\vec{s}$$

มีค่าเป็นบวกรอบแพนอากาศ คงเห็นจากรูปว่าการไหลจะเป็นจากซ้ายไปขวาทั้งด้านบนและด้านล่างของแพนอากาศ แต่ไม่มีอนุภาคไหนเลยที่เคลื่อนที่หมุนวนไปรอบแพนอากาศ



รูป 2.27 การหมุนวนรอบแผนอากาศ (Moran, 2010)

ที่น่าสนใจอีกอย่างหนึ่งคือการหมุนวนรอบโค้งปิดใดๆ จะสัมพันธ์กับวอร์ทิซิตีที่บรรจุอยู่ในพื้นที่ที่ล้อมรอบด้วยโค้งปิดนั้น สมมติให้โค้ง C ล้อมรอบพื้นที่ S ซึ่งอยู่ภายในสนามการไหล ความเร็ว $\vec{V}$ จากทฤษฎีของ Stokes' (พบทวนได้จากแคลคูลัส)

$$\Gamma = -\oint_C \vec{V} \cdot d\vec{s} = -\iint_S (\vec{\nabla} \times \vec{V}) \cdot d\vec{S} \quad (2.74)$$

การหมุนวนรอบโค้งปิด C จะมีค่าเท่ากับผลรวมของวอร์ทิซิตีเวกเตอร์ที่บรรจุอยู่ในพื้นที่ที่ล้อมรอบด้วยโค้ง C สมการนี้นำไปสู่ข้อสรุปว่าถ้าการไหลเป็นแบบ “ไร้การหมุน” (Irrotational flow) ทั่วทั้งบริเวณภายในขอบเขตของการอินทิเกรต (หรือ $\vec{\nabla} \times \vec{V} = 0$ ทุกจุดภายในพื้นที่ที่ล้อมด้วยโค้ง C) แล้ว Γ จะมีค่าเท่ากับศูนย์ด้วย ถ้าให้โค้ง C ที่พิจารณาลดขนาดลงจนเล็กมากล้อมรอบบริเวณที่เป็นเพียงจุด และให้ค่าการหมุนวนรอบโค้งเล็กๆ นี้แทนด้วย $d\Gamma$ แล้วในขีดจำกัดที่ C ลดขนาดลงจนใกล้ศูนย์ สมการ (2.74) จะเป็น

$$d\Gamma = -(\vec{\nabla} \times \vec{V}) \cdot d\vec{S} = -(\vec{\nabla} \times \vec{V}) \cdot \hat{n} dS$$

หรือ
$$-\frac{d\Gamma}{dS} = (\vec{\nabla} \times \vec{V}) \cdot \hat{n} \quad (2.75)$$

เมื่อ dS คือพื้นที่เล็กๆ ภายในโค้งปิด C สมการ (2.75) กล่าวว่า ณ จุด P ในสนามการไหล ส่วนย่อยของเวกเตอร์ $\vec{\nabla} \times \vec{V}$ ตั้งฉากกับพื้นที่ dS จะมีค่าเท่ากับค่าลบของการหมุนวนต่อหน่วยพื้นที่ เมื่อการหมุนวนคิดรอบพื้นที่เล็กๆ dS

ตัวอย่าง 2.6 กำหนดให้สนามความเร็ว $u = \frac{y}{x^2 + y^2}$ และ $v = \frac{-x}{x^2 + y^2}$ จงคำนวณค่าการหมุนวนรอบเส้นรอบวงของวงกลมรัศมี 5 m สมมติให้ u และ v มีหน่วยเป็น m/s

วิธีทำ เนื่องจากโค้งเป็นเส้นรอบวงวงกลม เราใช้พิกัดเชิงมุม (r, θ) จะสะดวกกว่า ดังนั้นแปลงตัวแปรด้วยความสัมพันธ์

$$\begin{aligned}
 x &= r \cos\theta, & y &= r \sin\theta, & x^2 + y^2 &= r^2 \\
 V_r &= u \cos\theta + v \sin\theta, & V_\theta &= -u \sin\theta + v \cos\theta \\
 \text{เพราะฉะนั้น} \quad u &= \frac{y}{x^2 + y^2} = \frac{r \sin\theta}{r^2} = \frac{\sin\theta}{r} \\
 v &= \frac{-x}{x^2 + y^2} = \frac{-r \cos\theta}{r^2} = \frac{\cos\theta}{r} \\
 V_r &= \frac{\sin\theta}{r} \cos\theta + \frac{-\cos\theta}{r} \sin\theta = 0 \\
 V_\theta &= \frac{-\sin\theta}{r} \sin\theta + \frac{-\cos\theta}{r} \cos\theta = -\frac{1}{r} \\
 \text{จาก} \quad \vec{V} \cdot d\vec{s} &= (V_r \hat{e}_r + V_\theta \hat{e}_\theta) \cdot (dr \hat{e}_r + r d\theta \hat{e}_\theta) \\
 &= V_r dr + r V_\theta d\theta = -d\theta
 \end{aligned}$$

$$\text{จะได้} \quad \Gamma = -\oint_C \vec{V} \cdot d\vec{s} = -\int_0^{2\pi} -d\theta = 2\pi \text{ m}^2/\text{s} \quad \text{ตอบ}$$

สังเกตว่าในตัวอย่างเราไม่ได้แทนค่ารัศมี 5 m ของวงกลมที่คิดค่าการหมุนวน ในบทต่อไปจะพบว่าในกรณีของตัวอย่างนี้การหมุนวนจะไม่ขึ้นกับรัศมี

2.16 ฟังก์ชันกระแส (Stream Function)

พิจารณาการไหลคงตัวสองมิติ (Two-dimensional steady flow) ซึ่งเส้นกระแสสามารถกำหนดได้โดยสมการจากหัวข้อ 2.14 (Anderson, 2016)

$$\frac{dy}{dx} = \frac{v}{u} \quad (2.72)$$

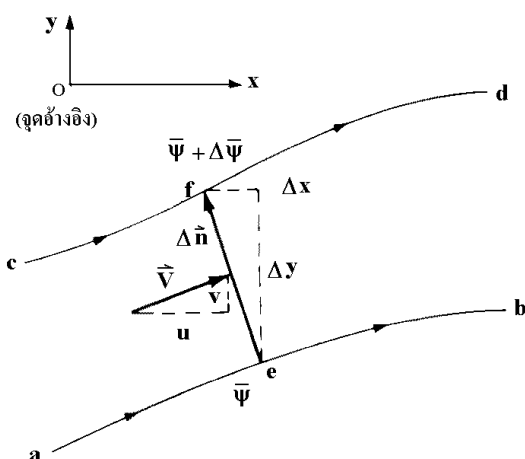
ถ้าสนามความเร็ว u และ v ถูกกำหนดโดยฟังก์ชันของพิกัด x และ y เราสามารถอินทิเกรตสมการ (2.72) เพื่อให้ได้สมการพีชคณิตสำหรับเส้นกระแสในฟอร์ม

$$f(x,y) = C$$

เมื่อ C เป็นค่าคงที่ใดๆ ที่ได้จากการอินทิเกรตซึ่งจะมีค่าเปลี่ยนไปตามเส้นกระแสแต่ละเส้น ถ้าแทนฟังก์ชัน $f(x, y)$ ด้วยสัญลักษณ์ ψ (อ่านว่า “ซาย”, psi) และเขียนสมการใหม่เป็น

$$\psi(x,y) = C \quad (2.76)$$

เรียก ψ ว่าฟังก์ชันกระแส (Stream function) ฟังก์ชันกระแส (ψ) คือฟังก์ชันที่ใช้กำหนดสมการของเส้นกระแสนั้นเอง จากสมการ (2.76) จะเห็นว่าสมการของเส้นกระแสได้จากการจัดให้ ψ มีค่าเท่ากับค่าคงที่อาทิเช่น $C_1, C_2, C_3, \dots$ ในลักษณะนี้ค่าฟังก์ชันกระแสนั้นเส้นกระแสแต่ละเส้นก็คือค่า C ที่กำหนดนั่นเอง รูป 2.28 แสดงเส้นกระแส 2 เส้น ab และ cd ซึ่งมีค่าคงที่ $\psi = C_1$ และ $\psi = C_2$



รูป 2.28 ฟังก์ชันกระแส (Anderson, 2016)

ค่าคงที่ในสมการ (2.76) หรือค่า $\bar{\psi}$ ของเส้นกระแสแต่ละเส้นมองดูมีค่าลอยๆ และมีค่าเท่าไรก็ได้ ถ้าเราลองกำหนด $\bar{\psi}$ ให้ชัดเจนลงไปเพื่อให้การกำหนดค่า C_1, C_2, C_3 มีความหมายโดยกลับไปพิจารณารูป 2.28 ถ้ากำหนดให้ค่าคงที่บนเส้นกระแสทั้งสองเส้น C_1 และ C_2 สำหรับเส้น ab และ cd มีค่าเท่ากับอัตราการไหลของมวลที่ไหลไประหว่างเส้นกระแสนั้นกับจุดอ้างอิงใดๆ (จุดกำเนิดในรูป) เนื่องจากเราพิจารณาปัญหาสองมิติดังนั้นอัตราการไหลไปในระหว่างเส้นกระแสทั้งสองเส้นกับจุดอ้างอิงเราคิดต่อความกว้าง 1 หน่วยลึกลงในหน้ากระดาษ และมวลที่ไหลผ่านไปในช่วงเส้นกระแส ab และ cd ต่อความลึก 1 หน่วยในหน้ากระดาษ จะเป็น

$$\Delta\bar{\psi} = C_1 - C_2 \quad (2.77)$$

ในสมการ (2.77) การที่ค่า C จะมีค่าอะไรก็ได้ไม่ได้ถูกจำกัดไปทั้งหมดเพียงแต่ค่า C จะถูกกำหนดในลักษณะที่ในการไหลสองมิติเมื่อเลือกให้เส้นกระแสเส้นหนึ่งมีค่าคงที่ของฟังก์ชันกระแสค่าหนึ่งแล้วค่าฟังก์ชันกระแสของเส้นกระแสเส้นอื่นนอกจากเส้นนี้จะถูกกำหนดค่าตามสมการ (2.77) ทั้งนี้ สำหรับการกำหนดค่าเป็นตัวเลขจริงเราจะได้ทำกันต่อไปในบทที่ 3

การที่ $\bar{\psi}(x,y) = C$ กำหนดสมการเส้นกระแส กับการที่ผลต่าง $\Delta\bar{\psi}$ ของเส้นกระแสสองเส้นเท่ากับอัตราการไหลผ่านของมวลต่อหนึ่งหน่วยความลึกระหว่างเส้นกระแสทั้งสองเส้นนั้นเป็นสิ่งที่สรุปจากธรรมชาติของการไหล สำหรับการไหลสองมิติสถานะคงตัวอัตราการไหลผ่านระหว่างเส้นกระแสสองเส้นใดๆจะมีค่าคงที่เสมอ ดังนั้นจากนิยาม $\Delta\bar{\psi}$ จะมีค่าเท่ากับอัตราการไหลนี้ และจะต้องมีค่าคงที่ระหว่างเส้นกระแสทั้งสองด้วย ในรูป 2.28 ถ้า $\bar{\psi}_1 = C_1$ เป็นสมการเส้นกระแส ab แล้ว $\bar{\psi}_2 = C_2 = C_1 + \Delta\bar{\psi}$ จะมีค่าคงที่ตลอดเส้นกระแส cd และ $\bar{\psi}_2 = C_2$ เป็นสมการเส้นกระแส cd เช่นกัน

ตามที่อธิบายมาทั้งหมดเรายังไม่ได้สรุปสิ่งที่สำคัญที่สุดที่ได้มาจากการกำหนดค่า $\bar{\psi}$ คือความสัมพันธ์ระหว่างอนุพันธ์ของ $\bar{\psi}$ กับความเร็ว พิจารณาเส้นกระแส ab และ cd ในรูป 2.28 ที่อยู่ใกล้กันมากจนถือได้ว่าความเร็ว $\vec{V}$ มีค่าสม่ำเสมอตลอดระยะห่าง Δn น้อยๆ ซึ่งเป็นระยะตั้งฉากระหว่าง ab และ cd และ $\vec{V}$ จะอยู่ในแนวตั้งฉากกับ Δn ดังนั้นปริมาณการไหลผ่าน Δn ต่อหน่วยความลึก จะเป็น

$$\Delta \bar{\psi} = \rho V \Delta n (1)$$

หรือ

$$\frac{\Delta \bar{\psi}}{\Delta n} = \rho V$$

ในขีดจำกัดของสมการ เมื่อ $\Delta n \rightarrow 0$

$$\rho V = \lim_{\Delta n \rightarrow 0} \frac{\Delta \bar{\psi}}{\Delta n} = \frac{d\bar{\psi}}{dn} \quad (2.78)$$

สมการ (2.78) กล่าวว่าถ้าทราบฟังก์ชัน $\bar{\psi}$ ะหาค่าของผลคูณ ρV ได้ด้วยการหาเกรเดียนของ $\bar{\psi}$ ในทิศทางตั้งฉากกับ $\vec{V}$ ในรูปเวกเตอร์ $\rho V \Delta n$ จะเป็น $\rho \vec{V} \cdot \Delta \vec{n}$ ตามที่แสดงในรูป 2.28 สังเกตว่าพื้นที่ $\Delta \vec{n} = \Delta y \hat{i} - \Delta x \hat{j}$ (เครื่องหมายลบของ Δx มาจากในรูป 2.28 เพราะจุด f อยู่ทางซ้ายของจุด e) เพราะฉะนั้นมวลที่ไหลผ่านหน้าตัด Δn จะเท่ากับ

$$\text{อัตราการไหลมวล} = \Delta \bar{\psi} = \rho \vec{V} \cdot \Delta \vec{n} = \rho u \Delta y - \rho v \Delta x$$

ในขีดจำกัด $\Delta n \rightarrow 0$

$$d\bar{\psi} = \rho u dy - \rho v dx \quad (2.79)$$

แต่ว่า $\bar{\psi} = \bar{\psi}(x, y)$ ดังนั้นจากการหาอนุพันธ์หลายตัวแปรตามกฎลูกโซ่ (chain rule)

$$d\bar{\psi} = \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial x} dx + \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial y} dy \quad (2.80)$$

เมื่อเทียบสมการ (2.79) กับสมการ (2.80) จะได้ว่า

$$\frac{\partial \bar{\psi}}{\partial y} = \rho u \quad (2.81a)$$

$$\frac{\partial \bar{\psi}}{\partial x} = -\rho v \quad (2.81b)$$

สมการ (2.81) สำคัญมากเพราะแสดงว่าเราจะหาค่าของ ρu และ ρv ณ จุดใดๆ ในการไหลได้ถ้าทราบค่าของ $\bar{\psi}(x, y)$ โดยการหาอัตราการเปลี่ยนแปลงไปทาง x และ y

สำหรับในพิกัดเชิงมุม (r, θ) อาจได้ข้อสรุปในทำนองเดียวกันคือ

$$\frac{1}{r} \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial \theta} = \rho V_r \quad (2.82a)$$

$$-\frac{\partial \bar{\psi}}{\partial r} = \rho V_\theta \quad (2.82b)$$

จนถึงตรงนี้ เรากำหนด $\bar{\psi}$ มีค่าเท่ากับอัตราการไหลของมวลต่อความลึกหนึ่งหน่วย ดังนั้นหน่วยของ $\bar{\psi}$ ในระบบ SI จะเป็น $\text{kg}/(\text{m} \cdot \text{s})$

ฟังก์ชันกระแสใช้กับการไหลได้ทั้งที่เป็นการไหลอัดตัวและการไหลไร้การอัดตัว ถ้าพิจารณาการไหลไร้การอัดตัวที่ ρ มีค่าคงที่ สมการ (2.78) เขียนใหม่ได้เป็น

$$\frac{\partial(\bar{\psi}/\rho)}{\partial n} = V$$

กำหนดให้ $\psi = \bar{\psi}/\rho$ เป็นฟังก์ชันกระแสสำหรับการไหลไร้การอัดตัว

$$\frac{\partial\psi}{\partial n} = V$$

สมการ (2.81) ถึง (2.82) จะเปลี่ยนเป็น

$$\frac{\partial\psi}{\partial y} = u \quad (2.83a)$$

$$-\frac{\partial\psi}{\partial x} = v \quad (2.83b)$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial\psi}{\partial\theta} = V_r \quad (2.84a)$$

$$-\frac{\partial\psi}{\partial r} = V_\theta \quad (2.84b)$$

ทั้ง $\bar{\psi}$ และ ψ ต่างมีลักษณะเฉพาะเช่นเดียวกันเพราะว่า $\bar{\psi}(x, y) = C$ เป็นสมการของเส้นกระแส เมื่อ $\rho =$ ค่าคงที่สำหรับการไหลไร้การอัดตัว ดังนั้น $\psi = \bar{\psi}/\rho = C$ ก็จะเป็นสมการของเส้นกระแสเหมือนกัน และเมื่อ $\Delta\bar{\psi}$ แทนอัตราไหลของมวลระหว่างเส้นกระแส 2 เส้น และ ρ คือความหนาแน่น ดังนั้น $\Delta\psi = \Delta\bar{\psi}/\rho$ จะแทนอัตราการไหลปริมาตรระหว่างเส้นกระแสองเส้น และมีหน่วยเป็น $\text{m}^3/(\text{m}\cdot\text{s}) = \text{m}^2/\text{s}$ ในระบบ SI

กล่าวโดยสรุปแนวคิดเรื่องฟังก์ชันกระแสมีประโยชน์มากในอากาศพลศาสตร์เพราะเหตุผลใหญ่ 2 ข้อ คือ

1. ฟังก์ชันกระแสกำหนดสมการของเส้นกระแสสำหรับการไหลสองมิติสภาวะคงตัว
2. สนามของการไหลหาได้จากการหาอนุพันธ์ของ $\bar{\psi}$ หรือ ψ หรือเทียบกับ x และ y ส่วนการที่จะหาค่าฟังก์ชันกระแสได้อย่างไรนั้นเป็นรายละเอียดที่เราจะได้ศึกษาต่อไป

2.17 ศักย์ความเร็ว (Velocity Potential)

ในหัวข้อ 2.7 เราพิจารณาได้ว่าการไหลไร้การหมุน (Irrotational) จะสังเกตได้จากเคอร์ของสนามความเร็ว $\vec{\nabla} \times \vec{V} = 0$ ถ้าเราพิจารณาเอกลักษณ์ของเวกเตอร์ (Bertin, J. J., & Cummings, R. M., 2025)

$$\vec{\nabla} \times \vec{V}(\phi) = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial\phi}{\partial x} & \frac{\partial\phi}{\partial y} & \frac{\partial\phi}{\partial z} \end{vmatrix}$$

$$= \hat{i}\left(\frac{\partial\phi}{\partial y\partial z} - \frac{\partial\phi}{\partial y\partial z}\right) + \hat{j}\left(\frac{\partial\phi}{\partial x\partial z} - \frac{\partial\phi}{\partial x\partial z}\right) + \hat{k}\left(\frac{\partial\phi}{\partial x\partial y} - \frac{\partial\phi}{\partial x\partial y}\right)$$

$$\equiv 0$$

เมื่อ ϕ (อ่านว่า “ฟิ” phi) เป็นฟังก์ชันสเกลาร์ใดๆ เมื่อเทียบกับเคอร์ของความเร็วของการไหลไร้การหมุน $\vec{\nabla} \times \vec{V} = 0$ จะเห็นว่าสำหรับการไหลไร้การหมุน

$$\vec{V} = \vec{\nabla}\phi \quad (2.85)$$

สมการ (2.85) กล่าวว่าสำหรับการไหลไร้การหมุน (Irrotational flow) จะมีฟังก์ชันสเกลาร์ $\phi(x,y)$ ตัวหนึ่งเสมอที่เกรเดียนของมันจะมีค่าเท่ากับ $\vec{V}$ เราเรียก $\phi(x,y)$ ว่า “ศักย์ความเร็ว” (Velocity potential) ในพิกัดคาร์ทีเซียนสมการ (2.85) จะเป็น

$$u\hat{i} + v\hat{j} + w\hat{k} = \frac{\partial\phi}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial\phi}{\partial y}\hat{j} + \frac{\partial\phi}{\partial z}\hat{k}$$

$$\text{จะได้ความสัมพันธ์} \quad u = \frac{\partial\phi}{\partial x}, \quad v = \frac{\partial\phi}{\partial y}, \quad w = \frac{\partial\phi}{\partial z} \quad (2.86a,b,c)$$

หรือจะได้อัตราสัมพันธ์ในพิกัดทรงกระบอก

$$V_r = \frac{\partial\phi}{\partial r}, \quad V_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial\phi}{\partial \theta}, \quad V_z = \frac{\partial\phi}{\partial z} \quad (2.87a,b,c)$$

และความสัมพันธ์ในพิกัดทรงกลม

$$V_r = \frac{\partial\phi}{\partial r}, \quad V_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial\phi}{\partial \theta}, \quad V_\phi = \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial\phi}{\partial \phi} \quad (2.88a,b,c)$$

ศักย์ความเร็วเทียบกับฟังก์ชันกระแสได้ในแง่ที่เกรเดียนของศักย์ความเร็วสัมพันธ์กับความเร็วตามสมการ (2.86), (2.87) และ (2.88) เช่นเดียวกับที่เกรเดียนของฟังก์ชันกระแสสัมพันธ์กับความเร็วตามสมการ (2.81), (2.82), (2.83) และ (2.84) แต่มีความแตกต่างระหว่างศักย์ความเร็วและฟังก์ชันกระแส คือ

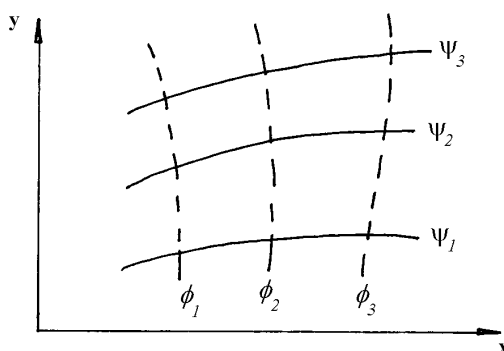
1. ส่วนย่อยของความเร็วในทิศทางต่างๆ ได้จากเกรเดียนของศักย์ความเร็วไปในทิศทางนั้น แต่จะได้จากเกรเดียนของฟังก์ชันกระแสไปในทิศทางตั้งฉาก
2. ศักย์ความเร็วเป็นฟังก์ชันที่กำหนดได้เฉพาะการไหลไร้การหมุน (Irrotational flow) เท่านั้น แต่ฟังก์ชันกระแสเป็นฟังก์ชันที่กำหนดได้ในการไหลทั้งที่เป็นแบบไร้การหมุนและมีการหมุน (Rotational flow)
3. ศักย์ความเร็วกำหนดได้ทั้งในการไหลสองและสามมิติ สภาวะคงตัวและไม่คงตัว แต่ฟังก์ชันกระแสจะกำหนดได้เฉพาะการไหลสองมิติสภาวะคงตัวเท่านั้น

เมื่อสนามการไหลเป็นแบบไร้การหมุนที่สามารถกำหนดศักย์ความเร็วได้ การพิจารณาการไหลจะง่ายขึ้นอย่างมาก เพราะแทนที่จะต้องพิจารณาความเร็ว u, v, w เป็นตัวไม่ทราบค่าเราเพียงแต่มองหาฟังก์ชัน ϕ (เพียงตัวเดียว) แทน หลังจากได้ ϕ แล้วสมการ (2.86) จะให้ค่าของ u, v, w โดยอัตโนมัติ ด้วยเหตุนี้เองที่ในทฤษฎีเราแบ่งการไหลเป็นแบบมีการหมุนกับไร้การหมุน และการ

วิเคราะห์การไหลไร้การหมุนจะง่ายกว่ามาก การที่การไหลไร้การหมุนอธิบายได้ด้วยศักย์ความเร็ว (Velocity potential), ϕ , เราจึงเรียกการไหลแบบนี้ว่าเป็น “Potential flow” เช่นเดียวกับฟังก์ชันกระแส, ψ , เราจะศึกษาการหาค่าศักย์ความเร็วในบทต่อไป

2.18 ความสัมพันธ์ระหว่างฟังก์ชันกระแส และ ศักย์ความเร็ว

จากความหมายของเกรเดียนของสเกลาร์ในหัวข้อ 2.5 เกรเดียนของศักย์ความเร็ว $\nabla\phi$ จะเป็นเวกเตอร์ที่ตั้งฉากกับแนวที่ ϕ มีค่าคงที่ หรือเส้นเท่า (Isoline) ของ ϕ เราเรียกแนวที่ ϕ คงที่นี้เป็นพิเศษว่า “แนวศักย์เสมอ” (Equipotentialline) และเส้นที่ลากไปในแนวที่ทุกจุดสัมผัสกับแนวของ $\nabla\phi$ จะเป็นเส้นเกรเดียนของ ϕ แต่เนื่องจาก $\nabla\phi = \vec{V}$ เส้นเกรเดียนของ ϕ จึงมีแนวสัมผัสที่ทุกจุดอยู่ในแนวเดียวกับความเร็วหรือทับกับเส้นกระแส (Streamline) นั่นเอง และเส้นกระแสก็คือเส้น ψ คงที่ ดังนั้นแนวศักย์เสมอ (ϕ คงที่) และเส้นกระแส (ψ คงที่) จะตั้งฉากกัน



รูป 2.29 เส้นเท่าของศักย์ความเร็วและฟังก์ชันกระแส (Anderson, 2016)

ข้อสรุปข้างบนพิสูจน์ได้จากการไหลสองมิติในพิกัดคาร์ทีเซียนแบบไร้การอัดตัวไร้การหมุน (2-D incompressible irrotational flow) พิจารณามบนเส้นกระแส $\psi(x, y) = C$ ใดๆ ค่า $d\psi$ ไปตามเส้นกระแสจะเท่ากับศูนย์

$$d\psi = \frac{\partial\psi}{\partial x}dx + \frac{\partial\psi}{\partial y}dy = 0$$

จากสมการ (2.83) $d\psi = udy - vdx = 0$

จะได้ $\left(\frac{dy}{dx}\right)_{\psi=\text{const}} = \frac{v}{u}$ (2.89)

ทำนองเดียวกันบนแนว ϕ คงที่ ตามแนวนี

$$d\phi = \frac{\partial\phi}{\partial x}dx + \frac{\partial\phi}{\partial y}dy = 0$$

จากสมการ (2.86) $d\phi = udx + vdy = 0$

จะได้
$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{\phi=\text{cont}} = -\frac{u}{v} \quad (2.90)$$

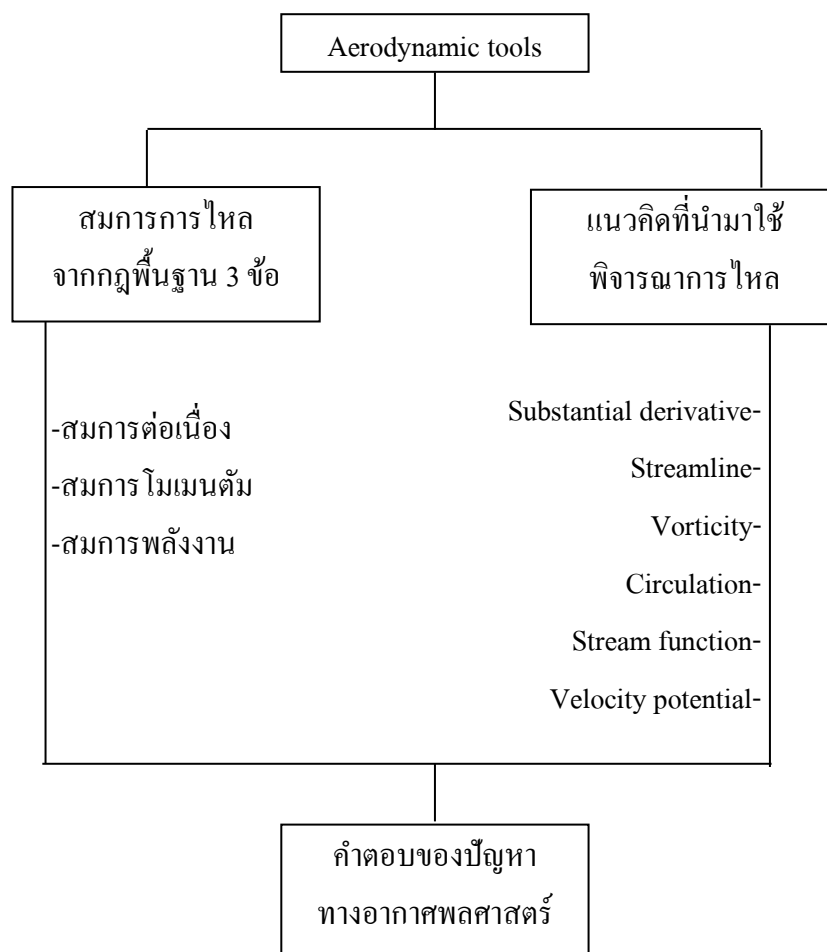
เทียบสมการ (2.89) กับ (2.90) จะเห็นว่า

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{\phi=\text{cont}} = -\frac{1}{(dy/dx)_{\psi=\text{cont}}}$$

ความชันของเส้นกระแสเป็นส่วนกลับของความชันของเส้นศักย์เสมอ เพราะฉะนั้นทั้งสองแนวจะตั้งฉากกัน

2.19 สรุป

ในบทนี้ ได้รวบรวมแนวคิดและสมการพื้นฐานที่เป็นเครื่องมือสำคัญในการวิเคราะห์ปัญหาทางอากาศพลศาสตร์ เนื้อหาในแต่ละหัวข้ออาจดูไม่มีความสัมพันธ์และต่อเนื่องกันแต่ในบทต่อไปแนวคิดและสมการเหล่านี้เมื่อพิจารณารวมกันจะใช้อธิบายธรรมชาติของการไหลได้อย่างน่าพิศวง แผนผังด้านล่างจะช่วยเตือนถึงเครื่องมือสำคัญของนักอากาศพลศาสตร์ที่จะถูกนำมาใช้ในบทต่อไป



แบบฝึกหัดบทที่ 2

- สำหรับวัตถุรูปทรงใดๆ ถ้าความดันบนผิวรอบวัตถุมีค่าคงที่ จงแสดงให้เห็นว่าแรงลัพธ์เนื่องจากความดันจะมีค่าเป็นศูนย์
- แพนอากาศในอุโมงค์ลม (ปีกหน้าตัดคงที่ยาวตลอดทั้งส่วนทดลองของอุโมงค์ลม) จงพิสูจน์ว่าค่าแรงยกต่อหน่วยความยาวปีกอาจคำนวณได้จากความดันของผนังด้านบนและด้านล่างของอุโมงค์ลม (จากการแจกแจงความดันบนผนังด้านบนและด้านล่างของแพนอากาศ)
- สนามความเร็วมีค่าความเร็วตามแกน x และ y $u = \frac{Cx}{(x^2 + y^2)}$ และ $v = \frac{Cy}{(x^2 + y^2)}$ เมื่อ C เป็นค่าคงที่ จงหาสมการของเส้นกระแส
- พิจารณาสนามความเร็ว $u = \frac{Cy}{(x^2 + y^2)}$ และ $v = \frac{-Cx}{(x^2 + y^2)}$ เมื่อ C เป็นค่าคงที่ จงหาสมการของเส้นกระแส
- พิจารณาความเร็วที่กำหนดด้วยส่วนตามแนวรัศมีและส่วนตามแนวเส้นรอบวงในพิกัดวงกลม (Polar coordinate) $V_r = 0$ และ $V_\theta = Cr$ เมื่อ C เป็นค่าคงที่ จงหาสมการของเส้นกระแส
- จงหาสมการเส้นกระแสของสนามความเร็ว $u = Cx$ และ $v = -Cy$ เมื่อ C เป็นค่าคงที่
- พิจารณาสนามความเร็วในข้อ 3 ที่เรียกว่าการไหลจากแหล่งกำเนิด (Source flow) จงหา
 - อัตราการเปลี่ยนแปลงของปริมาตรของอนุภาคการไหลเทียบกับปริมาตรเดิม
 - ค่า Vorticity

แนะนำ การคำนวณโดยแปลงความเร็วให้อยู่ในพิกัดวงกลมจะง่ายกว่าพิกัดฉาก
- พิจารณาสนามความเร็วในข้อ 4 ที่เรียกว่า การไหลวอร์เทก (Vortex flow) จงหา
 - อัตราการเปลี่ยนแปลงของปริมาตรของอนุภาคการไหลเทียบกับปริมาตรเดิม
 - ค่า Vorticity
- สนามความเร็วในข้อ 5 เป็นสนามไร้การหมุน (Irrotational) หรือไม่ จงพิสูจน์
- พิจารณาสนามการไหลในพิกัดวงกลมซึ่ง ฟังก์ชันเส้นกระแส อยู่ในพิกัด $\psi = \psi(r, \theta)$ เริ่มจากแนวคิดของอัตราไหลมวลระหว่างเส้นกระแสสองเส้น จงพิสูจน์ว่า

$$\rho V_r = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \quad \text{และ} \quad \rho V_\theta = -\frac{\partial \psi}{\partial r}$$
- ใช้สนามความเร็วในข้อ 6 ซึ่งแสดงการไหลไร้การอัดตัว จงคำนวณหาฟังก์ชันเส้นกระแสและศักย์ความเร็ว (Velocity potential) และใช้ผลที่ได้แสดงว่าเส้น ϕ คงที่จะตั้งฉากกับเส้น ψ คงที่
- สนามอุณหภูมิกำหนดโดย $T = x^3y$ จงหาขนาดและทิศทางของ $\text{grad } T$ ที่จุด $(1,2)$ และจงหาสมการของเส้นเกรเดียนและเส้นอุณหภูมิคงที่ผ่านจุด $(1,2)$
- จงหาสมการเส้นกระแสผ่านจุด $(1,2)$ ของสนามความเร็ว $u = x^2y$ และ $v = -xy^2$

14. ขนาดของความเร็วและสมการเส้นกระแสในสนามการไหลสองมิติเป็น

$$|\vec{V}| = \sqrt{x^2 + 2xy + 2y^2} \quad \text{และ} \quad y^2 + 2xy = \text{cont.}$$

จงหาค่า u และ v

15. การไหลของเส้นกระแสต่อไปนี้ ข้อใดเป็นเป็นการไหลไร้การอัดตัว

ก) $u = -x^3 \sin y$; $v = 3x^2 \cos y$ ข) $u = x^3 \sin y$; $v = 3x^2 \cos y$

ค) $V_r = 2r \sin \theta \cos \theta$; $V_\theta = -2r \sin^2 \theta$ ง) $|\vec{V}| = \frac{k}{r^2}$; $x^2 + y^2 = C$

16. ฟังก์ชันกระแสของการไหลสองมิติ กำหนดโดย

$$\psi = x^2 + 2y$$

ก) จงหาขนาดและทิศทางของความเร็วผ่านจุด (2,3)

ข) ที่จุด (2,3) จงหาส่วนความเร็วในทิศทางทำมุม 30° กับแกน x

บทที่ 3

พื้นฐานการไหลไร้ความหนืดไร้การอัดตัว

3.1 ความนำ

ในบทที่ 2 ได้แสดงสมการพื้นฐานที่บอกความสัมพันธ์ระหว่างตัวแปรที่เราสนใจ เช่น ความดัน ความเร็ว และอื่นๆ กับแนวคิดที่ใช้พิจารณาการไหล เช่น ฟังก์ชันกระแส ศักย์ความเร็วและการหมุนวน เป็นต้น สมการมีความสัมพันธ์ที่สลับซับซ้อนจนการพิจารณาปัญหาตรงๆ โดยไม่มีสมมติฐานบางประการเข้าช่วยบ้างเป็นสิ่งที่ทำได้ยาก ในความเป็นจริงอากาศมีความหนืดและอัดตัวได้ (Viscous and compressible) ซึ่งหมายความว่าทุกครั้งที่วิเคราะห์การไหลของอากาศจำเป็นต้องคำนึงถึงผลจากความหนืดและการอัดตัวไว้ด้วย การพิจารณาลักษณะนี้ได้เห็นจากสมการต่อเนื่อง สมการโมเมนตัม และสมการพลังงานในบทที่ 2 แล้วว่ารูปสมการจะอยู่ในแบบที่ใช้คณิตศาสตร์ง่ายๆ อย่างเช่น การแก้สมการอนุพันธ์เชิงเส้นที่เราพอจะคุ้นเคยใช้ไม่ได้เลย การพิจารณาถึงอย่างใดก็ต้องเกี่ยวพันกับคณิตศาสตร์ที่ซับซ้อนยุ่งยาก คงจำได้ว่าถ้าการไหลมีลักษณะพิเศษ เช่น ไม่มีการอัดตัว หรือไม่มีความหนืดมาเกี่ยวข้อง สมการพื้นฐานทั้ง 3 จะลดรูปลงเป็นสมการที่ง่ายกว่าหลายเท่าในการพิจารณาปัญหาคือลักษณะพิเศษที่กล่าวจะไม่ขัดแย้งกับคุณสมบัติจริงๆ ของอากาศหรือ ย้อนกลับไปในบทที่ 1 คงจำได้ว่าการไหลของอากาศในย่านที่มีความเร็วต่ำกว่า 0.3 เท่าของความเร็วเสียง (ความเร็วเสียงในอากาศที่ระดับน้ำทะเลมาตรฐานประมาณ 340 m/s) ผลกระทบของการอัดตัวจะมีน้อยจนแทบจะไม่ส่งผลต่อการไหล และอาจสมมติให้ค่า ρ คงที่ได้อย่างสมเหตุสมผล หรือเมื่อพิจารณาการไหลของเหลวซึ่งผลกระทบจากการอัดตัวมีน้อยเช่นกัน ในกลุ่มการไหลที่มีลักษณะอันนี้ เช่น อากาศยานที่บินในย่านความเร็วต่ำ การไหลในท่อของน้ำหรือน้ำมัน การเคลื่อนไหวยของเรือและเรือดำน้ำ หรือการวิเคราะห์ประสิทธิภาพของกังหันลม เป็นต้น การพิจารณาการไหลให้เป็นแบบไร้การอัดตัว (Incompressible flow) สามารถทำได้อย่างเหมาะสม แม้แต่การสมมติให้การไหลเป็นแบบไร้แรงเสียดทานหรือไม่มีผลจากความหนืด (Inviscid flow) ก็อาจทำได้เมื่อเราคำนึงถึงการไหลที่ปราศจากอิทธิพลของความหนืด เช่น การไหลที่อยู่นอกชั้นขีดยาวเท่านั้น ด้วยเหตุผลเหล่านี้ความสนใจการไหลที่เป็นแบบไร้การอัดตัวและไร้ความหนืดที่เรียกว่า “การไหลไร้ความหนืดไร้การอัดตัว” (Inviscid incompressible flow) จึงเป็นส่วนสำคัญในวิชาอากาศพลศาสตร์และจะเป็นเนื้อหาของบทนี้ ที่จริงแล้วเราจะพบต่อไปว่าการพิจารณากลไกของการเกิดแรงยกบนแพนอากาศและปีกอากาศยานมีพื้นฐานอยู่บนทฤษฎีการไหลแบบนี้แน่นอน

3.2 สมการเบอร์นูลลี (Bernoulli's Equation)

อาจกล่าวได้ว่าสมการที่สำคัญที่สุดที่ถูกนำไปใช้อย่างกว้างขวางในสาขาวิชากลศาสตร์ของไหล คือ สมการของเบอร์นูลลีที่อยู่ในรูปสมการที่รู้จักกันเป็นอย่างดี (Katz & Plotkin, 2001) คือ

$$p + \frac{1}{2} \rho V^2 = \text{const.}$$

ในหัวข้อนี้เราจะพิจารณาที่มาของสมการเบอร์นูลลีซึ่งมีที่มาจากสมการโมเมนตัม เราเริ่มต้นโดยพิจารณาสมการโมเมนตัมตามแกน x เมื่อไม่คิดแรงเสียดทาน ไม่คติน้ำหนักของอากาศ จากหัวข้อ

2.10 สมการ (2.49a)

$$\rho \frac{Du}{Dt} = -\frac{\partial p}{\partial x}$$

กระจายสมการโดยใช้ नियามของอนุพันธ์สับสแตนเชียลตามสมการ (2.38) จะได้

$$\rho \frac{\partial u}{\partial t} + \rho u \frac{\partial u}{\partial x} + \rho v \frac{\partial u}{\partial y} + \rho w \frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{\partial p}{\partial x} \quad (3.1)$$

สำหรับการไหลสภาวะคงตัว $\frac{\partial u}{\partial t} = 0$ ดังนั้น

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} \quad (3.2)$$

คูณตลอดด้วย dx จะได้

$$u \frac{\partial u}{\partial x} dx + v \frac{\partial u}{\partial y} dx + w \frac{\partial u}{\partial z} dx = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} dx \quad (3.3)$$

พิจารณาการไหลตามเส้นกระแส (Streamline) เส้นใดๆ จากบทที่ 2 สมการของเส้นกระแสกำหนดโดย

$$w dy - v dz = 0 \quad (2.69)$$

$$u dz - w dx = 0 \quad (2.70)$$

$$v dx - u dy = 0 \quad (2.71)$$

แทนความสัมพันธ์ $w dy - v dz$ และ $v dx - u dy$ ลงในสมการ (3.3) จะได้

$$u \frac{\partial u}{\partial x} dx + u \frac{\partial u}{\partial y} dy + u \frac{\partial u}{\partial z} dz = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} dx \quad (3.4)$$

$$u \left(\frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy + \frac{\partial u}{\partial z} dz \right) = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} dx \quad (3.5)$$

จะเห็นว่าเทอมในวงเล็บเป็นค่าดิฟเฟอเรนเชียลของ $u(x,y,z)$ ตามหลักการหาอนุพันธ์หลายตัวแปร

$$du = \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy + \frac{\partial u}{\partial z} dz$$

ดังนั้นสมการ (3.5) เขียนใหม่ได้เป็น

$$u du = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} dx$$

หรือ
$$\frac{1}{2}d(u^2) = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}dx \quad (3.6)$$

ทำนองเดียวกันจะได้สมการสำหรับโมเมนตัมตามแกน y และ z

$$\frac{1}{2}d(v^2) = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}dy \quad (3.7)$$

$$\frac{1}{2}d(w^2) = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z}dz \quad (3.8)$$

รวมสมการ (3.6), (3.7) และ (3.8) เข้าด้วยกันจะได้

$$\frac{1}{2}d(u^2 + v^2 + w^2) = -\frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial p}{\partial x}dx + \frac{\partial p}{\partial y}dy + \frac{\partial p}{\partial z}dz\right) \quad (3.9)$$

แต่ $u^2 + v^2 + w^2 = \vec{V} \cdot \vec{V} = V^2$ และ $\frac{\partial p}{\partial x}dx + \frac{\partial p}{\partial y}dy + \frac{\partial p}{\partial z}dz = dp$

แทนกลับไปในสมการ (3.9) จะได้

$$\frac{1}{2}d(V^2) = -\frac{dp}{\rho} \quad (3.10a)$$

หรือ
$$dp = -\rho V dV \quad (3.10b)$$

สมการ (3.10a) คือ สมการของออยเลอร์ (Euler) ซึ่งใช้ได้กับการไหลไร้ความหนืด (Inviscid flow) ที่ไม่คืดน้ำหนักของไหล สมการแสดงความสัมพันธ์ระหว่างการเปลี่ยนแปลงความเร็วระหว่าง 2 จุด บนเส้นกระแสกับการเปลี่ยนแปลงความดันระหว่าง 2 จุดนั้น

สำหรับการไหลที่ไม่มีการอัดตัว (Incompressible flow) สมการ (3.10a) จะอยู่ในรูปที่พิเศษเฉพาะตัว คือ เมื่อ ρ คงที่ สามารถนำสมการ (3.10a) มาอินทิเกรตระหว่าง 2 จุดบนเส้นกระแสที่มีความดันและความเร็ว p_1, V_1 และ p_2, V_2 ได้

$$\begin{aligned} \int_{p_1}^{p_2} dp &= \int_{V_1}^{V_2} \rho V dV \\ p_2 - p_1 &= -\rho \left(\frac{V_2^2}{2} - \frac{V_1^2}{2} \right) \\ \text{นั่นคือ } p_1 + \frac{1}{2}\rho V_1^2 &= p_2 + \frac{1}{2}\rho V_2^2 \end{aligned} \quad (3.11)$$

สมการ (3.11) คือ สมการเบอร์นูลลี ที่แสดงความสัมพันธ์ระหว่าง p_1, V_1 ที่จุด 1 กับ p_2, V_2 ที่จุด 2 บนเส้นกระแสเส้นเดียวกัน สมการ (3.11) เขียนอีกอย่างได้ว่า

$$p + \frac{1}{2}\rho V^2 = \text{constant} \quad \text{บนเส้นกระแสเส้นเดียวกัน} \quad (3.12)$$

ในสมการ (3.11) และ (3.12) การพิจารณาที่มาของสมการเบอร์นูลลีไม่ได้กล่าวถึงว่าการไหลเป็นแบบไร้การหมุนหรือไม่ แต่พิจารณาการไหลที่เป็นกรไหลไร้ความหนืดไร้การอัดตัวและสมการนำไปใช้ได้ระหว่างจุดสองจุดใดๆ บนเส้นกระแสเส้นเดียวกันเท่านั้น กล่าวคือสมการบอกว่าขณะที่อนุภาคของไหลเคลื่อนที่ไปตามเส้นกระแสผลรวมของพลังงานการไหลที่อยู่ในรูปของความดันและ

พลังงานจลน์จะมีค่าคงที่และโดยทั่วไปค่าคงที่นี้จะมีค่าแปรไปตามเส้นกระแสแต่ละเส้นในการไหลที่มีการหมุน แต่สำหรับการไหลไร้การหมุนความสัมพันธ์ตามสมการ (3.11) และ (3.12) สามารถใช้ได้ระหว่างสองจุดใดๆ โดยไม่จำเป็นต้องอยู่บนเส้นกระแสเส้นเดียวกัน หรือสำหรับการไหลไร้การหมุน (Irrotational flow) ค่าคงที่ในสมการ (3.12) จะมีค่าเท่ากันบนเส้นกระแสทุกเส้น

$$p + \frac{1}{2}\rho V^2 = \text{cont.} \quad \text{ทั่วทั้งบริเวณการไหล} \quad (3.13)$$

การพิสูจน์ความจริงข้อนี้นักเรียนทำเองได้เป็นแบบฝึกหัดโดยใช้ความสัมพันธ์ของการไหลไร้การหมุน $\vec{\nabla} \times \vec{V} = 0$ แทนความสัมพันธ์ตามสมการ (2.69) ถึง (2.71) ที่จะแทนลงในสมการโมเมนตัมทั้งสามสมการ แล้วพิจารณาท่านองเดียวกับที่ทำกับสมการ (3.2)

ลักษณะสำคัญของสมการเบอร์นูลลีเห็นได้ชัดจากสมการ (3.11) ถึง (3.13) นั่นคือ เมื่อความเร็วเพิ่มความดันจะลด และเมื่อความเร็วลดลง ความดันจะเพิ่มขึ้น

สังเกตว่าสมการเบอร์นูลลีมีที่มาจากสมการโมเมนตัม นั่นคือมันเป็นสมการที่ใช้กฎข้อที่สองของนิวตันกับการไหลไร้ความหนืดไร้การอัดตัว เมื่อไม่คิดน้ำหนักของของไหล อย่างไรก็ตามมิติของแต่ละเทอมในสมการเป็นหน่วยของพลังงานต่อปริมาตร ($\frac{1}{2}\rho V^2$ คือพลังงานจลน์ต่อหน่วยปริมาตร) ดังนั้นสมการเบอร์นูลลียังเป็นสมการที่แสดงความสัมพันธ์ของพลังงานกลสำหรับการไหลไร้การอัดตัว (Incompressible flow) ด้วย สมการกล่าวว่างานที่กระทำบนของไหลเนื่องจากแรงจากความดันจะเท่ากับการเปลี่ยนแปลงพลังงานจลน์ของการไหล ที่จริงแล้วสมการเบอร์นูลลีสามารถหาได้โดยเริ่มต้นจากสมการพลังงานอย่างเช่นสมการ (2.8) ก็ได้ และการที่สมการเบอร์นูลลีสามารถแสดงความสัมพันธ์ตามกฎข้อที่สองของนิวตัน หรือสมการพลังงานก็ได้ แสดงให้เห็นว่าสมการพลังงานเป็นส่วนเกิน (Redundant) สำหรับการวิเคราะห์การไหลไร้ความหนืดไร้การอัดตัว (Inviscid incompressible flow) และสำหรับการไหลแบบนี้สมการการไหลต่อเนื่องและสมการโมเมนตัมก็เพียงพอแล้วสำหรับการแก้ปัญหา

จะเห็นว่าแนวทางในการแก้ไขปัญหาการไหลไร้ความหนืดไร้การอัดตัวจะเป็นไปในลักษณะดังต่อไปนี้ คือ ในตอนแรกเราจะมองหาสนามของความเร็วจากสมการที่กำกับกับการไหลให้ได้เสียก่อน สมการกำกับกับการไหลที่มีรูปเหมาะสมสำหรับการไหลไร้ความหนืดไร้การอัดตัวจะเป็นหัวข้ออภิปรายในหัวข้อ 3.6 และ 3.7 ในขั้นต่อไปเมื่อได้สนามความเร็วแล้วจะใช้สมการเบอร์นูลลีคำนวณหาสนามความดันตามที่ต้องการ อย่างไรก็ตามก่อนจะเริ่มพิจารณาไปตามขั้นตอนนี้จะอภิปรายการประยุกต์ใช้งานสมการการไหลต่อเนื่องและสมการเบอร์นูลลีสำหรับการไหลในท่อและการวัดความเร็วลม (Airspeed) เสียก่อนในหัวข้อ 3.4 และ 3.5

ตัวอย่าง 3.1 พิจารณาแพนอากาศในกระแสน้ำที่ระดับน้ำทะเล ความเร็วกระแสอิสระ 50 m/s ที่จุดหนึ่งบนแพนอากาศความดันจะเท่ากับ $0.9 \times 10^5 \text{ N/m}^2$ จงคำนวณความเร็ว ณ จุดนี้

วิธีทำ ที่ระดับน้ำทะเล คุณสมบัติอากาศเป็น $\rho_\infty = 1.23 \text{ kg/m}^3$ และ $p_\infty = 1.01 \times 10^5 \text{ N/m}^2$ ดังนั้นจากสมการ (3.11)

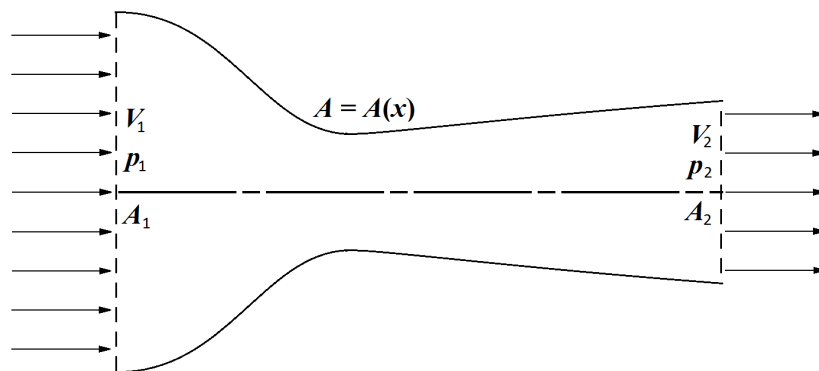
$$p_\infty + \frac{1}{2}\rho V_\infty^2 = p + \frac{1}{2}\rho V^2$$

$$V = \sqrt{\frac{2(p_\infty - p)}{\rho} + V_\infty^2} = \sqrt{\frac{2(1.01 - 0.9) \times 10^5 \text{ N/m}^2}{1.23 \text{ kg/m}^3} + (50 \text{ m/s})^2}$$

$$V = 142.8 \text{ m/s} \quad \text{ตอบ}$$

3.3 การไหลไร้การอัดตัวในท่อ : ท่อเวนทูรี และอุโมงค์ลม

ก่อนจะถึงการแก้ปัญหาการไหลไร้ความหนืดไร้การอัดตัว ดูการประยุกต์ใช้สมการเบอร์นูลลี ในงานอากาศพลศาสตร์ที่สำคัญบางอย่างก่อน พิจารณาการไหลในท่อตามที่แสดงในรูป 3.1 ตามปกติท่อจะมีลักษณะเป็น 3 มิติ เช่น ท่อที่มีหน้าตัดเป็นวงรีหรือสี่เหลี่ยมซึ่งมีพื้นที่หน้าตัดเปลี่ยนแปลงไปตามความยาวท่อจากจุดหนึ่งไปอีกจุดหนึ่ง การไหลผ่านท่อที่มีลักษณะดังกล่าวจะมีลักษณะเป็น 3 มิติไปด้วย และที่ถูกควรวิเคราะห์โดยใช้สมการทั้งสามมิติเต็มรูปแบบตามที่กำหนดไว้ในบทที่ 2 อย่างไรก็ตาม ในทางปฏิบัติมีหลายกรณีที่มีการเปลี่ยนแปลงพื้นที่หน้าตัดของท่อ $A = A(x)$ เป็นไปทีละน้อยและราบรื่น ในกรณีดังกล่าว การสมมติให้ความเร็วหรือคุณสมบัติอื่นๆ ของการไหล ณ หน้าตัดใดหน้าตัดหนึ่งมีความสม่ำเสมอทั้งหน้าตัดสามารถทำได้และคุณสมบัติของการไหลจะเปลี่ยนแปลงไปกับพิกัด x เท่านั้น ในรูป 3.1 การไหลสม่ำเสมอแสดงที่ตำแหน่ง 1 และ 2 การไหลลักษณะนี้ซึ่งพื้นที่หน้าตัดของการไหลเป็นฟังก์ชันของ x และคุณสมบัติการไหลอื่นๆ ถูกสมมติให้ขึ้นกับระยะ x เท่านั้น หรือ $A = A(x)$, $V = V(x)$, $p = p(x)$;



รูป 3.1 การไหลกึ่งหนึ่งมิติในท่อตีบถ่าง (Katz & Plotkin, 2001)

และอื่นๆ เรียกว่ากึ่งหนึ่งมิติ (Quasi-one-dimensional flow) และถึงแม้จะเป็นเพียงค่าโดยประมาณของการไหลจริงที่มีลักษณะเป็น 3 มิติ แต่ความถูกต้องของผลลัพธ์ก็เพียงพอสำหรับการประยุกต์ใช้งานในหลายๆ ปัญหา จากสมการต่อเนื่องสำหรับปริมาตรควบคุมในหัวข้อ 2.12 จะได้

$$\iiint_{CV} \frac{\partial}{\partial t}(\rho) dV + \iint_{CS} \rho(\vec{V} \cdot \hat{n}) dS = 0 \quad (2.58)$$

สำหรับการไหลสภาวะคงตัว $\iiint_{CV} \frac{\partial}{\partial t}(\rho) dV = 0$ ดังนั้น

$$\iint_{CS} \rho(\vec{V} \cdot \hat{n}) dS = 0 \quad (3.14)$$

ใช้สมการ (3.14) กับปริมาตรควบคุม (Control volume) ที่มีพื้นผิวควบคุม (Control surface) ประกอบด้วยหน้าตัด 1 และ 2 กับผิวท่อในรูป 3.1 จะได้

มวลไหลเข้าหน้าตัด A_1 + มวลไหลออกหน้าตัด A_2 + มวลผ่านผนังท่อ = 0

$$\iint_{A_1} \rho \vec{V} \cdot d\vec{S} + \iint_{A_2} \rho \vec{V} \cdot d\vec{S} + \iint_{\text{wall}} \rho \vec{V} \cdot d\vec{S} = 0 \quad (3.15)$$

ตามแนวผนังความเร็วของการไหลอยู่ในแนวสัมผัสกับผนังและจากนิยาม $d\vec{S}$ จะตั้งฉากกับผนัง ดังนั้นตามแนวผนัง $\vec{V} \cdot d\vec{S} = 0$ นั่นคือเทอมที่สามในสมการ (3.15) จะเป็นศูนย์ ที่ตำแหน่ง 1 การไหลมีความเร็วสม่ำเสมอตลอดหน้าตัด A_1 และความเร็ว $\vec{V}$ และ $d\vec{S}$ อยู่ในทิศทางตรงข้ามกัน (ตามนิยามทิศทางของ $d\vec{S}$ จะพุ่งออกจากปริมาตรควบคุมเสมอ) ดังนั้น

$$\iint_{A_1} \rho \vec{V} \cdot d\vec{S} = -\rho_1 A_1 V_1 \quad (3.16a)$$

ที่ตำแหน่ง 2 การไหลมีความเร็วสม่ำเสมอตลอดหน้าตัด A_2 และความเร็ว $\vec{V}$ และ $d\vec{S}$ อยู่ในทิศทางเดียวกัน ดังนั้น

$$\iint_{A_2} \rho \vec{V} \cdot d\vec{S} = \rho_2 A_2 V_2 \quad (3.16b)$$

แทนสมการ (3.16) ลงในสมการ (3.15) จะได้

$$\rho_1 A_1 V_1 = \rho_2 A_2 V_2 \quad (3.17)$$

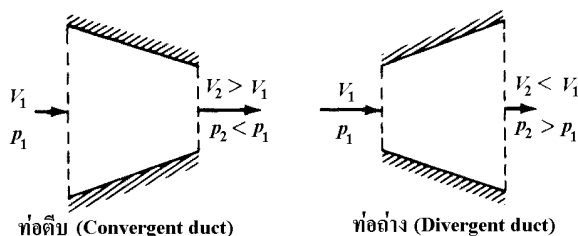
สมการ (3.17) คือสมการการไหลต่อเนื่องกึ่งหนึ่งมิติที่สามารถนำไปใช้ได้กับการไหลทั้งที่มีและไม่มีกักตัว ความหมายทางกายภาพของสมการ คือ อัตราการไหลมวลผ่านท่อจะมีค่าคงที่ (มวลที่ไหลเข้าจะต้องเท่ากับมวลที่ไหลออก)

พิจารณาการไหลไร้การกักตัว เมื่อ ρ มีค่าคงที่ ดังนั้น $\rho_1 = \rho_2$ เราจะได้

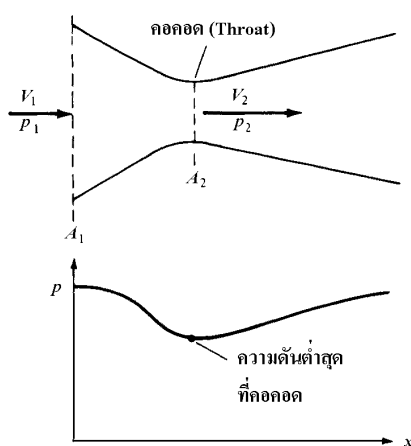
$$A_1 V_1 = A_2 V_2 \quad (3.18)$$

สมการ (3.18) คือสมการการไหลไร้การกักตัวสภาวะคงตัวในท่อหนึ่งมิติ ในทางกายภาพสมการนี้กล่าวว่าปริมาตรการไหล (Volume flow) ผ่านท่อจะมีอัตราคงที่ จากสมการ (3.18) จะเห็นว่าถ้าพื้นที่หน้าตัดของท่อลดลง (ท่อตีบ, convergent duct) ความเร็วจะเพิ่มขึ้นและในทางกลับกันถ้าพื้นที่หน้าตัดของท่อเพิ่มขึ้น (ท่อถ่าง, divergent duct) ความเร็วจะลดลง ข้อสรุปนี้เป็นผลสืบเนื่องพื้นฐานที่ได้จากสมการการไหลต่อเนื่อง นอกจากนี้ถ้าพิจารณาจากสมการเบอร์นูลลีจะเห็นว่าเมื่อ

ความเร็วเพิ่มขึ้นในท่อตีบ ความดันจะลดลง และกลับกันเมื่อความเร็วลดลงในท่อถ่าง ความดันจะเพิ่มขึ้น การเปลี่ยนแปลงความดันนี้แสดงในรูป 3.2



รูป 3.2 การไหลไร้การอัดตัวในท่อ (Katz & Plotkin, 2001)



รูป 3.3 การไหลผ่านท่อเวนจูรี (Katz & Plotkin, 2001)

ถ้าพิจารณาการไหลไร้การอัดตัวผ่านท่อตีบถ่าง (Convergent-divergent duct) ในรูป 3.3 กระแสของไหลไหลเข้าสู่ท่อด้วยความเร็ว V_1 และความดัน p_1 ความเร็วการไหลจะเพิ่มขึ้นในช่วงท่อตีบจนมีค่าสูงสุด V_2 ที่ตำแหน่งพื้นที่หน้าตัดเล็กที่สุดของท่อ ตำแหน่งนี้ของท่อเรียกคอคอด (Throat) ในช่วงนี้ของท่อความดันจะลดลงและมีค่าต่ำสุดที่คอคอดเท่ากับ p_2 หลังจากคอคอดท่อจะเริ่มขยายออกความเร็วจะลดลงและความดันจะเพิ่มขึ้น ท่อที่แสดงในรูป 3.3 เรียกว่าท่อเวนจูรี (Venturi) ซึ่งเป็นอุปกรณ์ที่ถูกนำมาใช้งานอย่างกว้างขวางในทางวิศวกรรม ลักษณะสำคัญของท่อเวนจูรีอยู่ที่ความดัน p_2 ที่คอคอดจะต่ำกว่าความดันบรรยากาศ p_1 นอกท่อเวนจูรี ความดันต่างระหว่าง $p_1 - p_2$ เป็นข้อได้เปรียบที่นำไปใช้งาน เช่น ในคาร์บูเรเตอร์ของรถยนต์ หรือกระบอกฉีดยาแก้นุ้ นอกจากนี้ท่อเวนจูรียังถูกนำไปใช้เป็นเครื่องมือวัดความเร็ว และวัดอัตราการไหลในท่อได้เป็นอย่างดี

พิจารณาท่อเวนจูรีที่มีอัตราส่วนพื้นที่หน้าตัดทางเข้าต่อคอคอด (A_1/A_2) ตามรูป 3.3 สมมติว่าท่อเวนจูรีถูกนำไปวางไว้ในกระแสลมที่ไม่ทราบค่าความเร็วลม A_1 ถ้าต้องการวัดความเร็วลมนี้สิ่งที่ต้องทำคือวัดความต่างความดัน $p_1 - p_2$ ซึ่งทำได้โดยการเจาะรูเล็กๆ (a pressure tap) ที่ผนังท่อเวนจูรี

ตรงตำแหน่งทางเข้าและคอคอดแล้วต่อท่อวัดความดันไปยังมาตรวัดความดันหรือมานิเตอร์
ค่า $p_1 - p_2$ ที่วัดได้จะสัมพันธ์กับความเร็ว V_1 ตามสมการเบอร์นูลลี

$$V_1^2 = \frac{2}{\rho}(p_2 - p_1) + V_2^2 \quad (3.19)$$

แต่จากสมการการไหลต่อเนื่อง สมการ (3.18)

$$V_2 = \frac{A_1}{A_2} V_1 \quad (3.20)$$

แทนสมการ (3.20) ใน (3.19) จะได้

$$V_1^2 = \frac{2}{\rho}(p_2 - p_1) + \left(\frac{A_1}{A_2}\right)^2 V_1^2 \quad (3.21)$$

แก้สมการ (3.21) สำหรับ V_1 จะได้

$$V_1 = \sqrt{\frac{2(p_1 - p_2)}{\rho \left[\left(\frac{A_1}{A_2} \right)^2 - 1 \right]}} \quad (3.22)$$

สมการ (3.22) เป็นผลลัพธ์ที่เราต้องการ สมการให้ความเร็วกระแสอากาศ V_1 ในทอมของความต่าง
ความดันที่วัดได้ $p_1 - p_2$ กับอัตราส่วนพื้นที่ (A_1/A_2) และ ρ ที่ทราบค่า ในลักษณะนี้ท่อเวนทูรี
สามารถนำไปใช้วัดความเร็วกระแสลมได้

การประยุกต์ใช้งานอีกอย่างหนึ่งของการไหลไร้การอัดตัวในท่อคืออุโมงค์ลมความเร็วต่ำ (Low speed Wind Tunnel) ซึ่งเป็นอุปกรณ์ที่ใช้สร้างกระแสลมเพื่อจำลองการบินในชั้นบรรยากาศ
อุโมงค์ลมความเร็วต่ำจะถูกออกแบบให้มีความเร็วลมระหว่าง 0 ถึง 250 ไมล์ต่อชั่วโมง จากรูป
ประกอบจะเห็นว่าอุโมงค์ลมคือท่อเวนทูรีขนาดใหญ่ที่กระแสอากาศถูกสร้างขึ้นโดยใช้ใบพัดซึ่งขับเคลื่อนโดย
มอเตอร์ ใบพัดที่ใช้จะคล้ายใบพัดของอากาศยานและมีประสิทธิภาพสูงในการดูด (หรือเป่า) อากาศ
ให้ไหลเวียนในวงจรของอุโมงค์ลม อุโมงค์ลมอาจมีลักษณะวงจรเป็นเปิดอย่างรูป 3.4 ก ซึ่งอากาศถูก
ดูดจากบรรยากาศภายนอกเข้ามาในวงจรและปล่อยทิ้งไป หรืออาจมีลักษณะเป็นวงจรปิดอย่างในรูป
3.4 ข ที่อากาศจะถูกหมุนเวียนอยู่ในวงจร ทั้งสองกรณีกระแสอากาศความดัน p_1 จะไหลเข้าสู่
ท่อนิวซีเซล (Nozzle) ด้วยความเร็วต่ำ V_1 ที่หน้าตัด A_1 ที่บริเวณหน้าตัดทดลอง (Test section)
ท่อนิวซีเซลลดพื้นที่หน้าตัดลงเป็น A_2 ซึ่งทำให้ความเร็วเพิ่มขึ้นเป็น V_2 และความดันจะลดลงเป็น p_2
หลังจากไหลผ่านหุ่นจำลอง (ซึ่งอาจเป็นอากาศยานทั้งลำหรือแค่บางส่วนของอากาศยาน เช่น ปีก
หาง กะเปาะเครื่องยนต์) อากาศจะไหลผ่านสู่ส่วนที่ท่อผายออกเรียกว่าทอดิฟฟิวเซอร์ (Diffuser) ซึ่ง
พื้นที่หน้าตัดจะเพิ่มขึ้นเป็น A_3 ความเร็วลดลงเป็น V_3 และความดันเพิ่มขึ้นเป็น p_3 จากสมการ
การไหลต่อเนื่องความเร็วในหน้าตัดทดลองจะเป็น

$$V_2 = \frac{A_1}{A_2} V_1 \quad (3.20)$$

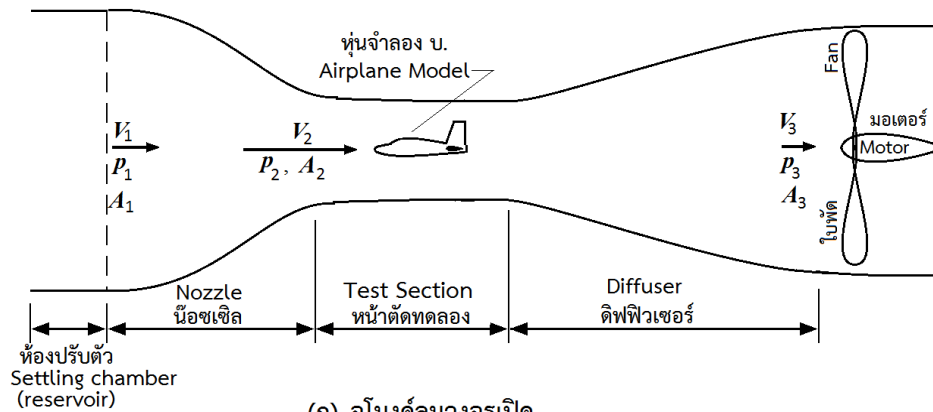
ส่วนความเร็วที่ปลายดิฟฟิวเซอร์จะเป็น

$$V_3 = \frac{A_2}{A_3} V_2 \quad (3.23)$$

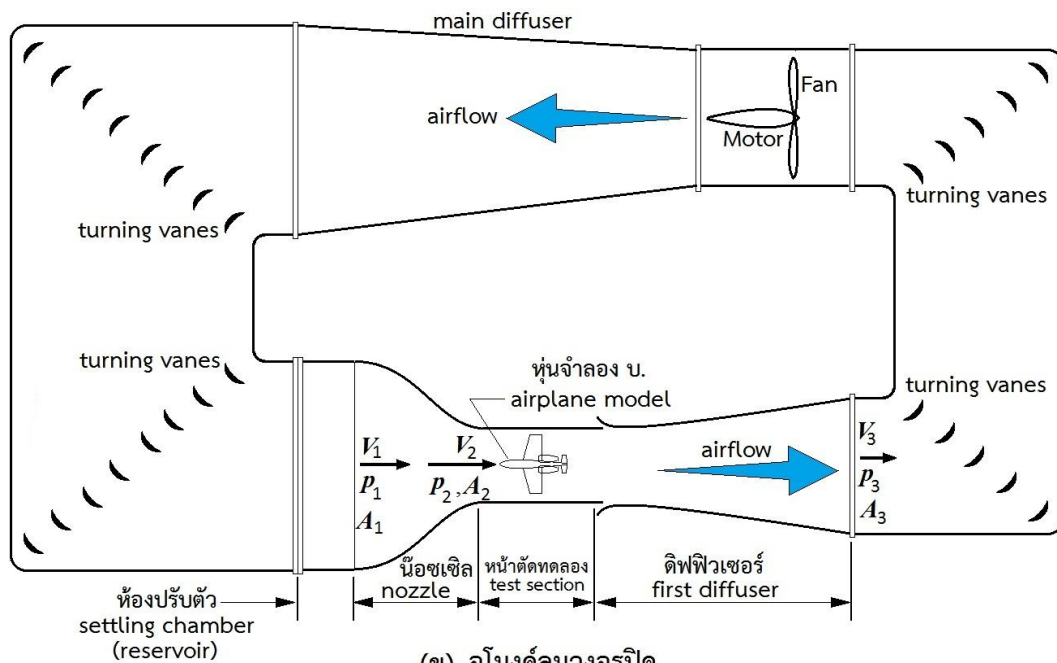
และความดันที่เปลี่ยนแปลงไปตามตำแหน่งต่างๆ จะได้จากสมการเบอร์นูลลี

$$p_\infty + \frac{1}{2} \rho V_\infty^2 = p + \frac{1}{2} \rho V^2$$

$$p_1 + \frac{1}{2} \rho V_1^2 = p_2 + \frac{1}{2} \rho V_2^2 = p_3 + \frac{1}{2} \rho V_3^2 \quad (3.24)$$



(ก) อุโมงค์ลมวงจรเปิด



(ข) อุโมงค์ลมวงจรปิด

รูป 3.4 อุโมงค์ลมความเร็วต่ำ (ก) วงจรเปิด (ข) วงจรปิด (Anderson, 2016)

ส่วนประกอบสำคัญที่ควบคุมความเร็วในส่วนทดลองของอุโมงค์ลมคือความดันต่าง $p_1 - p_2$ หรือให้เห็นชัด เขียนสมการ (3.24) ใหม่เป็น

$$V_2^2 = \frac{2}{\rho} (p_1 - p_2) + V_1^2 \quad (3.25)$$

รวมกับสมการ (3.23) จะได้

$$V_2^2 = \frac{2}{\rho}(p_1 - p_2) + \left(\frac{A_2}{A_1}\right)^2 V_1^2 \quad (3.26)$$

หรือความเร็ว V_2 ในหน้าตัดทดลองจะเป็น

$$V_2 = \sqrt{\frac{2(p_1 - p_2)}{\rho[1 - (A_2/A_1)^2]}} \quad (3.27)$$

ในเมื่ออัตราส่วน (A_1/A_2) เป็นค่าแน่นอนของอุโมงค์ลมแต่ละตัว และ ρ เป็นความหนาแน่นซึ่งคงที่สำหรับการไหลไร้การอัดตัว สมการ (3.27) จึงสรุปให้เห็นว่าความเร็ว V_2 ถูกกำหนดโดยความดันต่าง $p_1 - p_2$ ซึ่งกำกับโดยกำลังที่ได้จากใบพัด ดังนั้นการปรับรอบใบพัดเพื่อควบคุมความเร็ว V_2 ในหน้าตัดทดลองที่ต้องการ แท้จริงแล้วคือการปรับค่า $p_1 - p_2$ นั้นเอง

สำหรับอุโมงค์ลมความเร็วต่ำการวัดความเร็ว V_2 ผ่านสมการ (3.27) โดยการวัดค่าความดันต่าง $p_1 - p_2$ นั้นวิธีที่สะดวกที่สุดก็คือการใช้มาโนมิเตอร์อย่างง่าย (หัวข้อ 1.9) ซึ่งทำได้โดยต่อท่อวัดความดันจากรูที่เจาะที่ผนังอุโมงค์ไปยังมาโนมิเตอร์หลอดแก้วรูปตัว U ซึ่งค่าความต่างความดันจะแสดงในรูปความสูงของของเหลวในมาโนมิเตอร์ ถ้าด้านความดัน p_a ของมาโนมิเตอร์ต่อกับรูวัดความดันที่ตำแหน่งห้องปรับตัว (Settling chamber) ที่มีความดัน p_1 และด้านความดัน p_b ของมาโนมิเตอร์ต่อกับรูวัดความดันที่หน้าตัดทดลองที่มีความดัน p_2 ดังนั้นจากสมการ (1.71)

$$p_1 - p_2 = \gamma \text{ของเหลว } \Delta h$$

เมื่อ Δh คือความสูงของของเหลวในมาโนมิเตอร์ และ γ คือน้ำหนักจำเพาะของของเหลวในมาโนมิเตอร์ เพราะฉะนั้นจะได้

$$V_2 = \sqrt{\frac{2\gamma\Delta h}{\rho[1 - (A_2/A_1)^2]}} \quad (3.28)$$

สมการ (3.28) เป็นการคำนวณความเร็วในส่วนทดลองที่ใช้ทั่วไป แต่ควรคำนึงถึงข้อจำกัดไว้ด้วยว่าสมการ (3.28) มีที่มาจากสมการเบอร์นูลลีที่เรากำหนดให้การไหลเป็นมิติเดียว และไม่มีความหนืดมาเกี่ยวข้อง การใช้สมการนี้บางครั้งอาจทำให้เราได้ผลลัพธ์ที่ผิดถ้าข้อกำหนดที่เราตัดทิ้งไปจากการพิจารณาเกิดมีความสำคัญขึ้นมา ตัวอย่างเช่น ถ้า $A_1 = A_3$ (พื้นที่เข้ากับพื้นที่ออกของอุโมงค์ลมเท่ากัน) สมการเบอร์นูลลีจะให้ค่า $V_1 = V_3$ และค่า $p_1 = p_3$ ซึ่งหมายถึงไม่มีความดันต่างหรือการสูญเสียความดันเลยตลอดการไหลผ่านอุโมงค์ลม ถ้าข้อความนี้จริงกระแสลมจะไหลหมุนเวียนอยู่ในอุโมงค์ลมตลอดไปไม่สิ้นสุดโดยไม่ต้องใช้ใบพัดหรือกำลังจากภายนอก แต่เราทราบอยู่แล้วว่าแรงเสียดทานจากผนังและแรงต้านบนหุ่นจำลอง จะทำให้เกิดการสูญเสียความดันขึ้นในอุโมงค์ลมซึ่งสมการเบอร์นูลลีไม่ได้รวมเอาไว้ในสมการ ดังนั้นในอุโมงค์ลมหน้าที่ของใบพัดและมอเตอร์คือทดแทนการสูญเสียความดันโดยการเติมพลังงานให้กระแสอากาศนั่นเอง

ตัวอย่าง 3.2 พิจารณาท่อเวนทอรีที่มีอัตราส่วนพื้นที่หน้าตัดคอคอดต่อทางเข้าเป็น 0.8 วางอยู่ในการไหลที่ระดับน้ำทะเล ถ้าความดันต่างระหว่างทางเข้าและคอคอดเป็น $7 \text{ lb}_f/\text{ft}^2$ จงคำนวณความเร็วที่ทางเข้า

วิธีทำ ที่ระดับน้ำทะเล $\rho = 0.002377 \text{ slug}/\text{ft}^3$ ดังนั้น

$$\begin{aligned} V_1 &= \sqrt{\frac{2(p_1 - p_2)}{\rho[(A_1/A_2)^2 - 1]}} \\ &= \sqrt{\frac{2(7 \text{ lb}_f/\text{ft}^2)}{(0.002377 \text{ slug}/\text{ft}^3)[(1/0.8)^2 - 1]}} \\ &= 102.3 \text{ ft/s} \quad \text{ตอบ} \end{aligned}$$

ตัวอย่าง 3.3 พิจารณาอุโมงค์ลมความเร็วต่ำกว่าเสียงที่มีสัดส่วนการลดหน้าตัด (Contraction ratio) ของน็อซเซิลเท่ากับ 12 : 1 ถ้าความเร็วในหน้าตัดทดลองเป็น 50 m/s และมีสภาวะที่ระดับน้ำทะเล จงคำนวณความสูงที่ต่างกันในมาโนมิเตอร์หลอดแก้วรูปตัว U ที่มีปรอทเป็นของเหลวปลายข้างหนึ่งต่อกับทางเข้าและปลายอีกด้านต่อกับส่วนทดลอง

วิธีทำ ที่ระดับน้ำทะเล $\rho = 1.23 \text{ kg}/\text{m}^3$

$$\begin{aligned} \text{เพราะฉะนั้น} \quad p_1 - p_2 &= \frac{1}{2} \rho V_2^2 \left[1 - \left(\frac{A_2}{A_1} \right)^2 \right] \\ &= \frac{1}{2} (1.23 \text{ kg}/\text{m}^3) (50 \text{ m/s})^2 \left[1 - \left(\frac{1}{12} \right)^2 \right] \\ &= 1527 \text{ N}/\text{m}^2 \end{aligned}$$

แต่ $p_1 - p_2 = \gamma_{\text{ของเหลว}} \Delta h$ และ ρ ของปรอท = $1.36 \times 10^4 \text{ kg}/\text{m}^3$

$$\begin{aligned} \text{ดังนั้น} \quad \gamma_{\text{ปรอท}} &= (1.36 \times 10^4 \text{ kg}/\text{m}^3)(9.8 \text{ m/s}^2) \\ &= 1.33 \times 10^5 \text{ N}/\text{m}^3 \\ \Delta h &= \frac{p_1 - p_2}{\gamma} \\ &= \frac{1527 \text{ N}/\text{m}^2}{1.33 \times 10^5 \text{ N}/\text{m}^3} \\ &= 0.00148 \text{ m} \quad \text{ตอบ} \end{aligned}$$

ตัวอย่าง 3.4 พิจารณาหุ่นจำลองอากาศยานในอุโมงค์ลมในรูป 3.4 อุโมงค์ลมมีสัดส่วนการลดหน้าตัด (Contraction ratio) ของน็อซเซิล 12 : 1 สัมประสิทธิ์แรงยกสูงสุดของหุ่นจำลองวัดได้ 1.3 พื้นที่ระนาบปีกของหุ่นจำลอง 6 ตารางฟุต การวัดแรงยกใช้เครื่องมือที่วัดแรงได้สูงสุด 1000 ปอนด์ (ถ้าแรงเกิน 1000 ปอนด์ อุปกรณ์จะเสียหาย) ในขณะที่ทดลองหุ่นจำลองจะถูกปรับไปที่มุมปะทะต่างๆ

จนถึงมุมที่ให้สัมประสิทธิ์แรงยกสูงสุด จงคำนวณความดันต่างสูงสุดระหว่างห้องปรับตัว (Settling chamber) และหน้าต่างทดลองที่อนุญาตได้ สมมติคุณสมบัติอากาศที่ระดับน้ำทะเล

วิธีทำ แรงยกสูงสุดจะเกิดที่มุมปะทะที่มีค่า C_L สูงสุด ดังนั้นแรงยกสูงสุดที่อุปกรณ์วัดได้ 1000 ปอนด์ จะใช้หาความเร็วกระแสอิสระได้จาก

$$L_{max} = \frac{\rho_{\infty} V_{\infty}^2 SC_{L_{max}}}{2}$$

หรือ

$$V_{\infty} = \sqrt{\frac{2L_{max}}{\rho_{\infty} SC_{L_{max}}}}$$

$$= \sqrt{\frac{2(1000 \text{ lb}_f)}{(0.002377 \text{ slug/ft}^3)(6 \text{ ft}^2)(1.3)}}$$

$$= 328.4 \text{ ft/s}$$

คำนวณความต่างความดันได้จาก

$$p_1 - p_2 = \frac{1}{2} \rho_{\infty} V_{\infty}^2 \left[1 - \left(\frac{A_2}{A_1} \right)^2 \right]$$

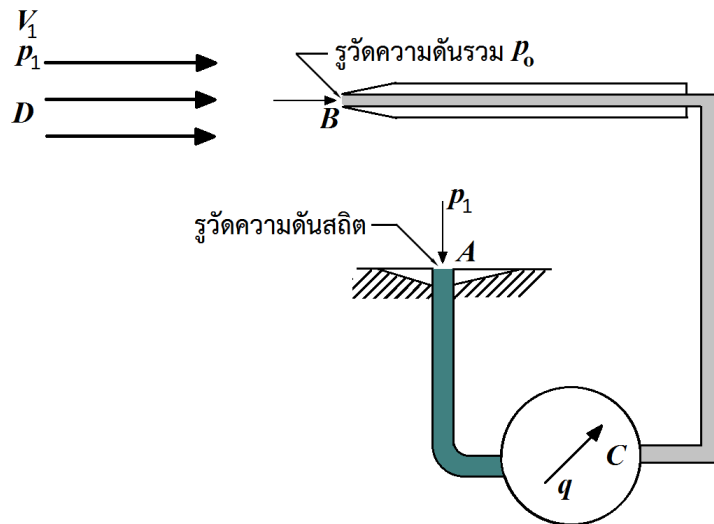
$$= \frac{1}{2} (0.002377 \text{ slug/ft}^3) (328.4 \text{ ft/s})^2 \left[1 - \left(\frac{1}{12} \right)^2 \right]$$

$$= 117.5 \text{ lb/ft}^2$$

ตอบ

3.4 ท่อปีโตต์ (Pitot tube) : อุปกรณ์วัดความเร็วลม

ท่อปีโตต์เป็นอุปกรณ์วัดความเร็วกระแสอากาศที่ใช้กันอย่างกว้างขวาง ประดิษฐ์ขึ้นเป็นครั้งแรกโดยชาวฝรั่งเศส “องรี ปีโตต์” (Henri Pitot) เพื่อใช้วัดความเร็วกระแสในแม่น้ำแซน โดยใช้ท่อที่หักเป็นรูปตัว L ตามที่แสดงในรูปที่ 3.5 แล้วหันปลายข้างหนึ่งให้ขนานกับทิศทางของกระแสแล้วใช้ความดันในท่อเป็นตัววัดความเร็วกระแส น้ำพิจารณากระแสของไหลที่มีความดัน p_1 และความเร็ว V_1 ในรูป 3.5 เรียกความดัน p_1 ของกระแสของไหลว่าความดันสถิต (Static pressure) ซึ่งเป็นความดันที่เป็นผลมาจากการชนของโมเลกุลอากาศอิสระตามที่กล่าวแล้วในบทที่ 1 บนพื้นผิวสมมติใดๆ ที่เคลื่อนที่ไปพร้อมกระแส (ด้วยความเร็ว V_1) จะถูกกระทำด้วยความดัน p_1 โดยทั่วไปเมื่อก้าวถึงความดันเราจะหมายถึงความดันสถิตแบบ p_1 นอกจากจะระบุเป็นอย่างอื่น พิจารณาต่อไปอีกที่ขอบเขตของการไหล เช่น ผนังที่เจาะรูตั้งฉากกับผิวอย่างในรูป 3.5 หน้าตัดของรูจะขนานกับกระแส เช่นที่ตำแหน่ง A ในรูป เนื่องจากกระแสพัดผ่านรูเปิดไปความดันที่จุด A จึงเป็นความดันสถิตของกระแสที่วัดได้ รูเปิดเล็กๆ บนผิวแบบนี้เรียกว่ารูวัดความดันสถิต (Static pressure orifice หรือ static pressure tap)



รูป 3.5 ท่อยิปโตต์และรูวัดความดัน (Anderson, 2016)

ถ้าท่อยิปโตต์ถูกแห่เข้าไปในกระแสโดยให้ปลายเปิดปะทะตั้งฉากกับกระแสอย่างเช่นจุด B ในรูป แล้วต่อปลายอีกข้างกับเครื่องวัดความดันที่จุด C หลังจากเวลาผ่านไปชั่วขณะหนึ่งจากที่ท่อยิปโตต์ถูกแห่เข้าไป กระแสจะเข้าไปเต็มท่อยิปโตต์ แต่เนื่องจากปลาย C เป็นปลายปิดเมื่อของไหลบรรจุเต็มในท่อของไหลจะหยุดนิ่งหรือมีความเร็วเป็นศูนย์ รวมถึงจุด B ที่ปลายท่อดั้ว ผลก็คือเส้นกระแสที่เข้าปะทะจุด B ตามเส้น DB ในรูป จะเห็นจุด B เป็นสิ่งที่กีดขวาง ของไหลที่เคลื่อนที่ตามแนว DB จะเคลื่อนที่ช้าลงเมื่อเข้าใกล้จุด B และมีความเร็วเป็นศูนย์เมื่อถึงจุด B เราเรียกจุด B (หรือจุดอื่นใดในการไหลที่มีความเร็วเป็นศูนย์) ว่าจุดชะงัก (Stagnation point) ดังนั้น $V_B = 0$ จากสมการเบอร์นูลลี เราทราบว่าความดันเพิ่มจะควบคู่กับความเร็วที่ลดลง นั่นคือ $p_B > p_1$ เราเรียกความดันที่วัดที่จุดชะงักว่าความดันจุดชะงัก (Stagnation pressure) หรือความดันรวมหรือความดันเบ็ดเสร็จ (Total pressure) ใช้สัญลักษณ์แทนด้วย p_0 เพราะฉะนั้นที่จุด B , $p_B = p_0$ ดังนั้น ความดันที่วัดได้ในการไหลจะแบ่งได้เป็นสองแบบ คือ ความดันสถิตและความดันรวม ท่อยิปโตต์ใช้หลักการนี้ในการวัดความเร็ว สังเกตว่าความดันรวมของการไหลที่เข้าปะทะจุด B ของท่อยิปโตต์ จะมีค่าเท่ากันทุกจุดภายในท่อจาก B ถึง C เพราะกระแสในท่มีความเร็วเป็นศูนย์ นั่นคือ เกจวัดความดันที่ C จะวัดค่า p_0 ซึ่งเมื่อนำมารวมกับการวัดความดันสถิต โดยใช้รูเจาะ A จะได้ผลต่าง ความดันรวมกับความดันสถิต $p_0 - p_1$ ซึ่งนำไปคำนวณความเร็วกระแสได้โดยใช้สมการเบอร์นูลลีระหว่างจุด A ซึ่งมีความดัน p_1 และความเร็ว V_1 กับจุด B ซึ่งมีความดัน p_0 และความเร็วศูนย์

$$p_A + \frac{1}{2}\rho V_A^2 = p_B + \frac{1}{2}\rho V_B^2$$

หรือ

$$p_1 + \frac{1}{2}\rho V_1^2 = p_0 + 0 \quad (3.29)$$

แก้สมการหา V_1 จะได้

$$V_1 = \sqrt{\frac{2(p_0 - p_1)}{\rho}} \quad (3.30)$$

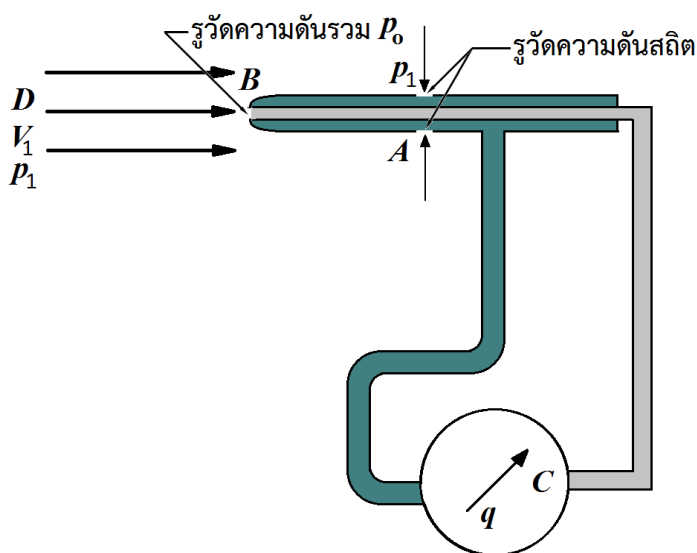
สมการ (3.30) ทำให้เราสามารถคำนวณความเร็วลมได้ง่าย ๆ จากความดันต่างระหว่างความดันรวมและความดันสถิต เมื่อ p_0 ได้จากท่อปีโตต์ และ p_1 ได้จากรูวัดความดันจากตำแหน่งที่เหมาะสม จริงๆ แล้วอาจรวมการวัดความดัน p_0 และ p_1 ของกระแสน้ำในอุปกรณ์ตัวเดียวกันได้ เรียกอุปกรณ์นี้ว่า “ท่อปีโตต์ – สแตติก” (Pitot-static probe) ตามที่เห็นในรูป 3.6 ท่อปีโตต์ – สแตติกเป็นท่อ 2 ชั้น มีปลายเปิดเพื่อวัดความดันรวมและมีรูวัดความดันสถิตที่ผิวท่อชั้นนอกเลยจากตำแหน่งวัดความดันรวมไป ในสมการ (3.29) เทอม $\frac{1}{2}\rho V_1^2$ เรียกว่าความดันพลวัต (Dynamic pressure) และแทนด้วยสัญลักษณ์ q_1 สำหรับการไหลทั่วไปค่า $\frac{1}{2}\rho V^2$ ถือเป็นความดันพลวัตของการไหล ณ จุดที่มีความเร็ว V จากสมการ (3.29) จะเห็นว่าความดันรวมของการไหลเป็นผลรวมของความดันสถิตและความดันพลวัตของการไหล

$$\underbrace{p_1}_{\text{static}} + \underbrace{\frac{1}{2}\rho V_1^2}_{\text{dynamic}} = \underbrace{p_0}_{\text{total}}$$

หรือ

$$p_1 + q_1 = p_0$$

$$q_1 = p_0 - p_1 \quad (3.31)$$



รูป 3.6 ท่อปีโตต์ – สแตติก (Anderson, 2016)

โปรดจำว่าสมการ (3.31) มีที่มาจากสมการเบอร์นูลลี ดังนั้นจึงใช้ได้เฉพาะกับการไหลไร้การอัดตัว สำหรับการไหลอัดตัว (Compressible flow) ความดันต่าง $p_0 - p_1$ จะไม่เท่ากับ q_1 แต่ก็ยังนำท่อปีโตต์ไปใช้วัดความเร็วโดยวิธีเดียวกันกับการไหลไร้การอัดตัวได้เพียงแต่สมการจะแตกต่างออกไป

ตัวอย่าง 3.5 เครื่องบินบินที่บรรยากาศระดับน้ำทะเล ท่อปีโตต์ที่ติดตั้งที่ปลายปีกอ่านค่าความดันได้ 2190 lb/ft^2 จงหาความเร็วของเครื่องบิน

วิธีทำ บรรยากาศที่ระดับน้ำทะเลมีค่าความดันสถิต 2116 lb/ft^2 จากสมการ (3.31)

$$\begin{aligned} V_1 &= \sqrt{\frac{2(p_o - p_1)}{\rho}} \\ &= \sqrt{\frac{2(2190 - 2116) \text{ lb}_f/\text{ft}^2}{0.002377 \text{ slug/ft}^3}} \\ &= 250 \text{ ft/s} \end{aligned} \quad \text{ตอบ}$$

ตัวอย่าง 3.6 ในตัวอย่าง 3.4 สมมติว่าท่อปีโตต์ถูกนำไปไว้ด้านหน้าหุ่นจำลอง จงคำนวณว่าจะอ่านค่าความดันได้เท่าใด สำหรับเงื่อนไขอย่างเดียวกับ ตัวอย่าง 3.4

วิธีทำ จากสมการ (3.31)

$$\begin{aligned} p_o &= p_\infty + q_\infty = p_\infty + \frac{1}{2}\rho_\infty V_\infty^2 \\ &= 2116 \text{ lb/ft}^2 + \frac{1}{2}(0.002377 \text{ lb/ft}^3)(328.4 \text{ ft/s})^2 \\ &= 2116 + 128.2 \text{ lb/ft}^2 \\ &= 2244.2 \text{ lb/ft}^2 \end{aligned} \quad \text{ตอบ}$$

3.5 สัมประสิทธิ์ความดัน (Pressure coefficient)

ในบทที่ 1 ได้กล่าวถึงการพิจารณาแรงและโมเมนต์ในรูปสัมประสิทธิ์ ซึ่งให้ความสะดวกกว่าการพิจารณาแรงและโมเมนต์โดยตรง เช่นเดียวกัน การพิจารณาความดันในรูปสัมประสิทธิ์ก็มีประโยชน์มากเช่นกัน ในทางอากาศพลศาสตร์สัมประสิทธิ์ความดัน c_p กำหนดโดยความสัมพันธ์

$$c_p = \frac{p - p_\infty}{q_\infty} \quad (3.32)$$

สมการ (3.32) เป็นนิยามที่ใช้กันทั่วไปในทางอากาศพลศาสตร์ ครอบคลุมทั้งการไหลในย่านความเร็วต่ำไปจนถึงความเร็วเหนือเสียง และส่วนมากการใช้งานและการหาค่าความดันในรูปสัมประสิทธิ์มักสะดวกกว่าการคำนวณหาความดันโดยตรง

สำหรับการไหลไร้การอัดตัว c_p จะอยู่ในรูปของความเร็วเพียงอย่างเดียว พิจารณาการไหลผ่านวัตถุในกระแสอิสระที่มีความดัน p_∞ และความเร็ว V_∞ ณ จุดใดๆ ในกระแสที่มีความดัน p และความเร็ว V จากสมการเบอร์นูลลี

$$p_\infty + \frac{1}{2}\rho V_\infty^2 = p + \frac{1}{2}\rho V^2$$

หรือ

$$p - p_\infty = \frac{1}{2}\rho(V_\infty^2 - V^2) \quad (3.33)$$

แทนสมการ (3.32) ในสมการ (3.33) จะได้

$$c_p = \frac{p - p_\infty}{q_\infty} = \frac{\frac{1}{2}\rho(V_\infty^2 - V^2)}{\frac{1}{2}\rho V_\infty^2}$$

$$c_p = 1 - \left(\frac{V}{V_\infty}\right)^2 \quad (3.34)$$

สมการ (3.34) มีประโยชน์มากสำหรับแสดงค่าสัมประสิทธิ์ความดัน c_p สำหรับการไหลไร้การอัดตัว สังเกตว่าที่จุดชะงักความเร็วเป็นศูนย์ ($V = 0$) ค่าของ c_p สำหรับการไหลไร้การอัดตัวจะเท่ากับ 1 เสมอซึ่งเป็นค่าสูงสุดที่แต่ละจุดจะมีได้และในตำแหน่งที่ $V > V_\infty$ หรือ $p < p_\infty$ c_p จะมีค่าเป็นลบ ถ้าจัดสมการ (3.34) ใหม่เป็น

$$p = p_\infty + q_\infty c_p$$

จะเห็นว่าค่าของ c_p จะบอกเราว่า p จะมีค่ามากหรือน้อยกว่า p_∞ เป็นจำนวนกี่เท่าของ q_∞ นั่นคือ ถ้า $c_p = 1$ จะได้ $p = p_\infty + q_\infty$ ค่าความดัน ณ ตำแหน่งนั้นจะมีค่า 1 เท่าของความดันพลวัต สูงกว่าความดันสถิตของกระแสอิสระ หรือถ้า $c_p = -3$ จะได้ $p = q_\infty - 3 q_\infty$

ตัวอย่าง 3.7 แพนอากาศในกระแสอิสระความเร็ว 150 ft/s ความเร็ว ณ จุด ๆ หนึ่งบนผิวแพนอากาศเป็น 225 ft/s จงคำนวณสัมประสิทธิ์ความดันที่จุดนี้

$$c_p = 1 - \left(\frac{V}{V_\infty}\right)^2$$

$$= 1 - \left(\frac{225}{150}\right)^2$$

$$= -1.25 \quad \text{ตอบ}$$

ตัวอย่าง 3.8 พิจารณาแบบจำลองอากาศยานในตัวอย่าง 3.4 ที่มุมปะทะสูง(ต่ำกว่าค่าสูงสุดเล็กน้อย) สัมประสิทธิ์ความดันต่ำสุด ณ จุดจุดหนึ่งบนผิวปีกมีค่า -5.3 จงคำนวณความเร็วกระแสอิสระ เมื่อ ก) $V_\infty = 80$ ft/s และ ข) $V_\infty = 300$ ft/s

วิธีทำ จากสมการ (3.34) จะได้

$$(ก) \quad V = \sqrt{V_\infty^2(1 - c_p)} = \sqrt{(80 \text{ ft/s})^2[1 - (-5.3)]}$$

$$= 200.8 \text{ ft/s} \quad \text{ตอบ}$$

$$(ข) \quad V = \sqrt{V_\infty^2(1 - c_p)} = \sqrt{(300 \text{ ft/s})^2[1 - (-5.3)]}$$

$$= 753 \text{ ft/s} \quad \text{ตอบ}$$

ตัวอย่าง 3.8 ข้างบนให้มุมมองที่น่าสนใจ 2 ข้อดังนี้

1. ณ จุดจุดหนึ่งบนผิวแพนอากาศค่า c_p ของจุดนี้ในตัวอย่างมีค่าคงที่แม้ความเร็วกระแสจะเพิ่มจาก 80 เป็น 300 ft/s ทำไม? คงจำได้ว่าจากบทที่ 1 การวิเคราะห์มิติแสดงให้เห็นว่าค่า c_p จะขึ้นอยู่กับ M , Re และรูปร่างกับการจัดวางของวัตถุในกระแสวิกฤติ รวมทั้งตำแหน่งบนผิววัตถุ สำหรับการไหลความเร็วต่ำแบบไร้ความหนืดที่เราพิจารณาอยู่นี้ M และ Re ไม่เข้ามาเกี่ยวข้องกับการเปลี่ยนแปลง ค่าของ c_p จึงขึ้นกับตำแหน่งบนผิวกับรูปร่างลักษณะของวัตถุ ดังนั้น c_p จะไม่ขึ้นกับ V_∞ และ p_∞ ตราบเท่าที่ยังสมมติให้การไหลเป็นการไหลไร้ความหนืดไร้การอัดตัวได้ ซึ่งสำหรับการไหลในแบบนี้เมื่อการแจกแจง c_p รอบตัววัตถุถูกกำหนดแล้ว (โดยการคำนวณ การทดลอง ฯลฯ) การแจกแจง c_p นั้นจะใช้ได้กับทุกค่า V_∞ และ p_∞ ของกระแสวิกฤติ

2. ในส่วน (ข) ของตัวอย่าง 3.8 ความเร็วที่จุดที่ c_p มีค่าต่ำสุด สูงถึง 753 ft/s ทำให้เกิดคำถามว่าสมการ (3.34) สามารถนำมาใช้ได้หรือไม่ ซึ่งคำตอบคือไม่ได้ เพราะว่าสมการ (3.34) ใช้ได้กับการไหลไร้การอัดตัวเท่านั้น ที่ความดันมาตรฐานความเร็วเสียงมีค่า 1117 ft/s ซึ่งทำให้ความเร็วกระแสวิกฤติมีค่า $M = 300/1117 = 0.269$ ซึ่งสอดคล้องกับการสมมติให้การไหลไร้การอัดตัว แต่อีกทางหนึ่งการไหลมีการขยายตัวอย่างรวดเร็ว และเร่งความเร็วเป็น 753 ft/s ด้านผิวบนของแพนอากาศที่จุดที่มีความดันต่ำสุด ณ จุดนี้อุณหภูมิจะลดลงและความเร็วเสียงจะน้อยกว่า 1117 ft/s (ในอากาศความเร็วเสียงมีค่าขึ้นกับอุณหภูมิซึ่งจะพบในตำราเกี่ยวกับ Compressible flow) ดังนั้นที่จุดนี้กระแสวิกฤติจะมีค่า M สูงกว่า $753/1117 = 0.674$ นั่นคือการไหลได้ขยายตัวไปสู่ย่านความเร็วเสียงซึ่งการสมมติให้การไหลเป็นการไหลไร้การอัดตัวไม่สามารถทำได้ หรือคำตอบในข้อ (ข) เป็นคำตอบที่ไม่ถูกต้อง ประเด็นที่น่าสนใจคือ เพียงเพราะว่าหุ่นจำลองถูกทำการทดสอบในอุโมงค์ลมความเร็วต่ำไม่ได้หมายความว่าความสมมติให้การไหลเป็นแบบไร้การอัดตัวจะใช้ได้กับสนามการไหลทั้งหมด อย่างที่เห็นในตัวอย่างนี้มีบางบริเวณรอบๆ วัตถุที่การไหลอาจมีความเร็วสูงขึ้นจนต้องคำนึงถึงการอัดตัวที่เข้ามาเกี่ยวข้อง

3.6 เงื่อนไขของความเร็วสำหรับการไหลไร้การอัดตัว

อนุภาคของไหลที่เคลื่อนที่ไปในสนามการไหลไร้การอัดตัวจะมีความหนาแน่นคงที่และจะมีปริมาตรไม่เปลี่ยนแปลง (Anderson, 2016) ในบทที่ 2 ได้พิสูจน์แล้วว่า $\vec{\nabla} \cdot \vec{V}$ มีค่าเท่ากับอัตราการเปลี่ยนแปลงปริมาตรเทียบกับปริมาตรเดิมของอนุภาค ดังนั้นสำหรับสนามการไหลไร้การอัดตัวเงื่อนไขของความเร็ว คือ

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{V} = 0 \quad (3.35)$$

สมการ (3.35) อาจพิสูจน์ได้จากการพิจารณาสมการการไหลต่อเนื่อง

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{V}) = 0 \quad (2.41)$$

เมื่อ ρ มีค่าคงที่ ดังนั้น $\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$ และ $\vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{V}) = \rho(\vec{\nabla} \cdot \vec{V})$

จะได้ $\rho(\vec{\nabla} \cdot \vec{V}) = 0$

หรือ $\vec{\nabla} \cdot \vec{V} = 0$

ซึ่งเป็นสมการเดียวกับสมการ (3.35)

3.7 สมการกำกับสำหรับการไหลไร้การหมุนไร้การอัดตัว : สมการลาปลาซ

(Governing equation for irrotational incompressible flow : Laplace's equation)

ในหัวข้อ 3.6 สนามการไหลของการไหลไร้การอัดตัวจะอยู่ในรูปที่ความเร็วกำหนดโดยความสัมพันธ์ $\vec{\nabla} \cdot \vec{V} = 0$ และจากหัวข้อ 2.16 ในบทที่ 2 สำหรับการไหลไร้การหมุนเราสามารถกำหนดศักย์ความเร็ว (Velocity potential) ϕ (Anderson, 2016) ซึ่งสัมพันธ์กับความเร็วตามสมการ

$$\vec{V} = \vec{\nabla} \phi \quad (2.85)$$

ดังนั้นสำหรับการไหลไร้การอัดตัวไร้การหมุน (Incompressible irrotational flow) สมการ (3.35) และ (2.85) เมื่อรวมกันจะได้

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \phi) = 0$$

หรือ $\nabla^2 \phi = 0 \quad (3.36)$

สมการ (3.36) คือ สมการลาปลาซ (Laplace's equation) ซึ่งเป็นที่รู้จักกันดีและมีศึกษาถึงคำตอบของสมการไว้หลายรูปแบบ ในวิชาคณิตศาสตร์คำตอบของสมการลาปลาซเป็นฟังก์ชันที่เรียกว่า “ฟังก์ชันฮาร์มอนิก” (Harmonic function) ซึ่งเป็นฟังก์ชันที่มีการรวบรวมไว้เป็นจำนวนมาก ดังนั้นการที่การไหลไร้การอัดตัวไร้การหมุนถูกกำกับด้วยสมการลาปลาซจึงเป็นโชคดีที่มีคำตอบของการไหลในหลายรูปแบบที่เป็นที่เข้าใจอยู่แล้ว

ค่าฟังก์ชันลาปลาซ $\nabla^2 \phi$ ในสมการ (3.37) ในพิกัดต่างๆ แสดงได้ตามสมการต่อไปนี้

พิกัดคาร์ทีเซียน : $\phi = \phi(x, y, z)$

$$\nabla^2 \phi = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} \quad (3.37)$$

พิกัดทรงกระบอก : $\phi = \phi(r, \theta, z)$

$$\nabla^2 \phi = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \phi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} \quad (3.38)$$

พิกัดทรงกลม : $\phi = \phi(r, \theta, \varphi)$

$$\nabla^2 \phi = \frac{1}{r^2 \sin \theta} \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \sin \theta \frac{\partial \phi}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \right) + \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial \phi}{\partial \varphi} \right) \right] \quad (3.39)$$

ทำนองเดียวกันจากหัวข้อ 2.15 สำหรับการไหลสองมิติไร้การอัดตัว คงจำได้ว่าฟังก์ชันกระแส (Stream function) ψ ในพิกัดคาร์ทีเซียนมีนิยามตามสมการ

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y} \quad (2.83a)$$

$$v = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \quad (2.83b)$$

ถ้าพิจารณาสมการการไหลต่อเนื่อง $\vec{\nabla} \cdot \vec{V} = 0$ ในพิกัดคาร์ทีเซียน สำหรับการไหลสองมิติ

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (3.40)$$

แทนสมการ (2.83a) และสมการ (2.83b) ใน (3.40) จะได้

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(-\frac{\partial \psi}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} = 0$$

จะเห็นว่า ψ จะสอดคล้องกับสมการการไหลต่อเนื่องโดยอัตโนมัติซึ่งจริงๆ แล้วก็ไม่น่าแปลกใจ เพราะว่าที่มาของ ψ ได้มาจากกฎการของมวล ทำให้เราอาจใช้สมการ (2.83) แทนสมการการไหลต่อเนื่องได้

ถ้าพร้อมกับการไหลไร้การอัดตัวการไหลเป็นแบบไร้การหมุนด้วย จากหัวข้อ 2.7.2 สำหรับเงื่อนไขของการไร้การหมุนบนระนาบ xy จะได้

$$\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = 0$$

เมื่อแทนเงื่อนไขนี้โดยใช้ u และ v จากสมการ (2.83) จะได้

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(-\frac{\partial \psi}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} \right) = 0$$

หรือ
$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = 0 \quad (3.41)$$

ซึ่งคือสมการลาปลาซเช่นเดียวกัน ดังนั้นฟังก์ชันกระแสของการไหลไร้การอัดตัวไร้การหมุนจะสอดคล้องกับเงื่อนไขตามสมการลาปลาซเช่นเดียวกับ ϕ

จากสมการ (3.36) และ สมการ (3.41) จะเห็นข้อสรุปสำคัญ 2 ข้อ คือ

1. การไหลไร้การอัดตัวไร้การหมุนใดๆ จะมีศักย์ความเร็ว ϕ และถ้าการไหลเป็นสองมิติจะมีฟังก์ชันกระแส ψ ที่ต่างก็สอดคล้องกับสมการลาปลาซเสมอ

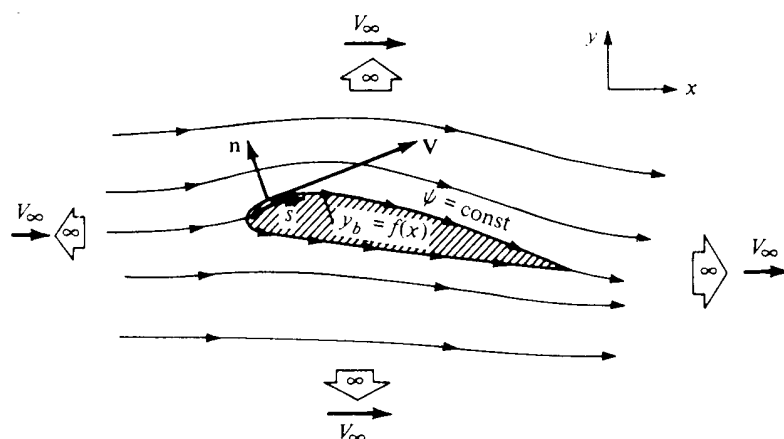
2. ในทางกลับกันคำตอบใดๆ ของสมการลาปลาซจะเป็นฟังก์ชันที่แทนศักย์ความเร็ว หรือฟังก์ชันกระแส (สำหรับการไหลสองมิติ) สำหรับการไหลไร้การหมุนไร้การอัดตัวสมภาวะคงตัวได้

สังเกตว่าสมการลาปลาซเป็นสมการอนุพันธ์หลายตัวแปรเชิงเส้นลำดับที่สอง (Second-order linear partial differential equation) ซึ่งทำให้มันมีคุณสมบัติสำคัญอันหนึ่ง คือ เราอาจรวมคำตอบหลายๆ คำตอบของสมการเข้าด้วยกันได้ ผลลัพธ์ที่ได้จะเป็นคำตอบของสมการด้วยเช่นกัน ตัวอย่างเช่น ถ้า $\phi_1, \phi_2, \phi_3, \dots, \phi_n$ แทนคำตอบ n คำตอบของสมการ (3.37) ผลรวม

$$\phi = \phi_1 + \phi_2 + \phi_3 + \phi_4 + \dots + \phi_n$$

จะเป็นคำตอบของสมการ (3.36) ด้วยโดยอัตโนมัติ ดังนั้นการที่การไหลไร้การอัดตัวไร้การหมุน ถูกกำกับด้วยสมการลาปลาซซึ่งเป็นสมการเชิงเส้นทำให้พอจะสรุปได้ว่า รูปแบบของการไหลที่ซับซ้อนผ่านวัตถุรูปทรงใดๆ แบบไร้การหมุนไร้การอัดตัวอาจสังเคราะห์ขึ้นได้โดยรวมเอารูปแบบการไหลพื้นๆ ของการไหลไร้การหมุนไร้การอัดตัวเข้าด้วยกันหลายๆ การไหล อันที่จริงแล้วเรากำลังจะสร้างแนวทางหรืออาจเรียกว่ายุทธศาสตร์หลักสำหรับการพิจารณา การไหลไร้ความหนืดไร้การอัดตัว (Inviscid incompressible flow) ขึ้น โดยจะพัฒนารูปแบบการไหลพื้นๆ ขึ้นจำนวนหนึ่ง ซึ่งโดยตัวของมันเองไม่น่าจะมีอยู่จริงในธรรมชาติ อย่างไรก็ตามเราจะทำการรวม (เรียกทาง คณิตศาสตร์ว่า “ทับซ้อน”, Superimpose) รูปแบบการไหลพื้นๆ นี้เข้าด้วยกันในแบบต่าง ๆ จนกระทั่งผลลัพธ์ที่ได้จะแสดงสนามการไหลที่สมจริงกับปัญหาในทางปฏิบัติ

ก่อนจะศึกษาต่อไปขอให้พิจารณาการไหลไร้การหมุนไร้การอัดตัวผ่านรูปทรงอากาศพลศาสตร์ที่ต่างกัน เช่น ทรงกลม กรวย หรือ ปีกเครื่องบิน เห็นได้ชัดว่าการไหลผ่านรูปทรงเหล่านี้ย่อมแตกต่างกัน เราทราบด้วยสามัญสำนึกอยู่แล้วว่า เส้นกระแส และความดันที่แจกแจงรอบๆ ทรงกลม ย่อมต่างจากที่แจกแจงอยู่รอบปีกเครื่องบิน แต่ว่าเส้นกระแสและความดันที่แตกต่างกันทั้งสองนี้กลับถูกกำกับด้วยสมการเดียวกัน คือ $\nabla^2 \phi = 0$ อย่างนี้แล้วเราจะมองหาความแตกต่างกันนี้ได้จากอะไร คำตอบของเราอยู่ที่สิ่งที่เรียกว่าเงื่อนไขที่ขอบเขต (Boundary conditions) ถึงแม้สมการที่กำกับกับการไหลจะเป็นตัวเดียวกันแต่เงื่อนไขที่ขอบจะต้องสอดคล้องกับรูปร่างที่แตกต่างกัน และดังนั้นจะนำไปสู่คำตอบที่แสดงสนามการไหลที่ต่างกัน เงื่อนไขที่ขอบ จึงเป็นสิ่งที่ต้องคำนึงถึงเสมอร่วมกับสมการในการวิเคราะห์ทางอากาศพลศาสตร์ รูป 3.7 แสดงตัวอย่างการไหลผ่านรูปแพนอากาศของการไหลสม่ำเสมอ (การไหลเอกรูป) ขอบเขตของการไหลจะล้อมรอบด้วย (1) การไหลของกระแสอิสระซึ่ง (ในทางทฤษฎี) เกิดขึ้นที่ระยะอนันต์ (Infinity) ห่างจากวัตถุออกไปทั้งสี่ทิศ และ (2) ผิวของวัตถุ ดังนั้นเงื่อนไขที่ขอบเขต 2 ชุด จะถูกนำมาใช้ดังต่อไปนี้



รูป 3.7 เงื่อนไขที่ขอบ ที่ระยะอนันต์ และที่ผิวของวัตถุ ในการไหลไร้ความหนืด (Anderson, 2016)

3.7.1 เงื่อนไขที่ระยะอนันต์ (Infinity Boundary condition)

ไกลออกไปจากวัตถุ (ไปสู่ระยะอนันต์ infinity, ∞) ในทุกทิศทาง การไหลจะมีความเร็วเข้าสู่ความเร็วของกระแสอิสระ ให้ V_∞ เป็นความเร็วกระแสอิสระและขนานกับแกน x ตามที่แสดงในรูป 3.7 ดังนั้นที่ ∞

$$u = \frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y} = V_\infty \quad (3.42)$$

$$v = \frac{\partial \phi}{\partial y} = -\frac{\partial \psi}{\partial x} = 0 \quad (3.43)$$

สมการ (3.42) และ (3.43) เป็นเงื่อนไขของความเร็วที่ ∞ ซึ่งใช้กับการไหลที่ห่างไกลจากวัตถุออกไป ทั้งทางซ้าย ทางขวา หรือข้างล่าง ข้างบน ตามที่แสดงในภาพ

3.7.2 เงื่อนไขที่ผนัง (Wall Boundary Conditions)

สำหรับผิววัตถุที่ไม่มีรูพรุน (ผิวทึบ, Solid surface) จะไม่มีกระแสไหลผ่านผิววัตถุ เพราะฉะนั้น ถ้าการไหลมีความหนืดเข้ามาเกี่ยวข้อง ผลของแรงเสียดทานระหว่างของไหลกับผิววัตถุ จะทำให้ความเร็วกระแสที่ผิวมีค่าเป็นศูนย์เสมอ เรียกเงื่อนไขนี้ว่า “เงื่อนไขของการไม่ลื่นไถล” (No slip condition) ซึ่งจะเป็นเงื่อนไขที่คำนึงถึงแรงเสียดทาน ในทางตรงข้ามสำหรับการไหลที่ไร้ความหนืด ความเร็วที่ผิวจะเท่ากับความเร็วที่ของไหลลื่นไถลไปตามผิววัตถุ (เพราะไม่มีแรงเสียดทาน) นั่นคือความเร็วจะอยู่ในทิศทางสัมผัสกับผิวทุกจุดรอบวัตถุ เงื่อนไขการสัมผัสผิวของความเร็วแสดงในรูป 3.7 เมื่อ $\vec{V}$ อยู่ในแนวสัมผัสกับผิว ดังนั้นส่วนของความเร็วในทิศทางตั้งฉากกับผิวจะเป็นศูนย์ ให้ $\hat{n}$ เป็นหน่วยเวกเตอร์ (Unit vector) ตั้งฉากกับผิววัตถุตามที่แสดงในรูป เขียนเงื่อนไขที่ผนังได้ว่า

$$\vec{V} \cdot \hat{n} = (\nabla \phi \cdot \hat{n}) = 0 \quad (3.44)$$

หรือ

$$\frac{\partial \phi}{\partial n} = 0 \quad (3.45)$$

สมการ (3.44) และ (3.45) ให้เงื่อนไขที่ขอบเขตของความเร็วที่ผนังที่แสดงในเทอมของ ϕ สำหรับ ψ เงื่อนไขที่ผนังจะเป็น

$$\frac{\partial \psi}{\partial s} = 0 \quad (3.46a)$$

เมื่อ s คือระยะทางที่วัดไปตามผิววัตถุ ซึ่งแสดงในรูป 3.7 สังเกตว่าเส้นรอบรูปของวัตถุจะเป็นเส้นกระแสเส้นหนึ่งของการไหล เพราะ $\psi = \text{cont.}$ คือสมการของเส้นกระแส ดังนั้นถ้ารูปทรงของวัตถุในรูป 3.7 กำหนดโดย $y_b = f(x)$ แล้ว

$$\psi_{\text{surface}} = \psi_{y=y_b} = \text{cont.} \quad (3.46b)$$

เป็นสมการแสดงเงื่อนไขอีกรูปหนึ่งของสมการ (3.46a)

สำหรับเงื่อนไขที่ผนังในรูปของส่วนย่อยของความเร็ว u และ v พิจารณาได้จากสมการของเส้นกระแสเส้นที่เป็นผิวของวัตถุ

$$\frac{dy_b}{dx} = \left(\frac{v}{u} \right)_{\text{surface}} \quad (3.47)$$

3.8 การไหลเอกรูป (Uniform Flow) : การไหลพื้นฐานอันแรก

เราเริ่มต้นพิจารณารูปแบบการไหลพื้นฐาน ซึ่งจะนำไปทับซ้อนกันเพื่อสร้างรูปแบบการไหลที่ซับซ้อนกว่าในช่วงต่อไป โดยเริ่มจากการไหลที่เป็น 2 มิติ ไม่มีการอัดตัวของการไหลเอกรูป หรือ ยูนิฟอร์ม (Uniform Flow) ที่มีความเร็ว V_∞ ในทิศทาง x ตามที่แสดงในรูป 3.8 สนามความเร็วจะเป็น $\vec{V} = u\hat{i} + v\hat{j} = V_\infty\hat{i}$ ในพิกัดคาร์ทีเซียนจะเห็นว่าการไหลเอกรูปจะสอดคล้องกับเงื่อนไขของการไหลไร้การอัดตัว ($\vec{\nabla} \cdot \vec{V} = 0$) และไร้การหมุน ($\vec{\nabla} \times \vec{V} = 0$) ดังนั้นศักย์ความเร็ว (Velocity potential) ϕ ของการไหลเอกรูป ตามสมการ $\vec{\nabla}\phi = \vec{V}$ จะเป็น

$$\frac{\partial\phi}{\partial x} = u = V_\infty \quad (3.48a)$$

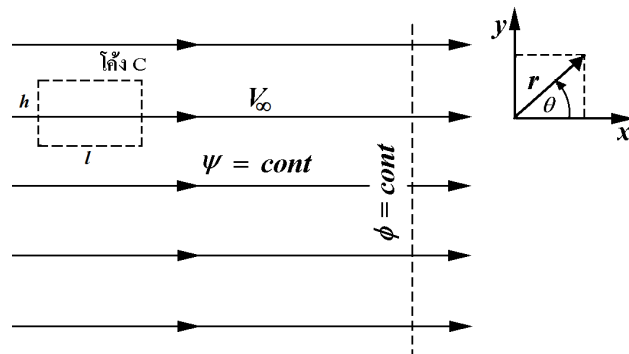
และ
$$-\frac{\partial\phi}{\partial y} = v = 0 \quad (3.48b)$$

อินทิเกรตสมการ (3.48a) เทียบต่อ x จะได้

$$\phi = V_\infty x + f(y) \quad (3.49a)$$

เมื่อ $f(y)$ เป็นฟังก์ชันของ y เท่านั้น อินทิเกรตสมการ (3.48b) เทียบต่อ y จะได้

$$\phi = \text{cont.} + g(x) \quad (3.49b)$$



รูป 3.8 การไหลเอกรูป (Uniform Flow) (Anderson, 2016)

เมื่อ $g(x)$ เป็นฟังก์ชันของ x เท่านั้น ในสมการ (3.49a) และ (3.49b) ϕ เป็นฟังก์ชันตัวเดียวกัน ดังนั้นจากการเปรียบเทียบ จะเห็นว่า $g(x) = V_\infty x$ และ $f(y) = \text{cont.}$ นั่นคือ

$$\phi = V_\infty x + \text{cont.} \quad (3.50)$$

ในทางปฏิบัติเราไม่ได้สนใจค่าจริงของ ϕ แต่ความสำคัญอยู่ที่การหาความเร็วจากการหาอนุพันธ์ของ ϕ หรือจาก $\vec{\nabla}\phi = \vec{V}$ เพราะอนุพันธ์ของค่าคงที่เป็นศูนย์ เราจึงสามารถทิ้งค่าคงที่ในสมการ (3.50) ได้โดยไม่เสียความสมบูรณ์ หรือ

$$\phi = V_\infty x \quad (3.51)$$

สมการ (3.51) เป็นศัณยความเร็วของการไหลเอกรูปความเร็ว V_∞ ขนานกับแกน x สังเกตว่าการได้มาของสมการไม่ได้กำหนดว่าการไหลต้องไร้การอัดตัวหรือไม่ ดังนั้นจึงใช้ได้กับการไหลเอกรูปที่เป็นทั้งแบบอัดตัวและไม่อัดตัว

ถ้าพิจารณาฟังก์ชันกระแส ψ จากรูป 3.8 และจากสมการ (2.83)

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} = u = V_\infty \quad (3.52a)$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = -v = 0 \quad (3.52b)$$

อินทิเกรตสมการ (3.52a) เทียบต่อ y และ อินทิเกรตสมการ (3.52b) เทียบต่อ x จะได้

$$\psi = V_\infty y + \text{cont.} \quad (3.53)$$

เป็นฟังก์ชันกระแสของการไหลเอกรูปความเร็ว V_∞ ขนานกับแกน x

จากหัวข้อ 2.15 สมการของเส้นกระแสคือสมการ $\psi = \text{cont.}$ ดังนั้นจากสมการ(3.53) เส้นกระแสของการไหลเอกรูป คือ $\psi = V_\infty y = \text{cont.}$ แต่ V_∞ มีค่าคงที่ ดังนั้นสมการเส้นกระแสจะเป็น $y = \text{cont.}$ ซึ่งก็คือเส้นตรงขนานกับแกน x ที่ระยะ y ต่างๆ ผลลัพธ์นี้สอดคล้องกับรูป 3.8 ซึ่งเส้นกระแสเป็นเส้นตรงในแนวระดับ และสังเกตเช่นกันว่าจากสมการ (3.51) เส้นศักย์เสมอ (Equipotential) $\phi = \text{cont.}$ จะเป็นเส้นตรงขนานกับแกน y ซึ่งแสดงเป็นเส้นประในรูป เส้นกระแสและเส้นศักย์เสมอ จะอยู่ในแนวตั้งฉากกัน ซึ่งเป็นสิ่งที่เคยกล่าวแล้วในหัวข้อ 2.1

ถ้าพิจารณาในพิกัดเชิงมุม (r, θ) $x = r \cos \theta$ และ $y = r \sin \theta$ จะพบว่า ϕ และ ψ จะมีค่า

$$\phi = V_\infty r \cos \theta \quad (3.54)$$

และ
$$\psi = V_\infty r \sin \theta \quad (3.55)$$

พิจารณาค่าการหมุนวน (Circulation) รอบโค้งปิดใดๆ ในการไหลเอกรูป จากนิยามของการหมุนวน

$$\Gamma = \oint_C \vec{V} \cdot d\vec{s} \quad (2.73)$$

ให้โค้งปิด C ในสมการเป็นเส้นรอบรูปสี่เหลี่ยมกว้าง h ยาว l ตามที่แสดงในรูป 3.8 ดังนั้นรอบรูปสี่เหลี่ยม

$$\oint_C \vec{V} \cdot d\vec{s} = -V_\infty l - (0)(h) + V_\infty l + (0)(h) = 0$$

หรือ
$$\Gamma = 0 \quad (3.56)$$

ค่าการหมุนวนเท่ากับศูนย์รอบโค้งปิดใดๆ ในการไหลเอกรูปจะเป็นจริงเสมอโดยโค้งปิดไม่จำเป็นต้องเป็นรูปสี่เหลี่ยมตามที่แสดงเป็นตัวอย่าง ข้อความนี้สามารถพิสูจน์ได้ง่ายๆ จากการที่ $\vec{V} = \text{cont.}$ สำหรับการไหลเอกรูป ดังนั้น

$$\Gamma = \oint_C \vec{V} \cdot d\vec{s} = \vec{V}_\infty \oint_C d\vec{s} = \vec{V}_\infty(0) = 0$$

เพราะ $\oint_C d\vec{s}$ ของโค้งปิดใดๆ จะเท่ากับศูนย์เสมอ ดังนั้นจากสมการ (3.57) อาจกล่าวได้ว่า “ค่าการหมุนวนรอบโค้งปิดใดๆ ในการไหลเอกรูปจะมีค่าเป็นศูนย์” และจะสอดคล้องกับสมการ (2.74) ที่กำหนดว่า

$$\Gamma = \iint_S (\vec{\nabla} \times \vec{V}) \cdot d\vec{S} \quad (2.74)$$

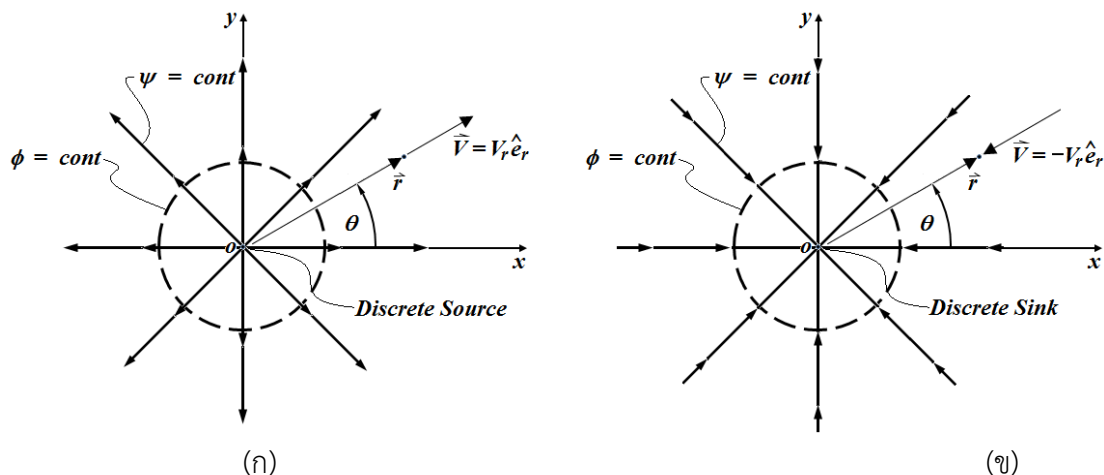
เนื่องจากในการไหลเอกรูป $\vec{\nabla} \times \vec{V} = 0$ ทุกจุด ดังนั้น Γ จึงเท่ากับศูนย์ สังเกตด้วยว่าค่า ϕ และ ψ ใน (3.50) และ (3.53) สอดคล้องกับสมการลาปลาซ

3.9 การไหลจากแหล่งกำเนิด (Source Flow) : การไหลพื้นฐานอันดับที่ 2

พิจารณาการไหล 2 มิติ ไร้การอัดตัวที่มีเส้นกระแสเป็นเส้นตรงพุ่งออกจากจุดศูนย์กลาง O ดังแสดงในรูป 3.9 ก ให้ความเร็วบนเส้นกระแสแปรผกผันกับระยะทางจาก O เราเรียกการไหลนี้ว่า “การไหลจากแหล่งกำเนิด” หรือ การไหลซอร์ส (Source flow) จากรูปจะเห็นว่าในพิกัดเชิงมุม (r, θ) ส่วนของความเร็วตามแนวรัศมีจากจุด O V_r และตามแนวสัมผัส V_θ จะเป็น

$$V_r = \frac{C}{r} \quad \text{และ} \quad V_\theta = 0 \quad (3.57)$$

ใช้ความสัมพันธ์ตามสมการ (2.22) กับสมการ (2.25) จะพบว่า $\vec{\nabla} \cdot \vec{V}$ และ $\vec{\nabla} \times \vec{V}$ มีค่าเป็นศูนย์ที่ทุกจุดยกเว้นที่จุดกำเนิด O ซึ่งค่า $\vec{\nabla} \cdot \vec{V} = \infty$ นั่นคือการไหลจากแหล่งกำเนิดมีลักษณะเป็น การไหลไร้การอัดตัวยกเว้นที่จุดกำเนิด และมีลักษณะไร้การหมุนทุกจุด



รูป 3.9 การไหลจากแหล่งกำเนิดและคีนแหล่งกำเนิด (Source & Sink flow)

สำหรับการไหลจากแหล่งกำเนิดทิศทางการไหลจะพุ่งออกจากแหล่งกำเนิด กรณีตรงข้ามกันคือ เมื่อทิศทางการไหลพุ่งเข้าสู่แหล่งกำเนิด เรียกการไหลแบบนี้ว่า “การไหลคีนแหล่งกำเนิด” หรือการไหลซิงค์ (Sink flow) ดังแสดงในรูป 3.9 ข อันที่จริงแล้วการไหลคีนแหล่งกำเนิดก็คือการไหลจาก

แหล่งกำเนิดที่มีกำลังเป็นลบนั่นเอง เราอาจมองแหล่งกำเนิดทั้งที่เป็นซอร์สและซิงค์ในอีกแบบหนึ่ง โดยพิจารณาตำแหน่งจุดกำเนิด O เป็นซอร์สเดี่ยวหรือซิงค์เดี่ยว (Discrete source, sink) ซึ่งเหนี่ยวนำให้บริเวณโดยรอบเกิดการไหลในแนวรัศมีในลักษณะเดียวกับกระแสไฟฟ้าที่ไหลในเส้นลวดเหนี่ยวนำให้เกิดสนามแม่เหล็กในบริเวณรอบตัวลวด คงจำได้ว่าการไหลซอร์ส $\vec{\nabla} \cdot \vec{V}$ จะเป็นศูนย์ทุกจุดยกเว้นที่จุดกำเนิด ซึ่ง $\vec{\nabla} \cdot \vec{V}$ มีค่าเป็น ∞ เหตุนี้จุดกำเนิดจึงเป็นตำแหน่งที่ทางคณิตศาสตร์เรียกว่า “จุดเอกเทศหรือจุดซิงกูลาร์” (Singular point) และเราอาจแทนจุดเอกเทศเหล่านี้ด้วยซอร์สหรือซิงค์เดี่ยวที่มีกำลังที่กำหนดและเหนี่ยวนำให้เกิดการไหลควบคู่ไปกับซอร์ส หรือซิงค์นั้น การตีความในลักษณะนี้จะเป็นประโยชน์มากในหัวข้อต่อไป

ในสมการ (3.57) ค่าคงที่ C ในสมการของความเร็ว V_r จะสัมพันธ์กับอัตราการไหลที่ออกมาจากซอร์ส(หรือไหลคืบสู่ ซิงค์) พิจารณาต่อความลึก l หน่วยลงไปบนหน้ากระดาษที่แสดงในรูป 3.10 ความยาว l หน่วยจะอยู่ในแนวแกน z ของพิกัดทรงกระบอก ในรูปแสดงลักษณะ 3 มิติของการไหลซอร์สที่เราจะมองเห็นทุกๆ หน้าตัดตั้งฉากกับแกน z มีลักษณะเหมือนกันทุกประการ และจุด O ซึ่งเป็นซอร์ส หรือ ซิงค์ เป็นเพียงจุดๆ หนึ่งบนเส้นที่มีซอร์สเรียงอยู่เต็มเรียกว่า “เส้นซอร์ส” (line source) ถ้าเรานึกภาพการไหลที่พุ่งออกมาจากเส้นซอร์สข้ามพื้นที่ผิวของทรงกระบอกรัศมี r และความสูง l หน่วย ปริมาณมวลที่ไหลผ่านพื้นที่ผิวทรงกระบอกคำนวณได้จาก ความเร็วคูณพื้นที่หน้าตัดการไหล เนื่องจากที่รัศมี r ความเร็ว V_r มีค่าคงที่โดยรอบ เพราะฉะนั้น

$$\dot{m} = 2\pi r l \rho V_r$$

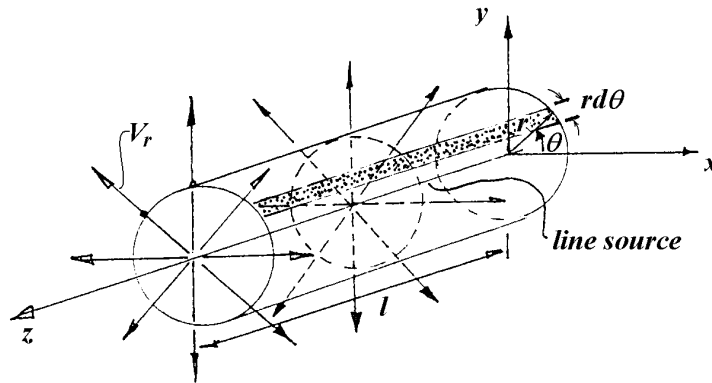
หรือ ถ้าคิดเป็นอัตราการไหลของปริมาตร ต่อความยาว l หน่วย

$$Q = \frac{\dot{m}}{\rho l} = 2\pi r V_r$$

หรือ

$$V_r = \frac{Q}{2\pi r} \quad (3.58)$$

เทียบกับสมการ (3.57) จะเห็นว่าค่าคงที่ $C = \frac{Q}{2\pi}$ เรานิยาม Q อัตราการไหลของปริมาตรออกจากซอร์สว่าเป็น “ความแรงของซอร์ส หรือ กำลังของซอร์ส” (Source strength) จะเห็นว่าหน่วยของ Q เป็น m^2/s ค่า Q ที่เป็นบวกจะเป็นกำลังของซอร์ส ส่วนค่า Q ที่เป็นลบ จะเป็นกำลังของซิงค์



รูป 3.10 ปริมาตรที่ไหลจากเส้นซอร์ส (Anderson, 2016)

จากความเร็ว V_r ในสมการ (3.58) เราอาจหาค่าศักย์ความเร็วของการไหลซอร์สกำลัง Q ได้จาก (2.87)

$$\frac{\partial \phi}{\partial r} = V_r = \frac{Q}{2\pi r} \quad (3.59a)$$

และ

$$\frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} = V_\theta = 0 \quad (3.59b)$$

อินทิเกรตสมการ (3.59a) เทียบต่อ r ได้

$$\phi = \frac{Q}{2\pi} \ln(r) + f_1(\theta) \quad (3.60a)$$

อินทิเกรตสมการ (3.59b) เทียบต่อ θ ได้

$$\phi = \text{cont.} + f_2(r) \quad (3.60b)$$

เมื่อเทียบสมการ (3.60a) กับ (3.60b) จะเห็นว่า $f_1(\theta) = \text{cont}$ และ $f_2(r) = \frac{Q}{2\pi} \ln(r)$ เช่นที่เคยกล่าวไว้แล้วในหัวข้อ 3.8 ว่าค่าคงที่อาจละทิ้งไปได้เพราะไม่มีความสำคัญในการพิจารณาปัญหาดังนั้นอาจเขียนได้ว่า

$$\phi = \frac{Q}{2\pi} \ln(r) \quad (3.61)$$

สมการ (3.61) คือ ศักย์ความเร็วของการไหลซอร์ส 2 มิติ

ทำนองเดียวกันสำหรับฟังก์ชันกระแส ψ ของการไหลซอร์ส

$$\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} = V_r = \frac{Q}{2\pi r} \quad (3.62a)$$

และ

$$-\frac{\partial \psi}{\partial r} = V_\theta = 0 \quad (3.62b)$$

อินทิเกรตสมการ (3.62a) เทียบต่อ θ และอินทิเกรตสมการ (3.62b) เทียบต่อ r จะได้

$$\psi = \frac{Q}{2\pi} \theta + f_1(r) \quad (3.63a)$$

$$\psi = \text{cont.} + f_2(\theta) \quad (3.63b)$$

เมื่อเทียบสมการ (3.63a) กับ (3.63b) จะเห็นว่า $f_1(r) = \text{cont.}$; $f_2(\theta) = \frac{Q}{2\pi}\theta$ ตัดค่าคงที่ทิ้งตามเหตุผลที่กล่าวมาแล้ว จะได้

$$\psi = \frac{Q}{2\pi}\theta \quad (3.64)$$

สมการ (3.64) เป็นฟังก์ชันกระแสน้ำของการไหลซอร์ส คงจำได้ว่าสมการเส้นกระแสได้จากการจัดให้ $\psi = \text{cont.}$ ในกรณีการไหลซอร์ส จัดให้สมการ (3.64) เท่ากับค่าคงที่

$$\psi = \frac{Q}{2\pi}\theta = \text{cont.}$$

จะเห็นว่าสมการเส้นกระแสของการไหลซอร์ส คือ $\theta = \text{cont.}$ ในพิกัดเชิงขั้ว (r, θ) คือสมการของเส้นรัศมีที่ทำมุม θ ต่างๆ นั่นเอง ซึ่งสอดคล้องกับภาพการไหลในรูป 3.9 นอกจากนี้สมการ (3.61) จะให้เส้นศักย์เสมอเป็น $r = \text{cont.}$ หรือเส้นรอบวงของวงกลมรัศมี r ซึ่งสรุปได้อีกครั้งหนึ่งว่าเส้นกระแสจะตั้งฉากกับเส้นศักย์เสมอ

ในสมการ (3.61) กับ (3.64) ϕ และ ψ อยู่ในพิกัดเชิงขั้ว (r, θ) แต่เราสามารถแสดง ϕ และ ψ ในพิกัดคาร์ทีเซียน (x, y) ได้โดยใช้ความสัมพันธ์

$$r^2 = x^2 + y^2$$

$$\theta = \tan^{-1} \tan^{-1} \frac{y}{x}$$

ดังนั้นในพิกัดคาร์ทีเซียน

$$\phi = \frac{Q}{2\pi} \ln(x^2 + y^2) \quad (3.65)$$

$$\psi = \frac{Q}{2\pi} \tan^{-1} \left(\frac{y}{x} \right) \quad (3.66)$$

สุดท้ายถ้าเราประเมินค่าการหมุนวนรอบโค้งปิดใดๆ ในการไหลซอร์ส เนื่องจาก $\vec{\nabla} \times \vec{V} = 0$ ทุกจุด ดังนั้นจาก

$$\Gamma = \iint_S (\vec{\nabla} \times \vec{V}) \cdot d\vec{S} \quad (2.74)$$

การหมุนวนรอบโค้งปิดล้อมรอบบริเวณใดๆ ของการไหลซอร์ส จะมีค่าเป็นศูนย์เสมอ

ถ้าเราแทน ϕ และ ψ ของการไหลซอร์ส ในสมการลาปลาซ $\nabla^2 \phi$ และ $\nabla^2 \psi$ จะเห็นว่าทั้ง ϕ และ ψ สอดคล้องกับสมการลาปลาซ ซึ่งหมายความว่า การไหลซอร์ส (และซิงค์) เป็น “การไหลไร้การหมุนไร้การอัดตัว” และสามารถใช้ในการไหลพื้นฐานรวมกับการไหลเอกรูปเพื่อสร้างรูปแบบการไหลที่ซับซ้อนกว่าได้

3.10 การรวมการไหลเอกรูป กับ การไหลจากแหล่งกำเนิด

พิจารณาการไหลในพิกัดเชิงขั้ว (r, θ) ที่เกิดจากการไหลเอกรูปความเร็ว V_∞ เคลื่อนที่จากซ้ายไปขวาผ่านซอร์สความแรง Q ที่อยู่ที่ตำแหน่งจุดกำเนิดตามแสดงในรูป 3.11 ฟังก์ชันกระแสน้ำของการไหล

ที่เกิดจากการทับซ้อนกัน (Superimposed) ของการไหลทั้งสองได้จากผลรวมของสมการ (3.55) กับสมการ (3.64)

$$\psi = V_{\infty} r \sin \theta + \frac{Q}{2\pi} \theta \quad (3.67)$$

เพราะว่าทั้งการไหลเอกรูปและการไหลซอร์ส เป็นการไหลไร้การอัดตัวไร้การหมุน ดังนั้นฟังก์ชันกระแสในสมการ (3.67) จะเป็นฟังก์ชันกระแสของการไหลไร้การอัดตัวไร้การหมุนด้วย หรือฟังก์ชัน ψ ในสมการ (3.67) จะสอดคล้องกับสมการลาปลาซเส้นกระแสของการไหลตามสมการ (3.67) แสดงในรูป 3.11

สมการของเส้นกระแสได้จากการจัดให้สมการ (3.67) เท่ากับค่าคงที่

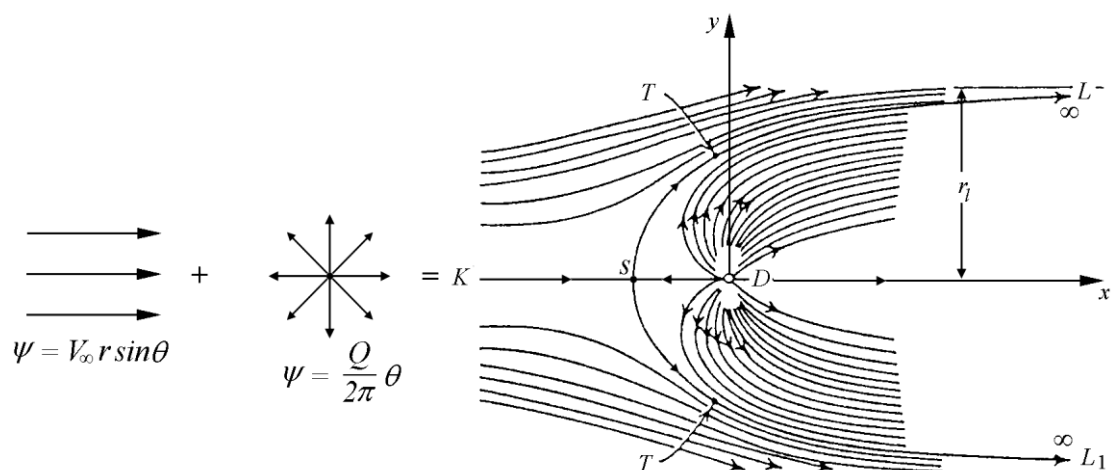
$$\psi = V_{\infty} r \sin \theta + \frac{Q}{2\pi} \theta = \text{cont.} \quad (3.68)$$

ในรูป 3.11 ตำแหน่งของซอร์สอยู่ที่ตำแหน่ง D ซึ่งเป็นจุดกำเนิดของแกนพิกัด ความเร็วของการไหลจะได้รับการหาอนุพันธ์ตามสมการ (2.84)

$$V_r = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} = V_{\infty} \cos \theta + \frac{Q}{2\pi r} \quad (3.69)$$

และ
$$V_{\theta} = -\frac{\partial \psi}{\partial r} = -V_{\infty} \sin \theta \quad (3.70)$$

ขอให้สังเกตว่าจากหัวข้อ 3.8 $V_{\infty} \cos \theta$ คือส่วนของความเร็ว V_{∞} ในแนวรัศมี (r) ของการไหลเอกรูป และจากหัวข้อ 3.9 $\frac{Q}{2\pi r}$ คือความเร็วในแนวรัศมีของการไหลซอร์ส เพราะฉะนั้นไม่ใช่เพียงค่าของฟังก์ชันกระแสเท่านั้นที่จะได้จากการรวมกันของการไหลย่อยทั้งสอง แต่ความเร็วก็จะได้จากการรวมความเร็วของการไหลย่อยทั้งสองเข้าด้วยกันโดยตรงด้วย



รูป 3.11 การรวมการไหลเอกรูป กับ การไหลซอร์ส การไหลผ่านวัตถุกึ่งอนันต์ (Anderson, 2016)

ตามที่กล่าวแล้วว่าจุดชะงัก (Stagnation point) คือจุดที่ความเร็วการไหลลดลงเป็นศูนย์ ดังนั้นเราอาจหาตำแหน่งของจุดชะงักได้โดยจัดให้สมการ (3.69) และ (3.70) เท่ากับศูนย์ นั่นคือ

$$V_{\infty} \cos \theta + \frac{Q}{2\pi r} = 0 \quad (3.71)$$

และ
$$V_{\infty} \sin \theta = 0 \quad (3.72)$$

จากสมการ (3.71) และ (3.72) จุดชะงักจะอยู่ที่ตำแหน่ง $(r, \theta) = \left(\frac{Q}{2\pi V_{\infty}}, \pi \right)$ แสดงด้วยจุด S ในรูป 3.11 หรือจุดชะงักจะอยู่ที่ระยะ $\frac{Q}{2\pi V_{\infty}}$ ทางซ้ายของตำแหน่งจุดซอร์ส จากผลลัพธ์นี้จะเห็นว่าระยะห่าง DS ระหว่างซอร์สกับจุดชะงักจะลดลงถ้าความเร็ว V_{∞} เพิ่มขึ้น และจะเพิ่มขึ้น ถ้ากำลัง Q ของซอร์สเพิ่มขึ้น ยกตัวอย่างเช่น เมื่อมองดูจากรูป 3.11 คงจะคาดได้ว่า ถ้ากำลังของซอร์สแรงขึ้นจุด S คงถูกดันขึ้นไปเหนือลมตามแกน x มากขึ้น แต่ถ้าความเร็วลม V_{∞} เพิ่มขึ้นจุด S จะถูกดันกลับไปหาซอร์สตามแกน x มากขึ้น

แทนตำแหน่งของจุดชะงัก $\left(\frac{Q}{2\pi V_{\infty}}, \pi \right)$ ลงในสมการ(3.68) จะได้

$$\psi = V_{\infty} \frac{Q}{2\pi V_{\infty}} \sin \pi + \frac{Q}{2\pi} \pi$$

$$\psi = \frac{Q}{2}$$

นั่นคือเส้นกระแสที่ผ่านจุดชะงักคือเส้นที่มีสมการ

$$V_{\infty} r \sin \theta + \frac{Q}{2\pi} \theta = \frac{Q}{2}$$

ซึ่งเป็นเส้น LSL_1 ในรูป 3.11

พิจารณารูป 3.11 ให้ละเอียดจะพบสาเหตุที่ทำให้เราสนใจเส้นกระแสของการไหลที่เกิดขึ้นเพราะการพิจารณาการไหลเป็นการไหลไร้ความหนืดจึงทำให้ความเร็วของกระแสที่ผิววัตถุที่มันไหลผ่านลื่นไหลไปตามผิว (ซึ่งต่างจากการพิจารณาการไหลที่เป็นการไหลหนืด) ทำให้ผิววัตถุเหมือนเป็นเส้นกระแสเส้นหนึ่งของการไหล ดังนั้นเส้นกระแสเส้นใดก็ตามที่เกิดขึ้นตามวิธีในรูป 3.11 จึงอาจถูกแทนที่ด้วยผิววัตถุที่มีเส้นรอบรูปที่มีรูปร่างแบบเดียวกันได้ และเส้นกระแสที่ถูกแบ่งออกแต่ละด้านของเส้นกระแสเส้นนี้จะแทนเส้นกระแสของการไหลผ่านผิววัตถุ โดยเฉพาะอย่างยิ่งเส้นกระแส LSL_1 เพราะการที่ LSL_1 ผ่านจุดชะงัก S ทำให้ LSL_1 เป็นเส้นกระแสเส้นที่แบ่งการไหลที่มาจากการไหลเอกรูป และการไหลซอร์สออกจากกัน การไหลด้านนอก LSL_1 ทั้งหมดมาจากการไหลเอกรูป และการไหลด้านใน LSL_1 ทั้งหมดเป็นการไหลที่ไหลมาจากซอร์ส ดังนั้น ถ้าสนใจกระแสอิสระเป็นหลัก บริเวณทั้งหมดด้านในเส้น LSL_1 อาจถูกแทนที่ด้วยวัตถุที่มีรูปร่างอย่างเดียวกับเส้น LSL_1 ได้(แทนที่ซอร์สด้วยวัตถุ)โดยที่ไม่ทำให้กระแสอิสระที่ไหลเข้ามาปะทะรู้สึกถึงความแตกต่าง เส้นกระแส

$\psi = \frac{Q}{2}$ (เส้น LSL_1) ต่อยาวไปจนถึง ∞ พอร์มตัวเป็นรูปวัตถุกึ่งอนันต์ (Semi-infinite body)

ดังนั้นถ้าต้องการสร้างการไหลของกระแสอิสระผ่านรูปวัตถุกึ่งอนันต์ซึ่งมีรูปร่างเหมือนโค้ง LSL_1 ใน

รูป 3.11 สิ่งที่ต้องทำก็เพียงแค่นำขอร์สความแรง Q ไปไว้ที่ตำแหน่ง D ในการไหลเอกรูปความเร็ว V_∞ ผลที่ได้จากการรวมกันจะแทนการไหลผ่านวัตถุที่มีรูปทรง LSL_1 นั่นเอง สิ่งนี้แสดงให้เห็นวิธีการสร้างรูปแบบการไหลผ่านรูปร่างที่ซับซ้อนโดยการรวมการไหลพื้นฐานง่าย ๆ เข้าด้วยกัน อย่าลืมว่าการที่ทราบฟังก์ชันกระแสที่กำหนดการไหลทำให้สามารถหาความเร็ว (และความดัน) ณ ตำแหน่งต่างๆ ได้อย่างง่ายดาย

การรวมการไหลที่แสดงในรูป 3.11 ได้ผลเป็นการไหลผ่านรูปวัตถุกึ่งอนันต์ LSL_1 ซึ่งเป็นรูปครึ่งตัวของวัตถุที่ยืดยาวไปถึง ∞ และเป็นรูปเปิด แต่ถ้าเรานำซิงค์ (Sink) ที่มีกำลังเท่ากับขอร์สไปไว้ในตำแหน่งด้านหลังของขอร์สจะพบว่าผลลัพธ์ที่ได้จะเป็นวัตถุที่มีเส้นรอบรูปปิด

พิจารณาระบบในพิกัดเชิงขั้ว (r, θ) ที่วางขอร์สและซิงค์ที่มีกำลังเท่ากันไว้ที่ระยะห่าง a จากจุดกำเนิดทางซ้ายและทางขวาตามรูป 3.12 ให้กำลังของขอร์สและซิงค์เป็น Q และ $-Q$ และวางอยู่ในการไหลเอกรูปความเร็ว V_∞ จากซ้ายมาขวาตามรูป ค่าฟังก์ชันกระแส ณ จุด P ใดๆ ในบริเวณการไหลจะได้จากสมการ (3.55) และ (3.64)

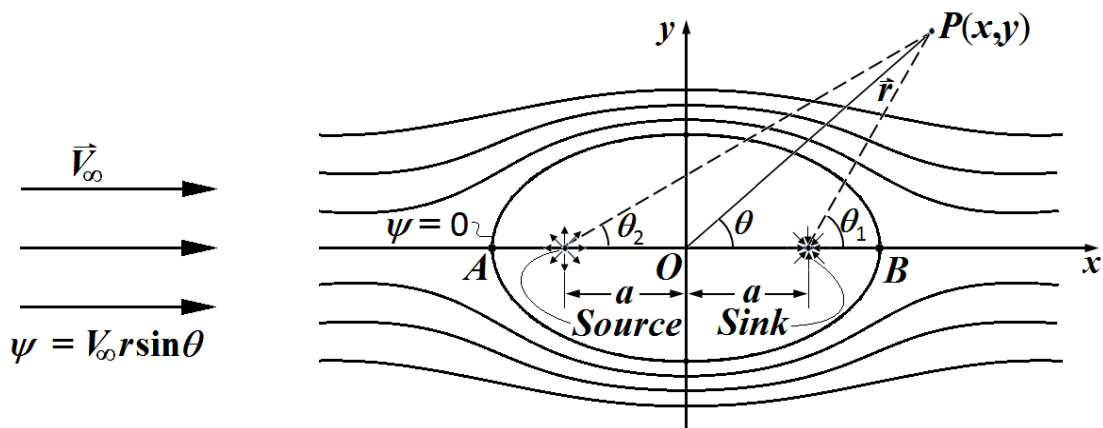
$$\psi = V_\infty r \sin \theta + \frac{Q}{2\pi} \theta_2 - \frac{Q}{2\pi} \theta_1$$

หรือ

$$\psi = V_\infty r \sin \theta + \frac{Q}{2\pi} (\theta_2 - \theta_1) \quad (3.73)$$

สังเกตว่าจาก $\theta_1 = \tan^{-1} \frac{y}{x-a}$ และ $\theta_2 = \tan^{-1} \frac{y}{x+a}$

และเพราะว่า $\tan(A - B) = \frac{\tan A - \tan B}{1 + \tan A \tan B}$



รูป 3.12 รูปทรงไข่ของแรนกิน (Rankine oval) (Anderson, 2016)

ดังนั้น

$$(\theta_2 - \theta_1) = \tan^{-1} \frac{-2ya}{x^2 + y^2 - a^2}$$

เราหาความเร็วได้จากการหาอนุพันธ์ของสมการ (3.73) จากความสัมพันธ์ตามสมการ (2.84) ซึ่งนักเรียนสามารถลองทำเองได้ โดยการแทนค่าความเร็วเท่ากับศูนย์จะพบว่าจุดชะงัก 2 จุดที่ตำแหน่ง A และ B ในรูป 3.12 ซึ่งอยู่ ณ ตำแหน่ง

$$OA = OB = \sqrt{a^2 + \frac{Q a}{\pi V_\infty}} \quad (3.74)$$

สมการของเส้นกระแสได้จากการจัดให้สมการ (3.73) เท่ากับค่าคงที่

$$\psi = V_\infty r \sin \theta + \frac{Q}{2\pi} (\theta_2 - \theta_1) = \text{const.} \quad (3.75)$$

สำหรับเส้นกระแสเส้นที่ผ่านจุดชะงักได้จากการแทนตำแหน่งของจุดชะงักลงในสมการ (3.75) โดยที่จากในภาพ $\theta = \theta_1 = \theta_2 = \pi$ ที่จุด A และ $\theta = \theta_1 = \theta_2 = 0$ ที่จุด B ดังนั้นสำหรับเส้นกระแสเส้นที่ผ่านจุดชะงักสมการ (3.75) ให้ค่าคงที่เป็นศูนย์ ($\psi = 0$) เพราะฉะนั้นสมการเส้นกระแสที่ผ่านจุดชะงักจะเป็น

$$V_\infty r \sin \theta + \frac{Q}{2\pi} (\theta_2 - \theta_1) = 0 \quad (3.76)$$

สมการ (3.76) เป็นสมการของรูปไข่ที่อยู่ในรูป 3.12 เส้นกระแสตามสมการ (3.76) เป็นเส้นกระแสที่แบ่งการไหลเป็นสองส่วน การไหลจากซอร์สทั้งหมดจะถูกดูดกลับคืนไปที่ซิงค์ และไหลวนอยู่ภายในรูปไข่ ส่วนการไหลที่อยู่ภายนอกรูปไข่ทั้งหมดมีต้นทางมาจากการไหลเอกรูป ดังนั้นบริเวณภายในรูปไข่ทั้งหมดอาจแทนได้ด้วยวัตถุที่มีรูปร่างกำหนดโดยเส้นโค้งตามสมการ (3.76) และบริเวณด้านนอกรูปไข่การไหลจะแทน “การไหลไร้ความหนืดไร้การหมุนไร้การอัดตัว” (inviscid, irrotational, incompressible flow) ผ่านรูปไข่นี้ ปัญหาได้รับการพิจารณาเป็นครั้งแรกโดยวิศวกรชาวสกอต “W.J.M. Rankine” ดังนั้นจึงเรียกรูปไข่นี้ว่ารูปไข่ของแรนกิน (Rankine oval)

3.11 การไหลจากจุดซ้อน (Doublet Flow) : การไหลพื้นฐานอันที่ 3

การจับคู่ระหว่างแหล่งกำเนิดซอร์สกับซิงค์ในแบบเฉพาะพิเศษจะเหนี่ยวนำให้เกิดลักษณะการไหลในรูปแบบพิเศษรอบจุดเอกเทศ (Singular point) ที่เรียกว่าการไหลรอบจุดซ้อน (Doublet flow) (Anderson, 2016) ซึ่งถูกใช้บ่อยครั้งในการพิจารณาการไหลไร้การอัดตัว

พิจารณาซอร์สความแรง Q และ ซิงค์ความแรง $-Q$ วางเรียงกันบนแกน x โดยมีระยะห่าง $2x_0$ ตามที่แสดงในรูป 3.13 ก ณ จุดใดๆ ในการไหล $P(x,y)$ ค่าฟังก์ชันกระแส ψ จะเป็น

$$\begin{aligned} \psi &= \frac{Q}{2\pi} (\theta_2 - \theta_1) = -\frac{Q}{2\pi} (\theta_1 - \theta_2) \\ &= -\frac{Q}{2\pi} \left(\tan^{-1} \frac{y}{x - x_0} - \tan^{-1} \frac{y}{x + x_0} \right) \end{aligned}$$

ใช้ความสัมพันธ์ตรีโกณมิติ

จะได้

$$\tan^{-1}\alpha - \tan^{-1}\beta = \tan^{-1}\left(\frac{\alpha - \beta}{1 + \alpha\beta}\right)$$

$$\psi = -\frac{Q}{2\pi} \tan^{-1}\left(\frac{\frac{y}{(x-x_0)} - \frac{y}{(x+x_0)}}{1 + \left[\frac{y^2}{(x-x_0)(x+x_0)}\right]}\right)$$

เพราะฉะนั้นจะได้ฟังก์ชันกระแสของคู่ขอร์สซิงค์ เป็น

$$\psi = -\frac{Q}{2\pi} \tan^{-1}\left(\frac{2x_0y}{x^2 + y^2 - x_0^2}\right) \quad (3.77)$$

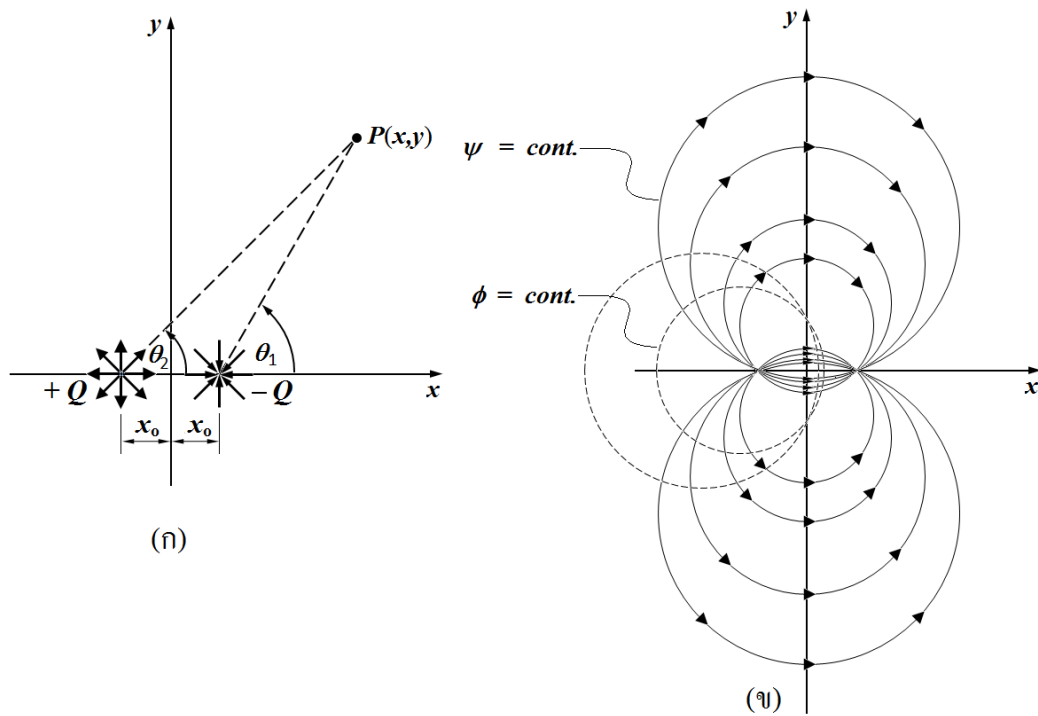
โดยการจัดให้สมการ (3.77) เท่ากับค่าคงที่จะได้สมการของเส้นกระแสเป็นเส้นรอบวงของวงกลมที่มีจุดศูนย์กลางบนแกน y ตามที่แสดงในรูป 3.13 ข

กรณีเฉพาะพิเศษเกิดขึ้นเมื่อระยะห่างระหว่างขอร์สกับซิงค์ลดลงในขีดจำกัดเข้าสู่ศูนย์ ถ้ากำลังของขอร์สและซิงค์คงที่การไหลที่ถูกเหนี่ยวนำจากขอร์สและซิงค์จะหักล้างกันหมดไป แต่ถ้าในขีดจำกัดเราคงสถานะของคู่ขอร์สซิงค์ไว้โดยเพิ่มกำลังขึ้นจนค่าผลคูณ $2x_0Q$ มีค่าคงที่ในขณะที่ระยะ x_0 มีค่าลดลง ผลที่ได้จะเป็นการไหลรอบจุดเอกเทศที่เรียกว่า “จุดซ้อน” (Doublet) ซึ่งมีกำลัง K เมื่อ

$$K = 2x_0Q$$

ฟังก์ชันกระแสของจุดซ้อนได้จากสมการ (3.77) ในขีดจำกัด $x_0 \rightarrow 0$ นั่นคือ

$$\begin{aligned} \psi &= \lim_{x_0 \rightarrow 0} \left[-\frac{Q}{2\pi} \tan^{-1} \frac{2x_0y}{x^2 + y^2 - x_0^2} \right] \\ &= \lim_{x_0 \rightarrow 0} \left[-\frac{2x_0Q}{4x_0\pi} \tan^{-1} \frac{2x_0y}{x^2 + y^2 - x_0^2} \right] \end{aligned} \quad (3.78)$$



รูป 3.13 (ก) คู่ซอร์สซิงค์ (Source-sink pair) (ข) เส้นกระแสของคู่ซอร์สซิงค์

จากรูป 3.13 ก ในขีดจำกัด $x_0 \rightarrow 0$ มุม $(\theta_1 - \theta_2) \rightarrow 0$ ดังนั้น $\tan^{-1}(\theta_1 - \theta_2) \cong (\theta_1 - \theta_2)$ สมการ (3.78) จะเปลี่ยนเป็น

หรือ
$$\psi = -\frac{\kappa}{2\pi} \cdot \frac{y}{x^2 + y^2} \quad (3.79a)$$

แทนความสัมพันธ์ $y = r \sin \theta$ และ $x^2 + y^2 = r^2$ จะได้

$$\psi = -\frac{\kappa}{2\pi} \cdot \frac{\sin \theta}{r} \quad (3.79b)$$

สมการ (3.79) คือฟังก์ชันกระแสของจุดซอร์สซิงค์ในพิกัดคาร์ทีเซียน (x, y) และพิกัดเชิงมุม (r, θ) โดยวิธีการแบบเดียวกันนี้ เราอาจหาค่าศักย์ความเร็วของจุดซอร์สซิงค์ได้เป็น

หรือ
$$\phi = \frac{\kappa}{2\pi} \cdot \frac{x}{x^2 + y^2} \quad (3.80a)$$

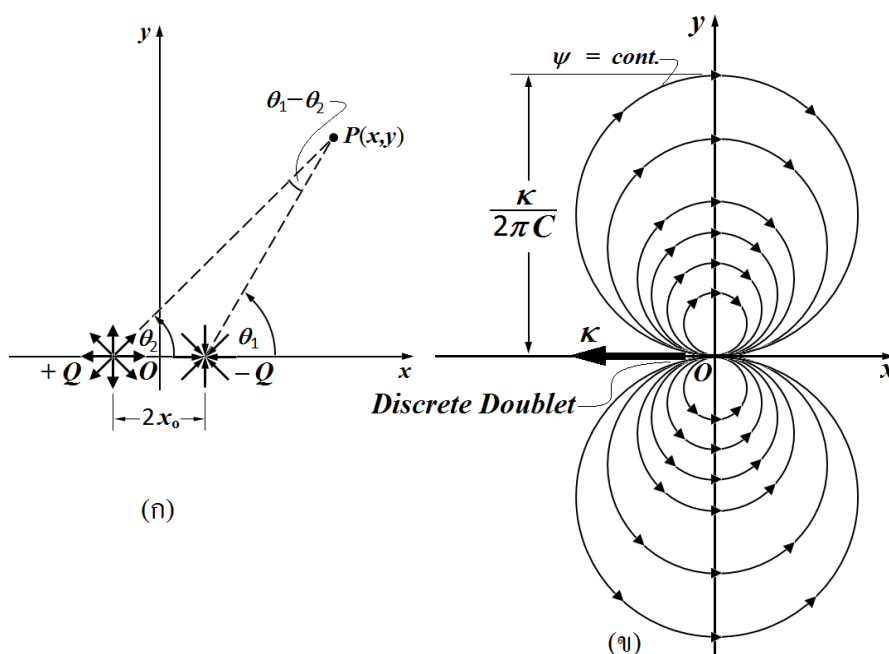
และ
$$\phi = \frac{\kappa}{2\pi} \cdot \frac{\cos \theta}{r} \quad (3.80b)$$

ในพิกัดคาร์ทีเซียน (x, y) และพิกัดเชิงมุม (r, θ) ตามลำดับ

เส้นกระแสของการไหลรอบจุดซอร์สซิงค์ได้จากการจัดสมการ (3.79b) ให้เท่ากับค่าคงที่

$$\psi = -\frac{\kappa}{2\pi} \cdot \frac{\sin \theta}{r} = C$$

หรือ
$$r = -\frac{\kappa}{2\pi C} \cdot \sin \theta \quad (3.81)$$



รูป 3.14 (ก) ขีดจำกัด $x_0 \rightarrow 0$ ของคู่ขอร์สซิงค์ (ข) เส้นกระแสของจุดซ้อนกำลัง K

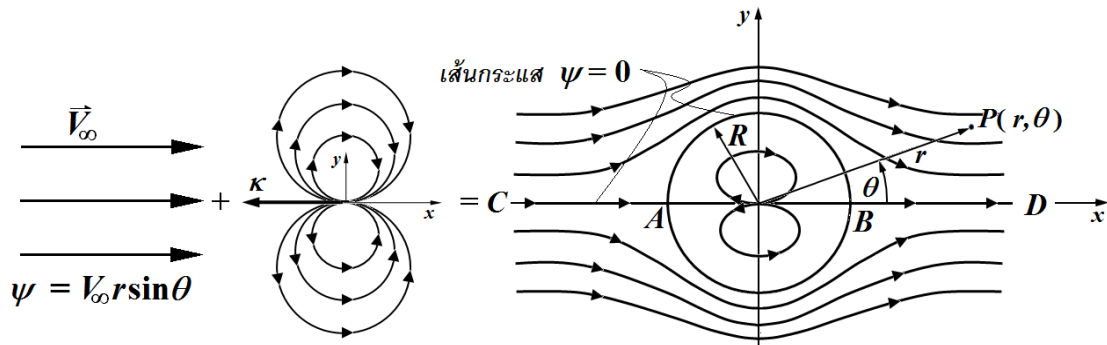
สมการ (3.81) เป็นสมการเส้นกระแสของการไหลรอบจุดซ้อน สมการเป็นสมการวงกลมจุดศูนย์กลางอยู่บนแกน y สัมผัสจุดกำเนิด O และมีขนาดเส้นผ่าศูนย์กลาง $\frac{K}{2\pi C}$ วงกลมแต่ละวงจะสัมพันธ์กับค่า C ตามที่แสดงในรูป 3.14 ข สังเกตว่าในรูป 3.14 ก เราวางขอร์สไว้ทางซ้ายของซิงค์ ดังนั้นในรูป 3.14 ข ทิศทางการไหลจะพุ่งออกจากจุด O ไปทางซ้ายและวนกลับมาสู่จุดกำเนิด O จากทางขวา ถ้าเราสลับตำแหน่งของขอร์สกับซิงค์ เครื่องหมายในสมการ (3.80) และ (3.81) จะกลับเป็นตรงข้าม และทิศทางการไหลในรูป 3.14 ข จะกลับไปอีกทิศทางหนึ่ง ดังนั้นจุดซ้อนจะมีทิศทางควบคู่ไปกับตัวเสมอซึ่งเป็นทิศทางการไหลบนเส้นกระแสรูปวงกลม โดยปกติเราแสดงทิศทางของจุดซ้อนโดยลูกศรที่ลากจากซิงค์ไปยังขอร์ส ตามที่แสดงในรูป 3.14 ข ในรูปลูกศรชี้ไปทางซ้ายซึ่งจะสอดคล้องกับสมการ (3.80) และ (3.81) ถ้าลูกศรชี้ไปทางขวาทิศทางการไหลวนจะกลับเป็นตรงข้าม และเครื่องหมายในสมการ (3.80) จะเป็นบวก และในสมการ (3.81) จะเป็นลบ

ขอให้สังเกตรูป 3.14 ก อีกครั้งว่าในขีดจำกัด $x_0 \rightarrow 0$ นั้น ขอร์สและซิงค์จะขยับมาทับกัน อย่างไรก็ตามกำลังของขอร์สกับซิงค์ไม่ได้หักล้างกันหมดไป เพราะว่ากำลังของขอร์สและซิงค์ เพิ่มขึ้นจนเป็นค่าอนันต์ (Infinity) ทำให้เราได้ความเป็นเอกเทศ (Singularity) กำลัง $(\infty - \infty)$ ซึ่งอยู่ในรูปกำหนดค่าไม่ได้ แต่สามารถมีค่าเป็นค่าจำกัดจำนวนหนึ่งได้

เหมือนการไหลขอร์สกับการไหลซิงค์ เรามองหรือตีความการไหลรอบจุดซ้อนตามรูป 3.14 เป็นการไหลที่ถูกเหนี่ยวนำจากจุดซ้อนเดี่ยว (Discrete doublet) กำลัง K วางไว้ที่จุดกำเนิด จุดซ้อนเดี่ยวนี้จะเป็นจุดเอกเทศที่เหนี่ยวนำรอบตัวให้เกิดการไหลวนเป็นรูปวงกลมสวนกันตามที่แสดงในรูป 3.14 ข

3.12 การไหลผ่านทรงกระบอกกลมที่ไม่เกิดแรงยก

ทรงกระบอกกลมเป็นรูปทรงพื้นฐานที่เป็นปัญหาคลาสสิกทางอากาศพลศาสตร์ ในการศึกษาการไหลของกระแสอากาศ เราเห็นจากหัวข้อ 3.10 แล้วว่าการไหลเอกรูปผ่านซอร์สและซิงค์ที่วางคู่กันสามารถจำลองการไหลผ่านรูปโค้งปิดคล้ายรูปไข่ได้ เราจะพัฒนาวิธีการคล้าย ๆ กันในหัวข้อนี้เพื่อศึกษาการไหลผ่านทรงกระบอกกลม



รูป 3.15 การไหลเอกรูปผ่านจุดซ้อน (Anderson, 2016)

พิจารณาการไหลเอกรูปความเร็ว V_∞ ผ่านจุดซ้อนกำลัง κ ตามรูป 3.15 ให้ทิศทางของจุดซ้อนเป็นไปตามสมการ (3.80) มีทิศทางสวนกับความเร็ว V_∞ จากสมการ (3.56) และ (3.80b) ฟังก์ชันกระแสของการไหลในพิกัดเชิงขั้ว จะเป็น

$$\psi = V_\infty r \sin \theta - \frac{\kappa}{2\pi} \cdot \frac{\sin \theta}{r}$$

หรือ

$$\psi = V_\infty r \sin \theta \left(1 - \frac{\kappa}{2\pi V_\infty r^2} \right) \quad (3.82)$$

ให้ค่าคงที่ $R^2 = \frac{\kappa}{2\pi V_\infty}$ เขียนสมการ(3.82)ใหม่ได้ เป็น

$$\psi = V_\infty r \sin \theta \left(1 - \frac{R^2}{r^2} \right) \quad (3.83)$$

สมการ (3.83) เป็นฟังก์ชันกระแสของการไหลเอกรูปบวกกับจุดซ้อน และเป็นฟังก์ชันกระแสของการไหลเอกรูปผ่านทรงกระบอกกลมรัศมี R ตามที่แสดงในรูป 3.15

หาสนามความเร็วโดยหาอนุพันธ์ของสมการ (3.83) ดังต่อไปนี้

$$\begin{aligned} V_r &= \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} = \frac{1}{r} (V_\infty r \cos \theta) \left(1 - \frac{R^2}{r^2} \right) \\ V_r &= \left(1 - \frac{R^2}{r^2} \right) V_\infty \cos \theta \\ V_\theta &= -\frac{\partial \psi}{\partial r} \\ &= -\left[\left(V_\infty \sin \theta \frac{2R^2}{r^3} \right) + \left(1 - \frac{R^2}{r^2} \right) (V_\infty \sin \theta) \right] \end{aligned} \quad (3.84)$$

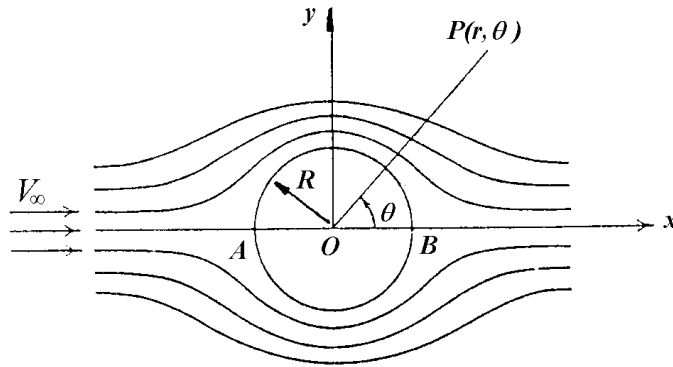
$$= -\left(1 + \frac{R^2}{r^2}\right)(V_\infty \sin\theta) \quad (3.85)$$

ตำแหน่งของจุดชะงักหาได้จากจุดที่มีความเร็วเป็นศูนย์ ดังนั้นจัดสมการ (3.84) และ (3.85) ให้เท่ากับศูนย์

$$\left(1 - \frac{R^2}{r^2}\right)V_\infty \cos\theta = 0 \quad (3.86)$$

$$\left(1 + \frac{R^2}{r^2}\right)(V_\infty \sin\theta) = 0 \quad (3.87)$$

แก้สมการ (3.86) กับ (3.87) พร้อมกันจะได้ตำแหน่งของจุดชะงัก 2 ตำแหน่ง ที่จุด $(r, \theta) = (R, 0)$ และ (R, π) ซึ่งเป็นตำแหน่ง A และ B ในรูป 3.16



รูป 3.16 การไหลเอกรูปผ่านทรงกระบอกกลม (Anderson, 2016)

จุดชะงักจะอยู่บนเส้นกระแสที่ผ่านจุด A หรือ B ซึ่งมีสมการที่หาได้โดยแทนค่าพิกัดของ A หรือ B ลงในสมการ (3.83) แทนค่าพิกัดของจุด A คือ $r = R$ และ $\theta = \pi$ จะได้ $\psi = 0$ เช่นเดียวกัน เมื่อแทนค่าพิกัดของจุด B คือ $r = R$ และ $\theta = 0$ จะได้ $\psi = 0$ นั่นคือจุดชะงักทั้งสองจุด A กับ B ด้านหน้าและด้านหลัง จะอยู่บนเส้นกระแสเส้นเดียวกัน ซึ่งเป็นเส้นที่มีสมการเป็น

$$\psi = V_\infty r \sin\theta \left(1 - \frac{R^2}{r^2}\right) = 0 \quad (3.88)$$

ค่า $r = R$ ในสมการ (3.88) จะทำให้สมการเป็นจริงทุกค่าของ θ จาก $0 \rightarrow 2\pi$ แต่ $R = \frac{\kappa}{2\pi V_\infty}$ เป็นค่าคงที่ ในพิกัดเชิงขั้ว $r = \text{Cont.}$ (ค่าคงที่ใดๆ) คือวงกลมที่มีรัศมีเท่ากับค่าคงที่นั้น ดังนั้นสมการ (3.88) บอกเราว่าเส้นรอบวงวงกลมรัศมี R เป็นส่วนของเส้นกระแส $\psi = 0$ นอกจากนี้ในสมการ (3.88) ค่า $\theta = \pi$ และ $\theta = 0$ ทำให้สมการเป็นจริงสำหรับทุกค่าของ r ดังนั้นเส้นตรงทาบแกน x จาก $-\infty \rightarrow \infty$ จะเป็นส่วนหนึ่งของเส้นกระแส $\psi = 0$ ด้วย

สังเกตว่าเส้นกระแส $\psi = 0$ เป็นเส้นที่ผ่านจุดชะงักเป็นเส้นกระแสที่แบ่งการไหลจากการไหลเอกรูปและจากจุดช้อนออกจากกัน การไหลทั้งหมดภายในเส้น $\psi = 0$ (ในวงกลมรัศมี R) มาจากจุด

ซ้อน และการไหลทั้งหมดด้านนอก $\psi = 0$ (นอกวงกลมรัศมี R) จะมาจากการไหลเอกรูป นั่นคือ เราสามารถแทนจุดซ้อนกำลัง K ด้วยทรงกระบอกรัศมี R โดยที่การไหลภายนอกจะรู้สึกถึงความแตกต่าง ดังนั้นสรุปได้ว่า “การไหลไร้ความหนืดไร้การหมุนไร้การอัดตัว” (Inviscid, irrotational, incompressible flow) ผ่านทรงกระบอกกลมรัศมี R อาจสังเคราะห์ขึ้นได้โดยการรวม การไหลเอกรูปความเร็ว V_∞ กับจุดซ้อนกำลัง K โดยรัศมี R ของทรงกระบอกจะสัมพันธ์กับ V_∞ และ K ผ่านสมการ

$$R = \sqrt{\frac{K}{2\pi V_\infty}} \quad (3.89)$$

ขอให้สังเกตว่าสมการเส้นกระแส แสดงการไหลที่สมมาตรกันรอบแกน x และแกน y ดังที่แสดงในรูป 3.16 ทำให้การแจกแจงความดันมีลักษณะสมมาตรรอบแกนทั้งสองด้วย ผลคือ การแจกแจงความดันด้านบนของทรงกระบอกจะหักล้างกับการแจกแจงความดันด้านล่างพอดี และทำให้แรงยกสุทธิเป็นศูนย์ เช่นเดียวกันระหว่างด้านหน้าและด้านหลัง ความดันจะหักล้างกันพอดี ทำให้แรงต้านสุทธิเป็นศูนย์ ในความเป็นจริง แรงยกเป็นศูนย์ เป็นผลลัพธ์ที่ยอมรับได้ แต่แรงต้านเป็นศูนย์ เป็นผลลัพธ์ที่ขัดสามัญสำนึก เพราะเราทราบดีว่าวัตถุรูปร่างใดๆ ที่จมอยู่ในกระแสการไหลต้องพบกับแรงต้านเสมอ ผลลัพธ์ที่ขัดแย้งความเป็นจริงนี้เรียกว่า “D’Alumbert paradox” ซึ่งได้ชื่อตามชาวฝรั่งเศส “Jean Le Rond D’Alumbert” ที่เป็นบุคคลแรกที่พยายามคำนวณแรงต้านของทรงกระบอกกลมโดยทฤษฎีไฮโดรไดนามิกส์ (Hydrodynamics) ในขั้นแรกผลอันนี้ไม่สามารถหาคำอธิบายได้ แต่ในปัจจุบันเป็นที่ทราบกันดีแล้วว่า ความหนืดมีผลต่อแรงเสียดทานที่ผิว และการแยกตัวจากผิวของกระแสในบริเวณด้านหลังของทรงกระบอกทำให้เกิดกระแสนวน (Wake) เป็นแถบกว้างด้านหลัง ทำลายลักษณะสมมาตรของการไหลด้านหน้าและด้านหลัง อย่างไรก็ตามเนื่องจากเราไม่ได้รวมผลของความหนืดไว้ในการศึกษา จึงทำให้ทฤษฎีการไหลไร้ความหนืดที่เราใช้ทำนายการไหลที่ราบเรียบติดผิวด้านหลังตามที่แสดงในรูป 3.16 ไม่มีกระแสนวน และไม่มีค่าที่ไม่สมมาตร ผลคือ แรงต้านที่เป็นศูนย์

ความเร็วกระแสบนเส้นรอบรูปทรงกระบอกได้จากการแทนค่า $r = R$ ในสมการ (3.84) และ (3.85) ซึ่งจะได้

$$V_r = 0 \quad (3.90)$$

และ
$$V_\theta = -2V_\infty \sin \theta \quad (3.91)$$

สังเกตว่าบนผิวทรงกระบอก V_r จะอยู่ในทิศทางตั้งฉากกับผิว ดังนั้นสมการ (3.91) จึงแสดงค่าสอดคล้องกับเงื่อนไขที่ผิววัตถุที่จะไม่มีกระแสไหลเข้าหรือออกจากผิววัตถุ นั่นคือความเร็วตั้งฉากกับผิวจะมีค่าเป็นศูนย์ และความเร็วในแนวสัมผัสเส้นรอบวงจะมีค่าตามสมการ (3.91) และเป็นค่าขนาดของความเร็วบนเส้นรอบวง คือ $V = V_\theta = -2V_\infty \sin \theta$ ค่าลบในสมการสอดคล้องกับทิศทางที่เรากำลังพิจารณา V_θ ในทิศทางเพิ่มขึ้นของ θ เป็นบวก หรือทวนเข็มนาฬิกาตามแสดงในรูป 3.17 ก แต่ในการพิจารณา

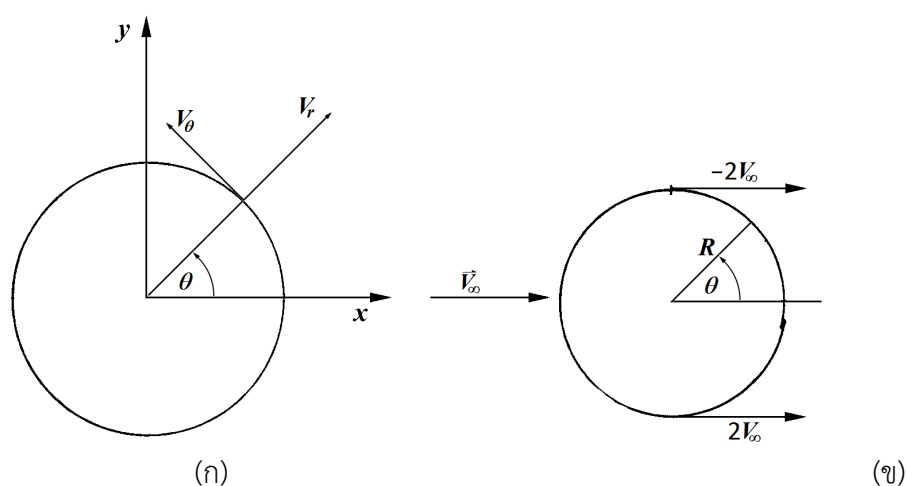
ของเราความเร็วจะไล่ตามผิวจากซ้ายไปขวาเครื่องหมายลบในสมการจึงปรากฏขึ้นด้วยเหตุนี้ สังเกตว่าจากสมการ(3.91) ความเร็วบนผิวทรงกระบอกจะถึงค่าสูงสุดที่ $\theta = \pi/2$ และ $3\pi/2$ และค่า $V_{max} = 2 V_\infty$

จากสมการ (3.34) สัมประสิทธิ์ความดัน คัดจาก

$$c_p = 1 - \left(\frac{V}{V_\infty} \right)^2 \quad (3.34)$$

แทนค่าความเร็วจากสมการ (3.91) จะได้สัมประสิทธิ์ความดันบนผิวทรงกระบอก

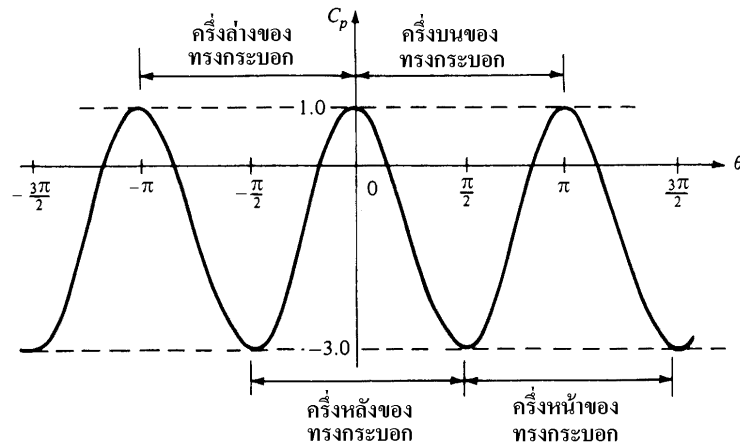
$$c_p = 1 - 4 \sin^2 \theta \quad (3.92)$$



รูป 3.17 (ก) การกำหนดความเร็ว V_r และ V_θ (ข) ความเร็วสูงสุดบนผิวทรงกระบอก

ค่า c_p จะเปลี่ยนแปลงจากค่า 1.0 ที่จุดชะงักจนถึง -3.0 ที่ตำแหน่งที่มีความเร็วสูงสุด การแจกแจงสัมประสิทธิ์ความดันบนผิวทรงกระบอก แสดงในรูป 3.18 เห็นได้ชัดว่าการแจกแจงความดันของครึ่งบนและครึ่งล่างของทรงกระบอกจะเท่ากันทำให้แรงยกจะมีค่าเป็นศูนย์ และการแจกแจงความดันของบริเวณที่เป็นครึ่งหน้าและครึ่งหลังของทรงกระบอกจะเท่ากัน และทำให้แรงต้านเป็นศูนย์เช่นกัน ผลลัพธ์นี้อาจยืนยันได้โดยการอินทิเกรตความดันรอบทรงกระบอก ตามสมการ

$$C_D = \frac{1}{c} \int_0^c (c_{p,l} - c_{p,u}) dx \quad (1.32)$$



รูป 3.18 การแจกแจงสัมประสิทธิ์ความดันรอบทรงกระบอก
ตามทฤษฎีการไหลไร้ความหนืดไร้การอัดตัว (Katz & Plotkin, 2001)

$$C_a = \frac{1}{c} \int_0^c (c_{p,u} - c_{p,l}) dy \quad (1.33)$$

สำหรับทรงกระบอกกลม ความยาวคอร์ด c จะเป็นเส้นผ่าศูนย์กลางจากหน้าไปหลัง ในรูป 3.18 ค่า $c_{p,l}$ จะเท่ากับ $c_{p,u}$ สำหรับทุกตำแหน่งด้านบนและด้านล่างที่ตรงกัน ดังนั้นค่าอินทิเกรตในสมการจะมีค่าเท่ากับศูนย์ และทำให้ $C_n = C_a = 0$ ซึ่งยืนยันข้อสรุปที่ผ่านมา

ตัวอย่าง 3.9 จงคำนวณหาตำแหน่งบนผิวทรงกระบอกที่มีกระแสไหลผ่านที่มีความดันเท่ากับความดันของกระแสอิสระ

วิธีทำ ที่ความดัน $p = p_\infty$ ค่า $c_p = 0$ ดังนั้นจากสมการ(3.92)

$$c_p = 0 = 1 - 4 \sin^2 \theta$$

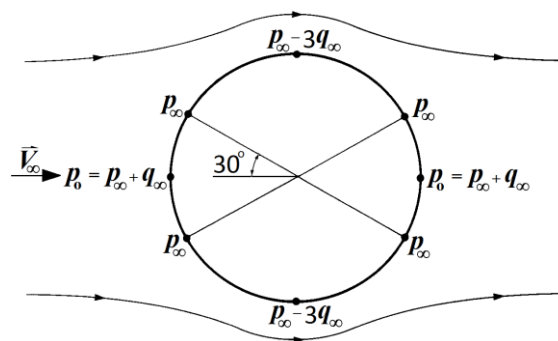
นั่นคือ

$$\sin \theta = \pm \frac{1}{2}$$

เพราะฉะนั้น

$$\theta = 30^\circ, 150^\circ, 210^\circ, 330^\circ$$

ตอบ

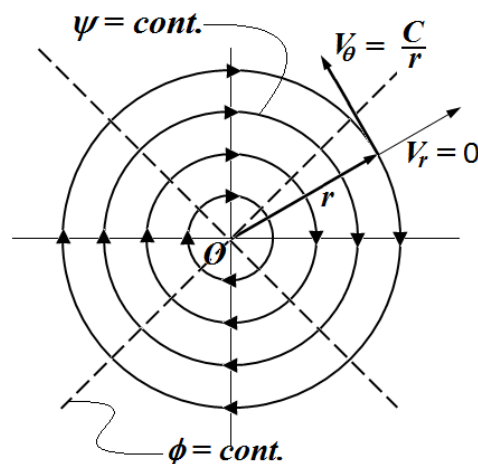


รูป 3.19 ตำแหน่งบนผิวทรงกระบอกที่มีความดัน $p = p_\infty$ ตามตัวอย่าง 3.9

ตำแหน่งนี้แสดงในภาพพร้อมจุดชะงักและจุดที่ความเร็วสูงสุด สังเกตว่าที่จุดชะงัก $c_p = 1$ ดังนั้นความดัน $p = p_\infty + q_\infty$ และค่อยๆ ลดลงจนเป็น p_∞ ในช่วง 30° แรกไล่ไปตามผิว ความดันต่ำสุดจะอยู่ที่จุดสูงสุดและต่ำสุดบนผิวและจะมีค่า $= p_\infty - 3q_\infty$ ซึ่งตรงกับ $c_p = -3$

3.13 การไหลวอร์เทค (Vortex Flow) : การไหลพื้นฐานที่ 4

พิจารณาการไหลที่เส้นกระแสเป็นเส้นรอบวงของวงกลมรอบจุดศูนย์กลางที่กำหนดตามที่แสดงในรูป 3.20 กำหนดให้ค่าความเร็วบนเส้นกระแสแต่ละเส้นมีค่าคงที่ แต่แปรผันจากเส้นหนึ่งไปยังอีกเส้นหนึ่งกลับกับรัศมีจากจุดศูนย์กลาง การไหลแบบนี้เรียกว่าการไหลวอร์เทค (Vortex flow) สังเกตจากรูป 3.20 ส่วนของความเร็วตามแนวรัศมีและแนวสัมผัส จะเป็น $V_r = 0$ และ $V_\theta = \frac{C}{r}$ (ส่วนของความเร็วจะกลับกันกับการไหลซอร์สในหัวข้อ 3.9) สามารถแสดงได้ง่ายๆ ว่าความเร็วของการไหลวอร์เทคจะสอดคล้องกับสมการ $\vec{\nabla} \cdot \vec{V} = 0$ ซึ่งแสดงว่าการไหลไม่มีการอัดตัว และ $\vec{\nabla} \times \vec{V} = 0$ ซึ่งแสดงว่าการไหลไม่มีการหมุนทุกจุด ยกเว้นที่จุดกำเนิด



รูป 3.20 การไหลวอร์เทค (Vortex flow)

การประมาณค่า C ใน $V_\theta = \frac{C}{r}$ ทำได้โดยหาค่าการหมุนวนรอบเส้นกระแสรัศมี r จาก

$$\Gamma = \oint_c \vec{V} \cdot d\vec{s} = -V_\theta(2\pi r)$$

หรือ

$$V_\theta = \frac{C}{r} = -\frac{\Gamma}{2\pi r} \quad (3.93)$$

เพราะฉะนั้น

$$C = -\frac{\Gamma}{2\pi} \quad (3.94)$$

ดังนั้นสำหรับการไหลวอร์เทค สมการ (3.94) แสดงให้เห็นเป็นตัวอย่างว่าค่าการหมุนวนที่คิดรอบเส้นกระแสแต่ละเส้นจะมีค่าเท่ากันเสมอคือ $\Gamma = -2\pi C$ โดยนัยนี้เราจึงเรียก Γ เป็นกำลังของวอร์เทค และสมการ (3.93) จะแสดงสนามความเร็วของการไหลวอร์เทคที่มีกำลัง Γ สังเกตว่าใน

สมการ (3.93) V_θ จะเป็นลบเมื่อ Γ เป็นบวก นั่นคือวอร์เทกซ์ที่มีกำลังเป็นบวกจะหมุนวนตามเข็มนาฬิกา

ได้กล่าวแล้วตอนต้นว่าสำหรับการไหลวอร์เทกซ์ ค่า $\vec{\nabla} \times \vec{V} = 0$ ทุกจุดยกเว้นที่จุดศูนย์กลาง $r = 0$ แสดงว่าการไหลเป็นการไหลไร้การหมุนยกเว้นที่จุดศูนย์กลาง เราจะศึกษาว่าเกิดอะไรขึ้นที่จุดศูนย์กลางโดยดูจากสมการ

$$\Gamma = -\iint_S (\vec{\nabla} \times \vec{V}) \cdot d\vec{S} \quad (2.74)$$

เมื่อรวมกับสมการ (3.94) ได้

$$2\pi C = \iint_S (\vec{\nabla} \times \vec{V}) \cdot d\vec{S} \quad (3.95)$$

เนื่องจากกำลังพิจารณาการไหล 2 มิติ ดังนั้นในรูป 3.20 การไหลเกิดขึ้นบนระนาบของหน้ากระดาษ ในสมการ (3.95) ทั้ง $\vec{\nabla} \times \vec{V}$ และ $d\vec{S}$ จะมีทิศทางตั้งฉากกับหน้ากระดาษเหมือนกัน เราจึงเขียนสมการ (3.95) ได้ใหม่เป็น

$$2\pi C = \iint_S (\vec{\nabla} \times \vec{V}) \cdot d\vec{S} = \iint_S |\vec{\nabla} \times \vec{V}| dS \quad (3.96)$$

ในสมการ (3.96) พื้นที่ของการอินทิเกรตจะอยู่ภายในวงกลมที่คิดค่า Γ รอบเส้นรอบวง แต่เราพิสูจน์แล้วว่า Γ จะเป็นค่าเดียวกันไม่ว่าจะคิดบนเส้นกระแสเส้นใด ดังนั้นเลือกเส้นกระแสที่เป็นเส้นรอบวงของวงกลมที่เล็กมารอบจุดศูนย์กลาง หรือเราเลือก $r \rightarrow 0$ ในกรณีนี้ค่า Γ ยังคงเป็น $-2\pi C$ แต่พื้นที่ภายในวงกลมจะลดลงจนเกือบเป็นศูนย์ และ

$$\iint_S (\vec{\nabla} \times \vec{V}) \cdot d\vec{S} \rightarrow |\vec{\nabla} \times \vec{V}| dS$$

ดังนั้นในขีดจำกัด $r \rightarrow 0$ จะได้

$$2\pi C = |\vec{\nabla} \times \vec{V}| dS$$

$$\text{หรือ} \quad |\vec{\nabla} \times \vec{V}| = \frac{2\pi C}{dS} \quad (3.97)$$

แต่เมื่อ $r \rightarrow 0$ พื้นที่ $dS \rightarrow 0$ ด้วย ดังนั้นในสมการ (3.97)

$$|\vec{\nabla} \times \vec{V}| \rightarrow \infty$$

สรุปได้ว่าการไหลวอร์เทกซ์เป็นการไหลไร้การหมุนทุกจุดยกเว้นที่ $r = 0$ ซึ่งค่าของวอร์ทิซิตี (Vorticity) มีค่า ∞ เหตุนี้ที่จุด $r = 0$ จึงเป็นจุดเอกเทศของการไหลเช่นเดียวกับการไหลจากซอร์สซิงค์ และจุดซ็อก การไหลวอร์เทกซ์มีจุดเอกเทศบรรจุอยู่ ดังนั้นเราอาจคิดถึงจุด O ในรูป 3.20 ว่าเป็นจุดวอร์เทกซ์ที่เหนียวนำรอบตัวมันให้เกิดกระแสที่ไหลวนเป็นวงกลม ตามที่แสดงในรูป

ศักย์ความเร็วและฟังก์ชันกระแสของการไหลวอร์เทกซ์ ได้จาก

$$\frac{\partial \phi}{\partial r} = V_r = 0$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} = V_\theta = -\frac{\Gamma}{2\pi r}$$

เมื่ออินทิเกรต จะได้

$$\phi = \frac{\Gamma}{2\pi} \theta \quad (3.98)$$

และจาก

$$\begin{aligned} \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} &= V_r = 0 \\ -\frac{\partial \psi}{\partial r} &= V_\theta = -\frac{\Gamma}{2\pi r} \end{aligned}$$

เมื่ออินทิเกรต จะได้

$$\psi = \frac{\Gamma}{2\pi} \ln r \quad (3.99)$$

สมการ (3.98) และ (3.99) เป็นศักย์ความเร็วและฟังก์ชันกระแสของการไหลวอร์เทก สังเกตว่าสมการ (3.99) จะให้สมการเส้นกระแส เป็นเส้นรอบวงวงกลมรัศมี r ใด ๆ ส่วนสมการ (3.98) ให้สมการของเส้นศักย์เสมอเป็นเส้นรัศมีจากจุดศูนย์กลาง ซึ่งเส้นทั้งสองจะตั้งฉากกันและตรงตามนิยามของการไหลวอร์เทก และสังเกตอีกด้วยว่า ϕ และ ψ ของการไหลวอร์เทกจะสลับกับ ϕ และ ψ ของการไหลซอร์ส เมื่อไม่คิดความแตกต่างของ Γ และ Q

3.14 การไหลผ่านทรงกระบอกที่เกิดแรงยก (Lifting Flow over Cylinder)

ในหัวข้อ 3.12 การรวมการไหลเอกรูปกับจุดซอร์สให้ผลลัพธ์เป็นการไหลผ่านทรงกระบอกกลมที่มีความสมมาตรของเส้นกระแสและมีแรงยกกับแรงต้านเป็นศูนย์ รูปแบบการไหลนี้ไม่ได้เป็นเพียงรูปแบบแบบเดียวที่การไหลเอกรูปสามารถไหลผ่านทรงกระบอกกลมได้ทางทฤษฎี แต่เป็นเพียงรูปแบบการไหลที่ควบคู่กับการไม่เกิดแรงยก (หรือกล่าวอีกอย่างคือ เป็นรูปแบบการไหลที่ให้เส้นกระแสสมมาตรกันตามรูป 3.16) ยังมีรูปแบบการไหลแบบอื่นอีกผ่านทรงกระบอกกลมที่ควบคู่กับการเกิดแรงยก และเป็นเรื่องที่จะกล่าวถึงกันในหัวข้อนี้

ถึงตอนนี้อาจทำให้เกิดความลังเลขึ้นในใจได้ว่า การไหลผ่านทรงกระบอกจะเกิดแรงยกขึ้นได้อย่างไรในเมื่อทรงกระบอกเป็นรูปทรงสมมาตร ความลังเลนี้อาจจัดไปได้โดยการทดลอง ถ้าเราติดตั้งทรงกระบอกในอุโมงค์ลมแล้วทำการวัดแรงยกที่เกิดขึ้น แน่นอนว่าจะได้แรงยกเป็นศูนย์สอดคล้องกับผลสรุปในหัวข้อ 3.9 และสามัญสำนึกของเรา แต่ถ้าเป็นไปได้ที่จะปั่นทรงกระบอกในอุโมงค์ลมให้หมุนรอบแกนด้วยความเร็วสูงพอสมควรแล้ว เราอาจแปลกใจที่คราวนี้เราสามารถวัดได้ว่ามีแรงยกเกิดขึ้น ตอนนี้เราอาจนึกย้อนไปถึงสถานการณ์อื่นที่คล้ายกัน เช่นลูกบอลหรือลูกกอล์ฟ ที่เคลื่อนที่ไปพร้อมกับปั่นไปด้วยจะวิ่งเป็นเส้นโค้ง แสดงถึงว่ามีการไหลแบบไม่สมมาตรผ่านรูปทรงที่เป็นรูปสมมาตรได้ในความเป็นจริง แต่เหตุผลอะไรที่เป็นต้นตอของปรากฏการณ์นี้ เราอาจประหลาดใจถ้าทราบว่า แนวคิดของการเกิดแรงยกบนทรงกระบอกเป็นจุดเริ่มต้นของการพิจารณาการเกิดแรงยกขึ้นบนรูปแพนอากาศ (Anderson, 2016) ในบทที่ 4

เราเริ่มต้นด้วยการรวมการไหลผ่านทรงกระบอกที่ไม่เกิดแรงยกกับการไหลวอร์เทคกำลัง Γ ตามที่แสดงในรูป 3.21 ฟังก์ชันกระแสของการไหลผ่านทรงกระบอกได้มาจากสมการ (3.83)

$$\psi = V_{\infty} r \sin \theta \left(1 - \frac{R^2}{r^2} \right) \quad (3.83)$$

ฟังก์ชันกระแสของการไหลวอร์เทค กำลัง Γ ได้จากสมการ (3.99) เนื่องจากฟังก์ชันกระแสสามารถกำหนดให้มีค่าคงที่ใดๆ มารวมด้วยได้โดยไม่ทำให้ฟังก์ชันเปลี่ยนแปลง ดังนั้นเราจะเขียนสมการ (3.99) เป็น

$$\psi = \frac{\Gamma}{2\pi} \ln r + C \quad (3.99a)$$

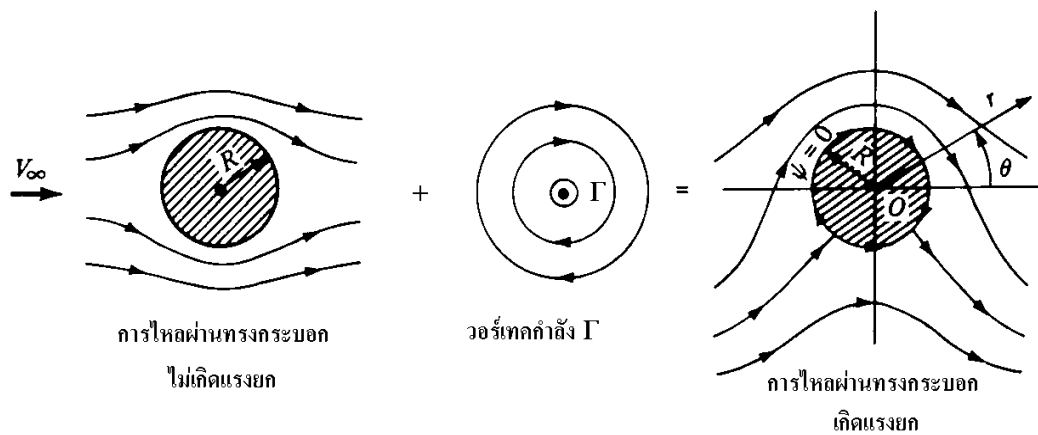
เพราะว่าค่า C เป็นค่าอะไรก็ได้ เพื่อความสะดวกเลือกให้

$$C = -\frac{\Gamma}{2\pi} \ln R$$

ทำให้สมการ (3.99) เป็น

$$\psi_2 = \frac{\Gamma}{2\pi} \ln \frac{r}{R} \quad (3.99b)$$

สมการ (3.99b) เป็นฟังก์ชันกระแสของการไหลวอร์เทค กำลัง Γ เช่นเดียวกับสมการ (3.99) จะแตกต่างกันเฉพาะค่าคงที่ที่ใช้ในสมการ สังเกตว่าในสมการ (3.99b) เส้นกระแสที่เป็นเส้นรอบวงของวงกลมรัศมี R จะมีค่า $\psi_2 = 0$



รูป 3.21 การไหลผ่านทรงกระบอกที่เกิดแรงยก (Anderson, 2016)

ค่าฟังก์ชันกระแสของการไหลที่แสดงทางขวาของรูปที่ 3.21 จะเป็น

$$\psi = \psi_1 + \psi_2$$

หรือ

$$\psi = V_{\infty} r \sin \theta \left(1 - \frac{R^2}{r^2} \right) + \frac{\Gamma}{2\pi} \ln \frac{r}{R} \quad (3.100)$$

ในสมการ (3.100) ถ้า $r = R$, ψ จะเท่ากับศูนย์สำหรับ θ ทุกค่า นั่นคือเส้นรอบวงวงกลมรัศมี R จะเป็นเส้นกระแสเส้นที่มีค่า $\psi = 0$ ซึ่งแสดงว่าสมการ (3.100) เป็นฟังก์ชันกระแสของการไหล

ไว้ความหนืดไว้การอัดตัวผ่านทรงกระบอกได้ตามแสดงในรูป 3.21 จริงๆ แล้วสมการ(3.83) เป็นกรณีพิเศษของสมการ (3.100) เมื่อค่า $\Gamma = 0$ นั่นเอง

เส้นกระแสของสมการ (3.100) ที่แสดงทางขวาของรูป 3.21 แสดงความไม่สมมาตรของการไหลข้ามแกน x และน่าจะทำให้ทรงกระบอกรู้สึกถึงแรงกระทำตั้งฉากกับแกน x อย่างไรก็ตามข้ามแกน y เส้นกระแสมีลักษณะสมมาตรกัน และมีผลให้แรงต้านมีค่าเป็นศูนย์ ขอให้สังเกตด้วยว่าเนื่องจากเราเพิ่มวอร์เทค กำลัง Γ เข้าไปในการไหล ตอนนี้ค่าการหมุนวนรอบทรงกระบอกจะมีค่าเท่ากับ Γ

ความเร็วของการไหลได้จากการหาอนุพันธ์ของสมการ (3.100) หรืออาจทำได้โดยการรวมความเร็ว V_r และ V_θ ของการไหลผ่านทรงกระบอกตามสมการ (3.90) และ (3.91) กับความเร็วของการไหลวอร์เทค ตามสมการ (3.93) เข้าด้วยกันโดยตรงก็ได้ ดังนั้นจะได้ความเร็วของการไหลผ่านทรงกระบอกที่เกิดแรงยก เป็น

$$V_r = \left(1 - \frac{R^2}{r^2}\right) V_\infty \cos \theta \quad (3.101)$$

$$V_\theta = -\left(1 + \frac{R^2}{r^2}\right) V_\infty \sin \theta - \frac{\Gamma}{2\pi r} \quad (3.102)$$

หาตำแหน่งของจุดชะงักโดยจัดให้สมการ (3.101) และ (3.102) เท่ากับ 0 และแก้สมการหาตำแหน่ง (r, θ)

$$V_r = \left(1 - \frac{R^2}{r^2}\right) V_\infty \cos \theta = 0 \quad (3.103)$$

$$V_\theta = -\left(1 + \frac{R^2}{r^2}\right) V_\infty \sin \theta - \frac{\Gamma}{2\pi r} = 0 \quad (3.104)$$

สมการ (3.103) จะเท่ากับศูนย์ เมื่อ $r = R$ นำไปแทนในสมการ (3.104) จะได้

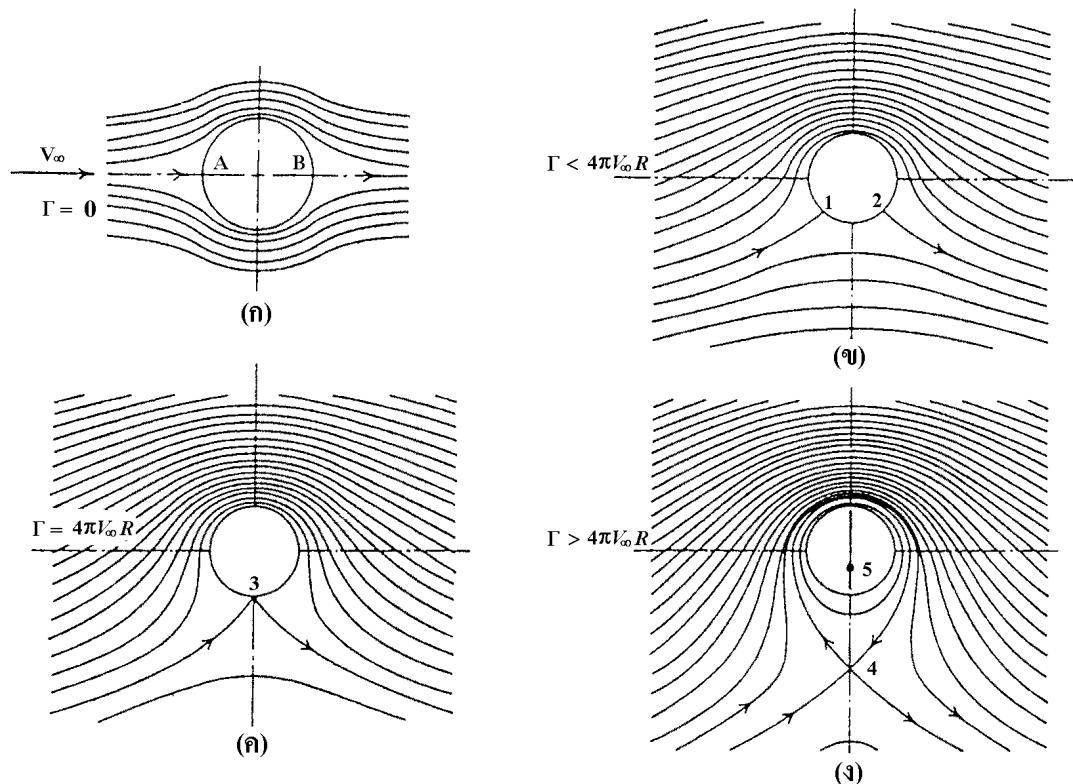
$$\theta = \sin^{-1} \left(-\frac{\Gamma}{4\pi V_\infty R} \right) \quad (3.105)$$

ถ้าค่า Γ มีค่าเป็นเลขบวก มุม θ จะอยู่ในควอดแดรนต์ (Quadrant) ที่ 3 และ 4 นั่นคือจะมีตำแหน่งของจุดชะงักได้สองตำแหน่งบนผิวทรงกระบอกที่แสดงโดยตำแหน่ง 1 และ 2 ในรูป 3.22 ข โดยตำแหน่งของจุดชะงักจะอยู่ที่ (R, θ) และมุม θ กำหนดโดยสมการ (3.105) อย่างไรก็ตามผลลัพธ์นี้ใช้ได้เฉพาะเมื่อ $\frac{\Gamma}{4\pi V_\infty R} < 1$ เท่านั้น ถ้า $\frac{\Gamma}{4\pi V_\infty R} > 1$ แล้วสมการ (3.105) จะไร้ความหมายเพราะไม่มี $\sin$ ของมุมใดมีค่ามากกว่า 1 ในกรณีที่ $\frac{\Gamma}{4\pi V_\infty R} = 1$ จุดชะงักจะเหลือเพียงจุดเดียวเท่านั้นคือจุดที่ 3 ในรูป 3.22 ค ซึ่งจะอยู่ที่ตำแหน่ง $(R, -\frac{\pi}{2})$ สำหรับกรณีที่ $\frac{\Gamma}{4\pi V_\infty R} > 1$ สมการ (3.103) นอกจากจะ

เป็นจริงเมื่อ $r = R$ แล้ว สมการยังเป็นจริงเมื่อ $\theta = \frac{\pi}{2}$ และ $-\frac{\pi}{2}$ ด้วย ดังนั้นแทนค่า $\theta = -\frac{\pi}{2}$ ในสมการ (3.104) แก้สมการหา r จะได้

$$r = \frac{\Gamma}{4\pi V_\infty R} \pm \sqrt{\left(\frac{\Gamma}{4\pi V_\infty}\right)^2 - R^2} \quad (3.106)$$

นั่นคือตำแหน่งจุดชะงักจะอยู่บนแกน y ด้านในของทรงกระบอกจุดหนึ่งและด้านนอกอีกจุดหนึ่ง ตามที่แสดงด้วยจุด 4 และ 5 ในรูป 3.22 ง เหตุผลที่มีจุดชะงักอยู่ด้านในของทรงกระบอกนั้น เพราะว่าจริงๆ แล้วเส้นรอบวง $r = R$ หรือ $\psi = 0$ เป็นเพียงเส้นกระแสของการไหลเส้นหนึ่งเท่านั้น ในทางทฤษฎีมีการไหลภายในทรงกระบอกที่เกิดจากจุดซ้อนที่จุดศูนย์กลางรวมกับการไหลที่เกิดจากจุดวอร์เทกซ์สำหรับบริเวณภายในรัศมี $r < R$ เส้นกระแสที่เป็นเส้นรอบวง $r = R$ เป็นเส้นแบ่งการไหลภายในนี้กับการไหลจากการไหลเอกรูปออกจากกัน ดังนั้นเราอาจแทนเส้นกระแสเส้นนี้ด้วยผิวทรงกระบอกกลมรัศมี R โดยที่ไม่ทำให้เกิดความแตกต่างสำหรับการไหลเอกรูป ดังนั้นแม้จุดชะงัก 5 จะมีตำแหน่งอยู่ภายในทรงกระบอกก็ไม่มีผลใดๆ ต่อการไหลจริงที่จะต้องไปกังวลกับมัน และจุดชะงัก 4 จะเป็นจุดชะงักจุดเดียวที่มีความหมายในกรณีนี้



รูป 3.22 จุดชะงักของการไหลผ่านทรงกระบอกเมื่อเกิดแรงยก (Anderson, 2016)

การไหลในรูป 3.22 อาจอธิบายได้ดังนี้ พิจารณาการไหลไร้ความหนืดไร้การอัดตัวที่มีความเร็วกระแสวิกฤต V_∞ ผ่านทรงกระบอกรัศมี R ถ้า $\Gamma = 0$ ไม่มีการหมุนวนการไหลจะมีลักษณะตามรูป 3.22 ก โดยจุดชะงักจะอยู่บนแกน x ที่ตำแหน่งตรงข้ามกันบนผิวทรงกระบอก ตอนนี้สมมติให้เกิดการหมุนวนรอบทรงกระบอกจนทำให้ $\Gamma < 4\pi V_\infty R$ การไหลในรูป 3.22 ข จะเกิดขึ้น จุดชะงักจะเลื่อนจากจุด A และ B มาด้านล่างยังตำแหน่ง 1 และ 2 ถ้าค่า Γ เพิ่มขึ้นอีกจนกระทั่ง $\Gamma = 4\pi V_\infty R$ จุดชะงักจะเลื่อนมาทับกันที่จุด $(R, -\frac{\pi}{2})$ หรือจุด 3 ในรูป 3.22 ค ถ้าค่า Γ ยังคงเพิ่มขึ้นไปอีกจน $\Gamma > 4\pi V_\infty R$ จุดชะงักจะเลื่อนออกจากผิวทรงกระบอกลงมาด้านล่างตามแนวแกน y เป็นจุดที่ 4 ในรูปที่ 3.22 ง

จะเห็นได้จากที่ได้กล่าวมาแล้ว Γ เป็นตัวแปรที่อาจเลือกค่าได้อย่างอิสระ นั่นคือ Γ อาจมีค่าเท่าใดก็ได้ เมื่อพิจารณาการไหลผ่านทรงกระบอก ดังนั้น สำหรับการไหลไร้ความหนืดไร้การอัดตัวผ่านทรงกระบอกกลมจะมีรูปแบบการไหลที่เป็นคำตอบที่เป็นไปได้นับไม่ถ้วน ควบคู่ไปกับค่า Γ นับไม่ถ้วนที่เลือก ข้อสรุปนี้ไม่ใช่สำหรับทรงกระบอกกลมเท่านั้น แต่จะเป็นจริงสำหรับการไหลไร้ความหนืดไร้การอัดตัวผ่านวัตถุรูปทรงใดๆ ใน 2 มิติ ทุกรูปทรงด้วย

เราสรุปจากรูปร่างของเส้นกระแสในรูป 3.21 และ 3.22 ว่าจะต้องมีแรงยกเกิดขึ้น แต่แรงต้านจะยังคงเป็นศูนย์ เราจะคำนวณเพื่อยืนยันผลลัพธ์นี้โดยคำนวณความเร็วบนผิวทรงกระบอก จากสมการ (3.102) เมื่อแทน $r = R$

$$V = V_\theta = -2V_\infty \sin \theta - \frac{\Gamma}{2\pi R}$$

เมื่อนำไปแทนในสมการของสัมประสิทธิ์ความดัน จะได้

$$c_p = \left(1 - \frac{V^2}{V_\infty^2}\right) = \left(1 - \frac{\left(-2V_\infty \sin \theta - \frac{\Gamma}{2\pi R}\right)^2}{V_\infty^2}\right)$$

$$c_p = \left(1 - \frac{(-2V_\infty \sin \theta)^2 - 2(-2V_\infty \sin \theta)\left(\frac{\Gamma}{2\pi R}\right) + \left(\frac{\Gamma}{2\pi R}\right)^2}{V_\infty^2}\right)$$

หรือ

$$c_p = \left(1 - 4\sin^2 \theta + \frac{2\Gamma \sin \theta}{\pi R V_\infty} + \left(\frac{\Gamma}{2\pi R V_\infty}\right)^2\right) \quad (3.107)$$

เราใช้วิธีการในบทที่ 1 หาแรงลัพท์ที่เกิดจากความดันที่แจกแจงรอบผิวทรงกระบอก เพราะในกรณีนี้พิจารณา $c_f = 0$ (ไม่คิดแรงเสียดทานที่ผิว) ดังนั้นสัมประสิทธิ์แรงต้าน c_d จะได้จากสมการ (1.33)

$$C_d = C_a = \frac{1}{c} \int_{LE}^{TE} (c_{p,u} - c_{p,l}) dy$$

หรือ

$$C_d = \frac{1}{c} \int_{LE}^{TE} c_{p,u} dy - \frac{1}{c} \int_{LE}^{TE} c_{p,l} dy \quad (3.108)$$

ในพิกัด (r, θ) $y = R \sin \theta$ และ $dy = R \cos \theta d\theta$ นำไปแทนในสมการ (3.108) พร้อมกับ $c = 2R$ จะได้

$$C_d = \frac{1}{2} \int_{\pi}^0 c_{p,u} \cos \theta d\theta - \frac{1}{2} \int_{\pi}^{2\pi} c_{p,l} \cos \theta d\theta \quad (3.109)$$

ขีดจำกัดของการอินทิเกรตในสมการ (3.109) มาจากการที่เราอินทิเกรตเทอมแรกตามผิวบน จากซ้ายหน้าไปซ้ายหลัง เพราะฉะนั้นมุม θ จะเริ่มจาก π และลดลงจนเป็น 0 ที่ซ้ายหลัง ส่วนในเทอมที่สองการอินทิเกรตจะเกิดตามผิวด้านล่าง เพราะฉะนั้นมุม θ จะเริ่มจาก π และเพิ่มขึ้นเป็น 2π ที่ซ้ายหลัง แต่ $c_{p,u}$ และ $c_{p,l}$ ในสมการมีค่าเดียวกันคือ c_p ตามสมการ (3.107)

เขียนสมการ (3.109) ใหม่เป็น

$$C_d = -\frac{1}{2} \int_0^{\pi} c_{p,u} \cos \theta d\theta - \frac{1}{2} \int_{\pi}^{2\pi} c_{p,l} \cos \theta d\theta$$

$$C_d = -\frac{1}{2} \int_0^{2\pi} c_p \cos \theta d\theta \quad (3.110)$$

เมื่อแทนค่า c_p ตามสมการ (3.107) แล้วอินทิเกรต พร้อมความสัมพันธ์

$$\int_0^{2\pi} \cos \theta d\theta = 0 \quad (3.111a)$$

$$\int_0^{2\pi} \sin \theta \cos \theta d\theta = 0 \quad (3.111b)$$

$$\int_0^{2\pi} \sin^2 \theta \cos \theta d\theta = 0 \quad (3.111c)$$

ซึ่งทำให้

$$C_d = 0 \quad (3.112)$$

สมการ (3.112) ยืนยันข้อสรุปข้างต้นของเราที่ว่าแรงต้านมีค่าเท่ากับศูนย์ โดยไม่ต้องคำนึงว่าการไหลมีการหมุนวนหรือไม่

สำหรับแรงยกบนทรงกระบอก อาจคำนวณได้ในลักษณะเดียวกันจากสมการ (1.32) เมื่อ $C_f = 0$

$$C_l = C_n = \frac{1}{c} \int_{LE}^{TE} c_{p,l} dx - \frac{1}{c} \int_{LE}^{TE} c_{p,u} dx \quad (3.113)$$

ในพิกัดเชิงมุม $x = R \cos \theta$ และ $dx = -R \sin \theta d\theta$ นำไปแทนค่าในสมการ (3.113) จะได้

$$C_l = -\frac{1}{2} \int_{\pi}^0 c_{p,l} \sin \theta d\theta + \frac{1}{2} \int_{\pi}^{2\pi} c_{p,u} \sin \theta d\theta$$

เช่นเดียวกับสมการ (3.109) $c_{p,l}$ และ $c_{p,u}$ มีค่าเดียวกันตามสมการ (3.107) ดังนั้น

$$c_l = -\frac{1}{2} \int_0^{2\pi} c_p \sin \theta d\theta \quad (3.114)$$

แทนสมการ (3.107) ในสมการ (3.114) และใช้ความสัมพันธ์

$$\int_0^{2\pi} \sin \theta d\theta = 0 \quad (3.115a)$$

$$\int_0^{2\pi} \sin^2 \theta d\theta = \pi \quad (3.115b)$$

$$\int_0^{2\pi} \sin^3 \theta d\theta = 0 \quad (3.115c)$$

จะได้คำตอบ

$$c_l = \frac{\Gamma}{RV_\infty} \quad (3.116)$$

จากนิยามของ c_l แรยยกต่อหน่วยความยาว L' หาได้จาก

$$L' = q_\infty S c_l = \frac{1}{2} \rho_\infty V_\infty^2 S c_l \quad (3.117)$$

ในที่นี้พื้นที่อ้างอิง $S = 2R(1)$ ดังนั้นเมื่อรวมสมการ (3.116) และ (3.117) จะได้

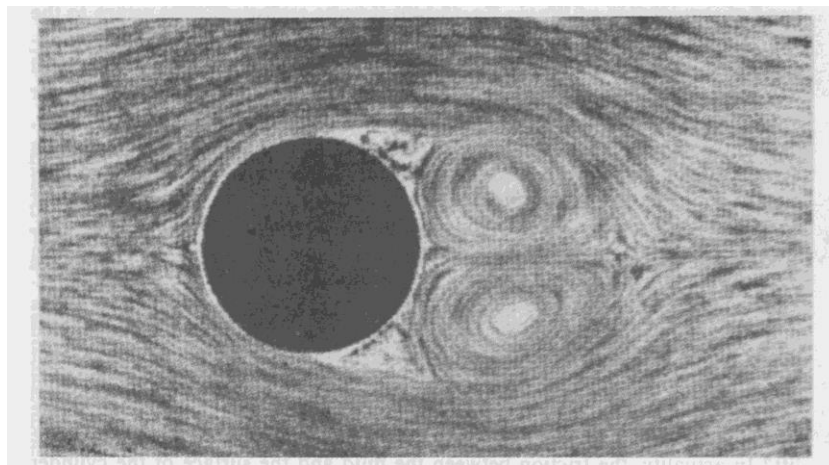
$$L' = \frac{1}{2} \rho_\infty V_\infty^2 2R \frac{\Gamma}{RV_\infty}$$

หรือ

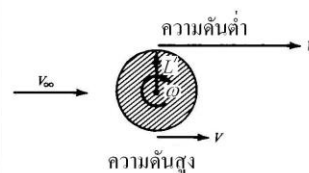
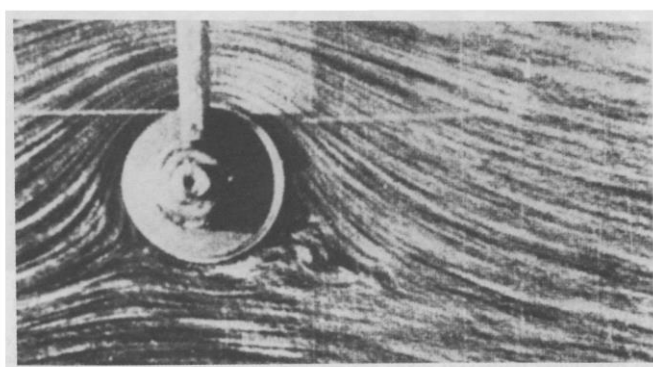
$$L' = \rho_\infty V_\infty \Gamma \quad (3.118)$$

สมการ (3.118) ให้ค่าแรงยกต่อหน่วยความยาวของทรงกระบอกกลมที่มีการหมุนวน Γ รอบตัว และเป็นผลลัพธ์ที่ง่าย สมการบอกเราว่า “แรงยกต่อหน่วยความยาวจะเป็นสัดส่วนโดยตรงกับค่าการหมุนวน” สมการนี้เป็นสมการหลักที่มีความหมายมากในทฤษฎีอากาศพลศาสตร์ สมการนี้รู้จักกันในชื่อ “ทฤษฎีของคุตต้าและจูคอฟสกี” (Kutta – Joukowski theorem) ตามชื่อนักคณิตศาสตร์ชาวเยอรมัน “M. Willheim Kutta” และนักฟิสิกส์ชาวรัสเซีย “Nikolai E. Joukowski” ที่ต่างคนต่างเป็นผู้ค้นพบความสัมพันธ์ตามสมการ (3.119) ในช่วงต้นศตวรรษที่ 20

สิ่งที่เชื่อมโยงระหว่างการใช้ทฤษฎีกับความเป็นจริง อาจพิจารณาได้ดังต่อไปนี้ การทำนายแรงต้านที่เกิดขึ้นว่ามีค่าเท่ากับศูนย์แสดงความผิดพลาดของทฤษฎีที่จะใช้คำนวณแรงต้าน เนื่องจากผลของความหนืดทำให้เกิดแรงเสียดทานที่ผิวและการไหลแยกตัว ซึ่งจะทำให้เกิดแรงต้านขึ้นเสมอ และเป็นเรื่องที่เราจะศึกษากันต่อไป ในทางกลับกันการทำนายการเกิดแรงยก



รูป 3.23 การไหลผ่านทรงกระบอกในความเป็นจริง (Anderson, 2016)



รูป 3.24 การเกิดแรงยกบนทรงกระบอกหมุน (Anderson, 2016)

โดยสมการ (3.119) จะใกล้เคียงความจริงมาก การทดลองในอุโมงค์ลมสามารถยืนยันความจริงอันนี้ได้เป็นอย่างดี การทดลองกับทรงกระบอกที่ไม่หมุน แสดงลักษณะการไหลที่คล้ายกับรูป 3.23 เส้นกระแสด้านหน้าของการไหลคล้ายกับที่ทำนายไว้ทางทฤษฎี อย่างไรก็ตาม ผลของความหนืดทำให้การไหลเกิดการแยกตัวจากผิวด้านหลังของทรงกระบอก ทำให้แรงต้านเกิดขึ้น แต่การไหลยังมีลักษณะสมมาตรกันระหว่างครึ่งบนและครึ่งล่าง ซึ่งทำให้ผลรวมของแรงยกเป็นศูนย์ แต่ถ้าให้ทรงกระบอกหมุนรอบแกน รูปแบบของการไหลคล้ายกับรูป 3.22 ข, ค และ ง จะเกิดขึ้น ซึ่งคล้ายกับที่ทำนายไว้โดยทฤษฎี ขึ้นกับขนาดของการหมุน และที่สำคัญยิ่งคือสามารถวัดแรงยกได้ คำถามที่เกิดขึ้นคือเกิดอะไรขึ้นบนทรงกระบอก ทำไมการหมุนทรงกระบอกจึงทำให้เกิดแรงยกขึ้นได้ ในความเป็นจริง แรงเสียดทานที่ผิวทรงกระบอกจะลากของไหลที่อยู่ติดผิวให้เคลื่อนที่ไปด้วยความเร็วเท่ากับผิวทรงกระบอกที่หมุนอยู่ เมื่อรวมเข้ากับความเร็วของกระแสที่ไหลอ้อมผิวทรงกระบอกด้านบน จะทำให้บริเวณนี้มีความเร็วเพิ่มขึ้นมากกว่าปกติ แต่ด้านล่างทรงกระบอกจะลากให้กระแสนี้มีความเร็วสวนกลับกับกระแสที่ไหลอ้อมผิวทรงกระบอกด้านล่าง และทำให้ความเร็วลดลงน้อยกว่าปกติ ตามที่แสดงใน

รูป 3.24 ความเร็วเหล่านี้เป็นความเร็วที่อยู่ที่ยอดนอกของชั้นขีดผิวบนผิวทรงกระบอก จากสมการเบอร์นูลลี เมื่อความเร็วเพิ่มขึ้นความดันจะลดลง ดังนั้นจากรูป 3.24 ความดันบริเวณส่วนบนของทรงกระบอกจะต่ำกว่าความดันบริเวณครึ่งล่างของทรงกระบอก ความไม่สมดุลของความดันด้านบนด้านล่างนี้ทำให้เกิดแรงลัพธ์ที่มีทิศทางชี้ขึ้นด้านบนหรือแรงยกเกิดขึ้นนั่นเอง

แนวคิดที่ได้อธิบายมาทั้งหมดข้างต้นอาจนำไปใช้อธิบายปรากฏการณ์ที่เกิดขึ้นกับทรงกลมที่มีการหมุนปั่นรอบแกน ซึ่งเป็นคำอธิบายว่าทำไมลูกกอล์ฟหรือลูกบอลที่ปั่นรอบตัวจึงมีการวิ่งเป็นเส้นโค้งได้ ปรากฏการณ์นี้เป็นผลมาจากการไหลผ่านที่มีรูปแบบไม่สมมาตรผ่านวัตถุที่มีการหมุนรอบแกน และสร้างแรงทางอากาศพลศาสตร์ในทิศทางตั้งฉากกับเวกเตอร์ของความเร็วเชิงมุม ปรากฏการณ์นี้เรียกว่า “Magnus effect” ตั้งชื่อตามวิศวกรชาวเยอรมันที่ เป็นผู้สังเกตและให้คำอธิบายปรากฏการณ์นี้

มีเรื่องน่าสนใจคือ ทรงกระบอกกลมที่หมุนด้วยความเร็วจะสามารถสร้างแรงยกได้มากกว่าปีกอากาศยานที่มีพื้นที่ปีกเท่ากันหลายเท่า อย่างไรก็ตามแรงต้านบนทรงกระบอกจะมีค่ามากกว่าปีกที่ได้รับการออกแบบมาเป็นอย่างดีหลายเท่าเช่นกัน นอกจากนั้นกลไกในการสร้างการหมุนให้ทรงกระบอกยังมีน้ำหนักมาก เป็นผลให้การนำ “Magnus effect” มาใช้งานในด้านการบินอย่างจริงจังจึงไม่ปรากฏให้เห็นเป็นรูปธรรม

ตัวอย่าง 3.10 พิจารณาการไหลผ่านทรงกระบอกกลมที่เกิดแรงยก ถ้าค่าสัมประสิทธิ์แรงยกเป็น 5 จงคำนวณความดันที่มีค่าสัมประสิทธิ์ต่ำสุด

วิธีทำ จากรูปที่ 3.21 สังเกตว่าความเร็วสูงสุดในกรณีไม่เกิดแรงยกจะเป็น $2V_\infty$ และเกิดขึ้นที่ด้านบนสุดและล่างสุดของทรงกระบอก เมื่อออร์เทคในรูป 3.21 ถูกรวมเข้าในสนามการไหลทิศทางของความเร็วจะอยู่ในแนวสัมผัสเส้นรอบวง และอยู่ในแนวเดียวกับความเร็วด้านบนสุดของทรงกระบอก แต่จะอยู่ในทิศทางสวนกับความเร็วที่ด้านล่างสุดของทรงกระบอก ดังนั้นตำแหน่งที่ความเร็วสูงสุดสำหรับกรณีเกิดแรงยกจะเกิดที่จุดบนสุดของทรงกระบอก และมีความเร็วเท่ากับความเร็ว $-2V_\infty$ และ $-\frac{\Gamma}{2\pi R}$ รวมกัน (เครื่องหมายลบแสดงทิศทางความเร็วที่สวนทางกับ $+V_\infty$) นั่นคือ

$$V = -2V_\infty - \frac{\Gamma}{2\pi R} \quad (i)$$

แต่

$$\begin{aligned} L' &= \rho_\infty V_\infty \Gamma \\ c_l &= \frac{L'}{\frac{1}{2} \rho_\infty V_\infty^2 (2R)} = \frac{\rho_\infty V_\infty \Gamma}{\rho_\infty V_\infty^2 R} \\ &= \frac{\Gamma}{R V_\infty} = 5 \end{aligned}$$

$$\therefore \frac{\Gamma}{R} = 5V_\infty \quad (ii)$$

แทนสมการ (ii) ใน (i) จะได้

$$\begin{aligned} V &= -2V_\infty - \frac{5}{2\pi}V_\infty \\ &= -2.796 V_\infty \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore \text{จะได้} \quad c_p &= 1 - \left(\frac{V}{V_\infty} \right)^2 \\ &= 1 - (2.796)^2 \\ &= -6.82 \end{aligned} \quad \text{ตอบ}$$

ตัวอย่าง 3.10 ต้องการแสดงให้เห็นว่า สำหรับการไหลไร้ความหนืดไร้การอัดตัวการแจกแจงของ c_p บนผิววัตถุจะขึ้นอยู่กับรูปร่างและตำแหน่งจัดวางของวัตถุเท่านั้น คุณสมบัติของกระแส เช่น ความเร็ว ความหนาแน่น จะไม่เข้ามาเกี่ยวข้อง เช่น การแจกแจง c_p รอบทรงกระบอกที่ไม่มีแรงยก $c_p = 1 - 4 \sin^2 \theta$ นั่นคือ c_p จะเป็นฟังก์ชันของ θ เท่านั้น แต่ในกรณีที่มีแรงยกการแจกแจง c_p จะเป็นฟังก์ชันของตัวแปรเพิ่มอีกตัวหนึ่งคือ c_l ในตัวอย่างนี้มีเพียงค่า c_l เท่านั้นที่โจทย์กำหนดให้ แต่ก็เพียงพอที่จะกำหนดรูปแบบการไหลที่แน่นอนได้

ตัวอย่าง 3.11 สำหรับการไหลในตัวอย่างที่ 3.10 จงคำนวณหาตำแหน่งของจุดชะงัก และตำแหน่งบนผิวที่ความดันเท่ากับความดันกระแสอิสระ

วิธีทำ จากสมการ (3.105) ตำแหน่งของจุดชะงัก อยู่ที่

$$\theta = \sin^{-1} \left(-\frac{\Gamma}{4\pi V_\infty R} \right)$$

จากตัวอย่างที่ 3.10

$$\frac{\Gamma}{RV_\infty} = 5$$

ดังนั้น

$$\begin{aligned} \theta &= \sin^{-1} \left(\frac{5}{4\pi} \right) \\ &= 203.4^\circ \text{ และ } 336.6^\circ \end{aligned}$$

หาตำแหน่งที่ $p = p_\infty$ โดยเริ่มจาก

$$c_p = 1 - 1 - \left(\frac{V}{V_\infty} \right)^2$$

เมื่อ

$$V = -2V_\infty \sin \theta - \frac{\Gamma}{2\pi R}$$

ดังนั้น

$$c_p = \left(1 - \frac{\left(-2V_\infty \sin \theta - \frac{\Gamma}{2\pi R} \right)^2}{V_\infty^2} \right)$$

แต่จากตัวอย่าง 3.10 $\frac{\Gamma}{RV_\infty} = 5$ ดังนั้น

$$\begin{aligned} c_p &= 1 - 4\sin^2\theta - \frac{10}{\pi}\sin\theta - \left(\frac{5}{2\pi}\right)^2 \\ &= 0.367 - 3.183\sin\theta - 4\sin^2\theta \end{aligned}$$

ที่ $p = p_\infty$ $c_p = 0$ เพราะฉะนั้น

$$0 = 0.367 - 3.183\sin\theta - 4\sin^2\theta$$

แก้สมการกำลังสองสมบูรณ์ ได้

$$\begin{aligned} \sin\theta &= \frac{3.183 \pm \sqrt{(3.183)^2 + 5.872}}{-8} \\ &= -0.897, 0.102 \end{aligned}$$

จะได้

$$\theta = 243.8^\circ \text{ และ } 296.23^\circ$$

และ

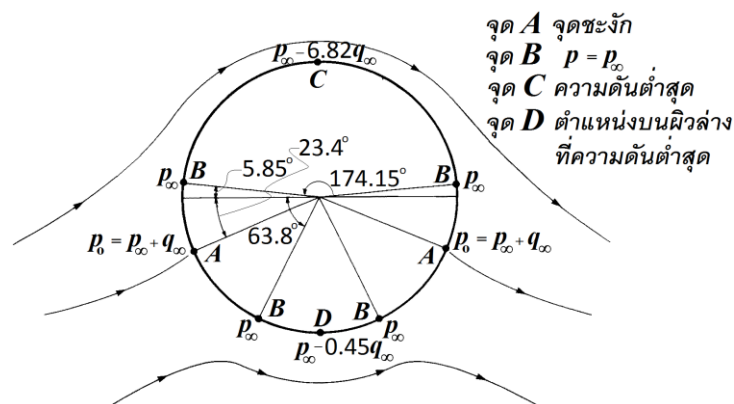
$$\theta = 5.85^\circ \text{ และ } 174.1^\circ$$

จะมีตำแหน่ง 4 ตำแหน่งบนผิวทรงกระบอกที่ $p = p_\infty$ ตามที่แสดงในรูป 3.25 พร้อมจุด
ซังก์ ตำแหน่งที่มีความดันต่ำสุดเกิดขึ้นที่ด้านบนของทรงกระบอกและมีค่า $p = p_\infty - 6.82q_\infty$
ทางด้านผิวล่างตำแหน่งความดันเกิดขึ้นที่ $\theta = \frac{3\pi}{2}$ ที่ตำแหน่งนี้ ค่าความดันจะเป็น

$$\begin{aligned} c_p &= 0.367 - 3.183\sin\frac{3\pi}{2} - 4\sin^2\frac{3\pi}{2} \\ &= 0.367 + 3.183 - 4 = -0.45 \end{aligned}$$

ดังนั้น ที่จุดล่างสุดของทรงกระบอก $p = p_\infty - 0.45 q_\infty$

ตอบ



รูป 3.25 ค่าของความดัน ณ จุดต่าง ๆ บนผิวทรงกระบอก กรณีเกิดแรงยก

และมีการหมุนวน ค่าความดันคิดตามกรณีตัวอย่าง 3.10

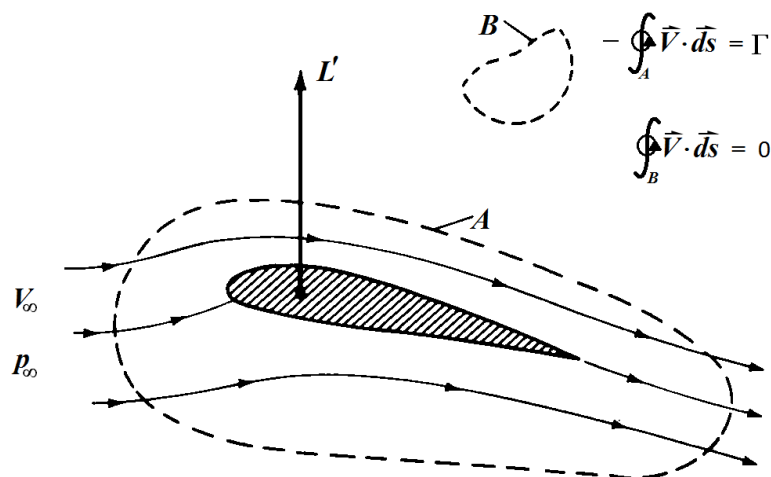
3.15 ทฤษฎีของคุดต้าและจูโควสกี (Kutta-Joukowski Theorem) : การกำเนิดแรงยก

ถึงแม้สมการ (3.118) จะมีที่มาจากพิจารณาการไหลผ่านทรงกระบอกกลม แต่โดยความเป็นจริงแล้วสมการจะนำไปใช้กับทรงกระบอกที่มีหน้าตัดรูปอื่นๆ เช่น แพนอากาศ ได้ด้วยเช่นกัน ถ้าเราพิจารณาการไหลไร้การอัดตัวผ่านรูปแพนอากาศตามที่แสดงในรูป 3.26 ให้โค้ง A เป็นโค้งปิดใดๆ ล้อมรอบแพนอากาศ ถ้าจะเกิดแรงยกขึ้นบนแพนอากาศแล้ว สนามของความเร็วรอบแพนอากาศจะต้องมีลักษณะที่การอินทิเกรตสนามของความเร็วรอบเส้นโค้งจะต้องมีค่าอันหนึ่งเสมอ หรือจะต้องมีค่าการหมุนวน (Circulation) รอบแพนอากาศ (Katz & Plotkin, 2001) นั่นเอง ค่าการหมุนวนรอบโค้ง A ได้จาก

$$\Gamma = -\oint_A \vec{V} \cdot d\vec{s}$$

และแรงยกต่อหน่วยความยาว L' บนแพนอากาศ จะได้จากทฤษฎีของคุดต้าและจูโควสกี ตามสมการ (3.118)

$$L' = \rho_\infty V_\infty \Gamma \quad (3.118)$$



รูป 3.26 ค่าการหมุนวนรอบแพนอากาศ (Katz & Plotkin, 2001)

ซึ่งแสดงให้เห็นความสำคัญของแนวคิดเรื่องการหมุนวนที่กำหนดไว้ในหัวข้อ 2.13 ทฤษฎีของ คุดต้าและจูโควสกี กล่าวว่า “แรงยกต่อหน่วยความยาวบนวัตถุรูปสองมิติจะเป็นสัดส่วนโดยตรงกับค่าการหมุนวนรอบวัตถุนั้น” การพิสูจน์ว่าสมการ (3.119) เป็นจริงสำหรับรูปหน้าตัดอื่นนอกจากรูปทรงกระบอกกลมจะไม่นำมากล่าวในที่นี้ เพราะต้องอาศัยการพิสูจน์โดยใช้ทฤษฎีตัวแปรเชิงซ้อนซึ่งอยู่นอกเหนือขอบเขตของเรา สำหรับผู้ที่สนใจสามารถค้นคว้าได้จากหนังสืออ้างอิง

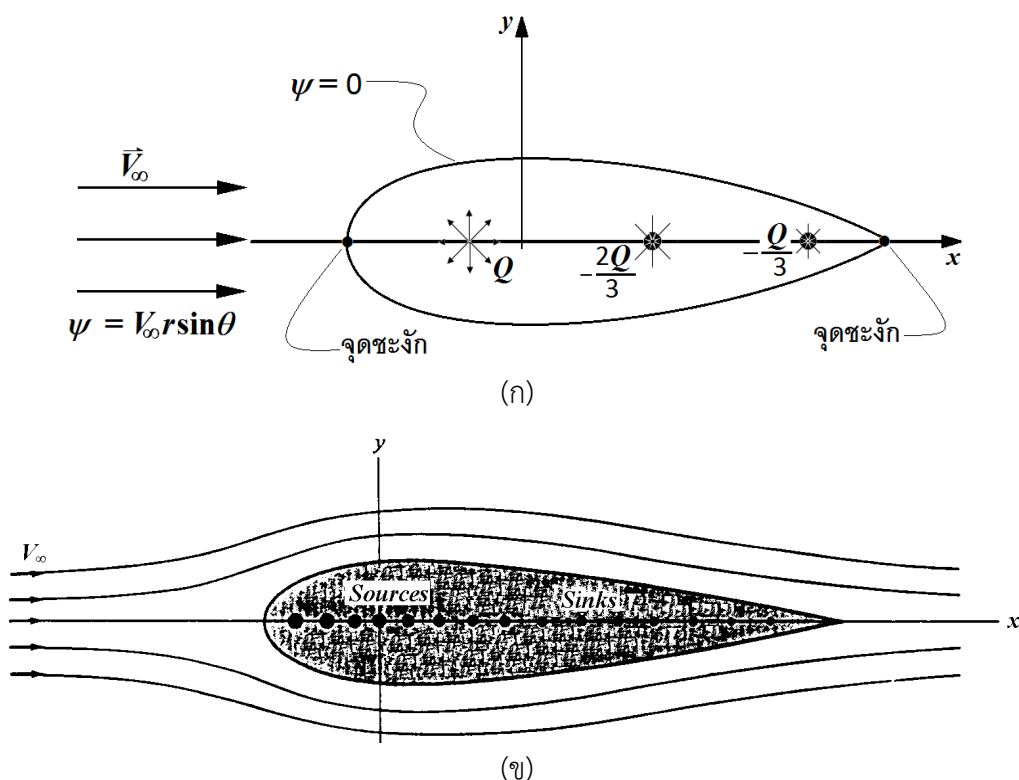
ในหัวข้อก่อนนี้ การไหลผ่านทรงกระบอกที่เกิดแรงยกได้มาจากการรวมการไหลเอกรูป จุดซ้อนและวอร์เทก คงจำได้ว่าการไหลทั้ง 3 แบบนี้เป็นการไหลไร้การหมุนทุกจุด ยกเว้นที่จุดวอร์เทกซึ่งมีค่าวอร์ทิซิตี (Vorticity) เป็น ∞ ดังนั้นการไหลผ่านทรงกระบอกที่เกิดแรงยกในรูป 3.21 จะเป็นการไหล

ไร้การหมุนทุกจุดยกเว้นที่จุดกำเนิด ถ้าเราหาค่าของการหมุนรอบโค้งใด ๆ ที่ไม่ได้ล้อมรอบจุดกำเนิดไว้ ผลที่จะได้คือการหมุนรอบโค้งนั้นจะเท่ากับศูนย์ เฉพาะเมื่อเราเลือกโค้งที่รวมจุดกำเนิด (จุดวอร์เทค) ไว้ภายในเท่านั้นที่ค่าการหมุนจะไม่เท่ากับศูนย์ และมีค่าเท่ากับกำลังของวอร์เทค การพิจารณาอย่างเดียวกันนำมาใช้กับการไหลผ่านแผนอากาศในรูป 3.26 การไหลโดยรอบแผนอากาศจะเป็น การไหลไร้การหมุน ดังนั้นค่าการหมุนรอบโค้งปิดที่ไม่ได้ล้อมรอบแผนอากาศ (เช่น โค้ง B ในรูป) จะเป็นศูนย์ แต่ในทางกลับกันถ้าเลือกโค้งที่ล้อมรอบแผนอากาศไว้ภายใน (โค้ง A ในรูป) ค่าของการหมุนจะมีค่าจำกัดค่าหนึ่ง ในบทที่ 4 เราจะแสดงให้เห็นว่าการไหลผ่านแผนอากาศอาจแทนได้ ด้วยการไหลผ่านวอร์เทคจำนวนมากที่มีการแจกแจงบนผิวแผนอากาศหรือบรรจุอยู่ภายใน วอร์เทคเหล่านี้จะมีกำลังที่รวมกันเท่ากับค่าการหมุนรอบแผนอากาศนั้น ประเด็นสำคัญอยู่ที่ว่าในทฤษฎีของคุดต้าและจูโควสกีนั้นค่า Γ ในสมการ (3.118) จะต้องคิดจากโค้งปิดที่ล้อมรอบรูปทรงของวัตถุไว้ภายใน ส่วนรูปร่างของโค้งจะเป็นอย่างไรก็ได้

ในขั้นนี้เราลองทบทวนประเด็นที่ได้พิจารณาผ่านมา นิยามของการหมุน และสมการ (3.118) ที่ใช้หาค่าแรงยกซึ่งถือได้ว่าเป็นส่วนสำคัญของทฤษฎีการเกิดแรงยกทางอากาศพลศาสตร์ และเป็นจุดเปลี่ยนสำคัญในการศึกษาการเกิดแรงยก อย่างไรก็ตามก็ควรต้องระลึกไว้ด้วยว่าทฤษฎีการเกิดแรงยกจากการหมุนวนเป็นเพียงวิธีคิดแบบหนึ่งที่ใช้สำหรับอธิบายการกำเนิดแรงยกบนรูปทรงอากาศพลศาสตร์ แต่ในความเป็นจริงต้องคิดไว้เสมอว่าสิ่งที่เกิดขึ้นจริงรอบวัตถุคือความดันและแรงเค้นเฉือนซึ่งทำให้เกิดแรงกระทำขึ้นบนวัตถุ ทฤษฎีของคุดต้าและจูโควสกีเป็นเพียงอีกวิธีหนึ่งซึ่งแสดงถึงผลที่เกิดขึ้นเนื่องจากการแจกแจงความดันรอบผิววัตถุที่ประกอบด้วยเครื่องมือพิเศษต่างๆ ที่เรานำมาใช้ทางคณิตศาสตร์สำหรับการวิเคราะห์การไหลไร้ความหนืดไร้การอัดตัว และถ้าจะกล่าวกันจริงๆ แล้วตัวทฤษฎีหรือสมการ (3.118) ก็ได้มาจากการพิจารณาการแจกแจงความดันรอบผิววัตถุแล้วนำมาอินทิเกรตหาผลลัพธ์นั่นเอง ดังนั้นแทนที่จะกล่าวว่า การหมุนวนทำให้เกิดแรงยกซึ่งไม่น่าจะต้องเราควรกล่าวว่าแรงยกเป็นผลมาจากความไม่สมดุลของความดันที่เกิดขึ้นโดยรอบผิววัตถุ ซึ่งความไม่สมดุลนี้ชี้ให้เห็นได้ทางคณิตศาสตร์ว่ามีหรือไม่มีอยู่โดยดูจากค่าการหมุนวนรอบวัตถุ และความสัมพันธ์ระหว่างการแจกแจงความดันรอบผิววัตถุ (ซึ่งแน่นอนทำให้เกิดแรงยก) กับการหมุนวนจะเป็นไปตามสมการ (3.118) นั่นเอง เพียงแต่ว่าในทฤษฎีการไหลไร้ความหนืดไร้การอัดตัว การกำหนดค่าการหมุนวนรอบผิววัตถุทำได้ง่ายกว่าการหารายละเอียดของการแจกแจงความดันรอบผิววัตถุมาก ดังนั้นการกำหนดแรงยกโดยทฤษฎีของคุดต้าและจูโควสกี จึงเป็นที่นิยมและใช้งานอย่างกว้างขวาง ผลที่ตามมาก็คือ การวิเคราะห์การเกิดแรงยกบนวัตถุสองมิติสำหรับการไหลไร้ความหนืดไร้การอัดตัว จะมีเป้าหมายอยู่ที่การคำนวณหาค่าการหมุนวนรอบวัตถุให้ได้ หลังจากนั้นจะสามารถคำนวณแรงยกได้จากสมการ (3.118) ปัญหาจากนี้ไปของเราจึงอยู่กับคำถามที่ว่า การกำหนดค่าการหมุนวนรอบวัตถุจะทำได้อย่างไร

3.16 การแจกแจงแหล่งกำเนิดการไหลบนเส้น (Line source distribution)

แนวคิดที่น่าสนใจของการรวมการไหลพื้นฐานเข้าด้วยกันคือ การนำแหล่งกำเนิดการไหลหรือซอร์ส (และซิงค์) มาวางเรียงกันตามแนวเส้นตรงหรือเส้นโค้ง ในหัวข้อ 3.10 และ 3.12 เราได้แสดงให้เห็นแล้วว่าการนำมาซ้อนกันของการไหลเอกรูปกับการไหลซอร์ส มีผลเป็นการไหล 2 มิติผ่านรูปทรงเปิดตามรูป 3.11 และเมื่อนำซิงค์ที่มีกำลังเท่ากันไปวางเรียงต่อกันจากซอร์สจะเกิดผลเป็นการไหลผ่านรูปไข่ของแรนกิน และหากจัดให้ซอร์สกับซิงค์เลื่อนเข้าห่อกันจนฟอร์มตัวเป็นจุดซ้อนรูปไข่จะกลายเป็นทรงกระบอกกลมตามที่แสดงในรูป 3.15 ดังนั้นอาจสรุปเป็นแนวทางได้ว่าถ้าให้การไหลเอกรูปไหลผ่านจุดซ้อนที่วางเรียงกัน หรือไหลผ่านกลุ่มของซอร์สและซิงค์ที่วางเรียงกันและมีกำลังรวมกันเป็นศูนย์ ก็อาจสร้างการไหลผ่านรูปทรงใดๆ ได้ รูป 3.27 เป็นตัวอย่างของแนวความคิดดังกล่าว

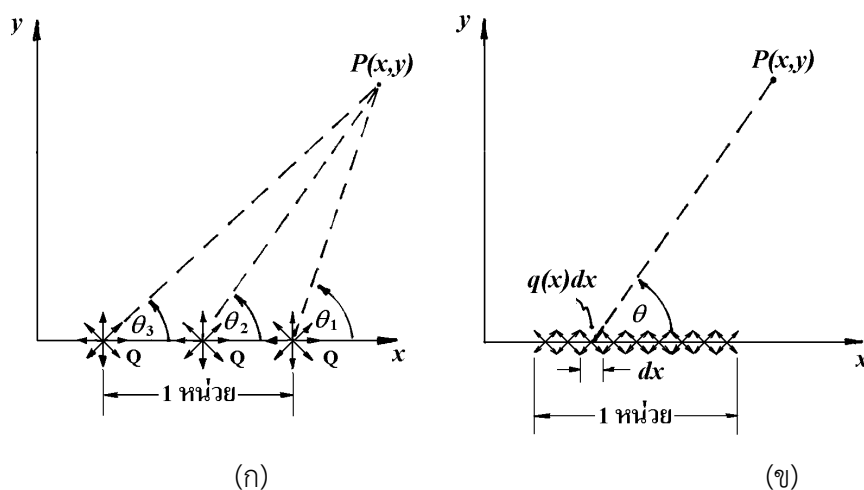


รูป 3.27 การไหลเอกรูปผ่านกลุ่มซอร์ส ซิงค์ ที่มีกำลังรวมเป็นศูนย์ (Katz & Plotkin, 2001)

จากรูป 3.12 ในหัวข้อ 3.10 แสดงเส้นกระแสที่ผ่านจุดชะงักของการไหลเอกรูปผ่านซอร์ส ซิงค์ที่วางคู่กันและมีกำลังเท่ากัน เป็นรูปไข่ของแรนกิน ถ้าแบ่งซิงค์ที่จัดวางคู่กับซอร์สเป็นสองส่วน และวางไว้ในตำแหน่งเรียงกันโดยให้กำลังรวมของซอร์ส ซิงค์ ยังเป็นศูนย์ เส้นกระแสที่ผ่านจุดชะงักจะเปลี่ยนเป็นรูปร่างคล้ายหยดน้ำมากขึ้นตามรูป 3.27 ก คงสังเกตว่าเราไม่ได้ถูกจำกัดให้ใช้จำนวนซอร์สและซิงค์เดียว (Discrete source & sink) เป็นจำนวนใดจำนวนหนึ่ง ดังนั้นในแง่ทฤษฎีเราจะ

ใช้ ซอร์ส ชิงค์ จำนวนเท่าใดก็ได้วางเรียงตามแนวแกน x และถ้าจัดให้ขนาดและตำแหน่งของซอร์สและชิงค์เหมาะสม (และแน่นอนต้องมีกำลังรวมกันเป็นศูนย์) เราจะได้รูปปิดของวัตถุที่มีลักษณะสมมาตรกับแกน x ในลักษณะเดียวกันรูปแผนอากาศสมมาตร รูปหยดน้ำ ฯลฯ ตามรูป 3.27 ข ซึ่งจะมีรูปร่างขึ้นกับการแจกแจงหรือการกระจายของซอร์สและชิงค์ บนแกน x ขอให้สังเกตอีกอย่างหนึ่งว่าการใช้จุดซ้อนที่มีกำลังต่างกันวางเรียงกันตามแกน x ในการไหลเอกรูปจะมีผลเกิดขึ้นในทำนองเดียวกัน เราจึงได้แนวคิดที่จะพิจารณาการไหลเอกรูปผ่านรูปทรงสมมาตรกับแกน x โดยการแทนรูปทรงใดๆ นั้นด้วยชุดของจุดเอกเทศ (ซอร์ส กับ ชิงค์ หรือ จุดซ้อน) บนแกน x

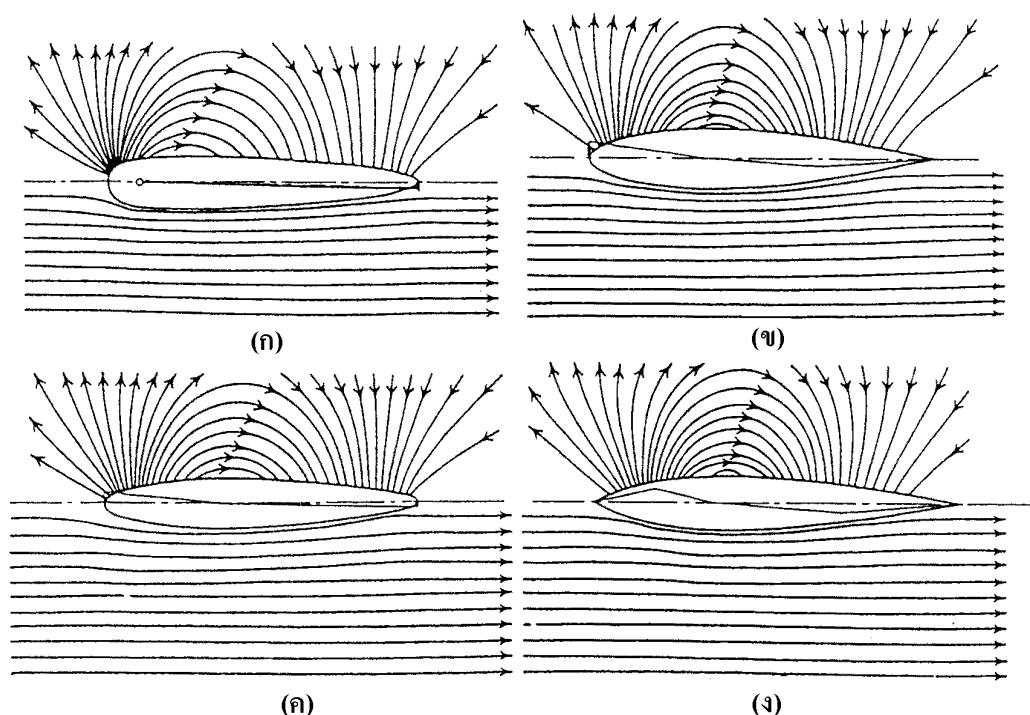
จากรูป 3.27 ข สังเกตว่าเพื่อให้ได้เส้นกระแสที่ผ่านจุดเชิงักเป็นรูปทรงสมมาตรที่กำหนด เช่น รูปแผนอากาศสมมาตรแบบต่างๆ เราต้องแยกซอร์สและชิงค์ที่วางอยู่ในตำแหน่งต่างๆ ออกเป็นจำนวนมากหรือจริงๆ แล้ว จำนวนชิงกุลาริตี่เหล่านี้จะต้องมีจำนวนมากและเรียงกันแน่นอยู่บนแกน x ซึ่งนำไปสู่แนวคิด การกระจายซอร์สบนเส้น (Line source distribution)



รูป 3.28 แนวคิดการกระจายซอร์สบนเส้น (Katz & Plotkin, 2001)

สมมติให้มีซอร์สกำลัง Q 3 ตัวเรียงอยู่บนแกน x ในช่วงความยาว 1 หน่วยตามรูป 3.28 ก ถ้าเพิ่มจำนวนซอร์สในระยะ 1 หน่วยนี้ขึ้นโดยคงกำลังรวม $3Q$ ให้คงที่ไว้ ในขีดจำกัด จำนวนของซอร์สจะเพิ่มขึ้นจนนับไม่ถ้วนและเรียงกันแน่นในระยะหนึ่งหน่วย แต่กำลังของซอร์ส แต่ละตัวจะมีค่าน้อยลงจนเกือบเป็นศูนย์ ซึ่งแสดงในรูป 3.28 ข ในลักษณะนี้เรากล่าวว่ามีการแจกแจงซอร์สตามแกน x ในช่วงความยาว 1 หน่วยโดยที่มีกำลังต่อหน่วยความยาว หรือความหนาแน่นของซอร์ส เท่ากับ $3Q/1$ หน่วย เห็นได้ชัดว่าถ้าให้ $q(x)$ เป็นความหนาแน่นของซอร์ส กำลังของซอร์สที่เรียงอยู่ในช่วงความยาว dx จะเท่ากับ $q(x)dx$ ควรคำนึงไว้ด้วยว่ารูป 3.28 เป็นเพียงตัวอย่างที่ชี้ให้เห็นความหมายของความหนาแน่นของซอร์ส ในการนำไปใช้งานจริงค่าความหนาแน่นของซอร์ส $q(x)$ ที่แจกแจงอยู่ตามแกน x จะมีค่าเปลี่ยนแปลงไปตามตำแหน่ง x ในลักษณะต่างๆ อย่างไรก็ตามรูป 3.29 แสดงการ

ไหลเอกรูปผ่านซอร์ส บนแกน x ที่มีการแจกแจงในลักษณะต่าง ๆ ค่าการแจกแจงของซอร์สแสดงโดยกราฟบนแกน x (รูป 3.29 มีที่มาจากการไหลผ่านรูปทรงที่เกิดจากการหมุนรอบแกน และเกิดจากการเรียงกันของซอร์ส 3 มิติ แต่นำมาแสดงในที่นี้เป็นตัวอย่าง เพราะมีลักษณะแนวคิดแบบเดียวกับการไหลสองมิติที่พิจารณาอยู่) สังเกตว่าการแจกแจงของซอร์ส แบบต่างๆ จะให้รูปทรงวัตถุ (เส้นกระแสผ่านจุดชะงัก) ต่างกันไป และขอให้จำว่าการแจกแจงจะมีกำลังรวมของซอร์สเป็นศูนย์เสมอ ถึงจุดนี้เราอาจดำเนินการต่อไปตามแบบเดิมที่ผ่านมาคือ เปลี่ยนการแจกแจงซอร์สไปในแบบต่างๆ แล้วพยายามจับคู่เส้นกระแสผ่านจุดชะงัก (Stagnation streamline) ที่ได้กับรูปร่างของวัตถุที่เราสนใจ ซึ่งเป็นวิธีที่ไม่เหมาะสมในทางปฏิบัติ เพราะความสนใจจริงๆ ของเราอยู่ที่การพยายามหา ลักษณะการไหลผ่านรูปทรงที่กำหนด ดังนั้นปัญหาของเราก็คือการหาการแจกแจงซอร์สที่เหมาะสมกับรูปร่างที่กำหนดซึ่งจะมีวิธีการพิจารณากันดังต่อไปนี้



รูป 3.29 การไหลผ่านรูปทรงสมมาตรแบบต่าง ๆ โดยใช้การแจกแจงซอร์สบนเส้นตรง
เส้นกราฟบนเส้นคอร์ดแสดงการแจกแจงความหนาแน่นของซอร์ส $q(x)$ (Katz & Plotkin, 2001)

พิจารณาชุดของซอร์สที่วางเรียงกันตามแกน x ให้ q_i เป็นกำลังของซอร์สที่วางอยู่ที่ตำแหน่ง x_i ดังนั้น ฟังก์ชันกระแสของการไหลเอกรูปผ่านซอร์สชุดนี้จะเป็น

$$\psi = V_\infty y + \sum_i \frac{q_i}{2\pi} \tan^{-1} \frac{y}{x - x_i} \quad (3.119)$$

แกน x และแน่นอนว่าซอร์สทั้งหมดต้องบรรจุอยู่ภายในเส้นรอบรูปของวัตถุและประกอบด้วยซอร์สกับซิงค์ ที่มีกำลังรวมกันเป็นศูนย์

เพื่อจะได้สมการที่บอกความสัมพันธ์ระหว่างกำลังของซอร์สกับรูปทรงของวัตถุ เราจัดให้ค่า ψ เท่ากับค่าที่จุดชะงักตามที่เรากำหนดมาเพื่อหาสมการของเส้นกระแสที่ผ่านจุดชะงัก โดยประเมินค่า ψ ที่จุดชะงัก ซึ่งในปัญหาของรูปสมมาตรควรจะอยู่บนแกน x จากรูป 3.31 สำหรับ การไหลเอกรูปผ่านการแจกแจงซอร์สบนแกน x จุดชะงักด้านหน้าและจุดชะงักด้านหลังของซอร์สทุกตัวจะอยู่ที่

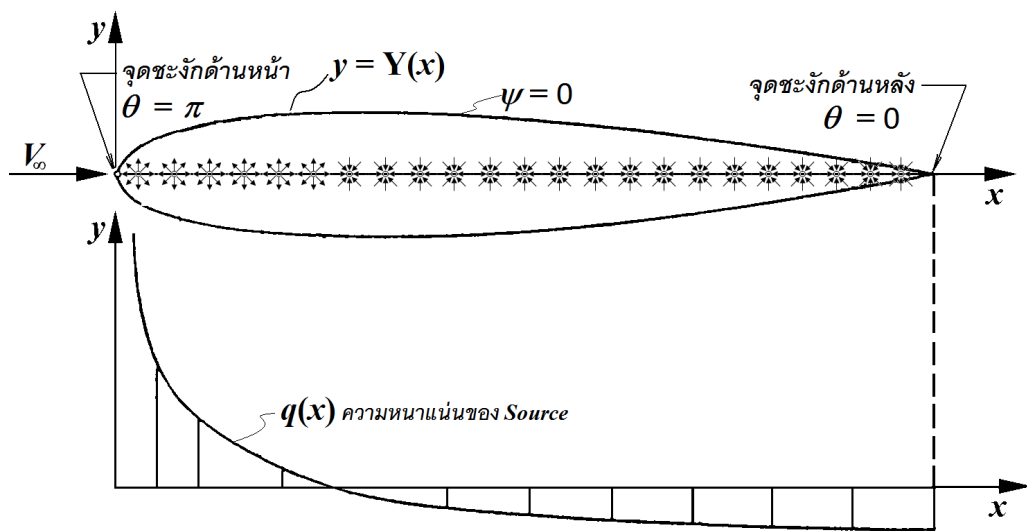
$$\tan^{-1}\left(\frac{y}{x-t}\right) = \pi \quad \text{และ} \quad \tan^{-1}\left(\frac{y}{x-t}\right) = 0$$

แทนค่า $\theta = \pi$ และ $\theta = 0$ ลงในสมการ (3.120b) และจุดชะงักอยู่บนแกน x คือ $y = 0$ จะได้

$$\psi = 0 = \int_0^c \frac{q(t)dt}{2\pi} \pi \quad (3.122a)$$

และ
$$\psi = 0 = \int_0^c \frac{q(t)dt}{2\pi} \cdot 0 \quad (3.122b)$$

สำหรับจุดชะงักด้านหน้าและด้านหลังตามลำดับ



รูป 3.31 จุดชะงักด้านหน้าและด้านหลังของการไหลเอกรูปผ่านรูปทรงสมมาตร

จากสมการ (3.122b) ψ จะมีค่าเท่ากับ 0 ที่จุดชะงักด้านหลัง (ที่ $\theta = 0$) ดังนั้นค่าของฟังก์ชัน ψ ของเส้นกระแสผ่านจุดชะงักคือ

$$\psi[x, Y(x)] = 0$$

ถ้าแทน $\psi = 0$ และ $y = Y(x)$ ในสมการ(3.120a) จะได้ความสัมพันธ์ระหว่างกำลังของซอร์สกับรูปร่างของวัตถุ

$$0 = V_\infty Y(x) + \frac{1}{2\pi} \int_0^c q(t) \tan^{-1} \frac{Y(x)}{x-t} dt \quad (3.123)$$

สังเกตด้วยว่าในสมการ (3.122a) เพราะว่า ψ ต้องเท่ากับศูนย์ที่จุดชะงักด้านหน้า ($\theta = \pi$) เช่นกัน ดังนั้นเราจะได้จากสมการว่ากำลังรวมของซอร์สต้องเป็นศูนย์

$$\int_0^c q(t) dt = 0 \quad (3.124)$$

ซึ่งไม่น่าแปลกใจเพราะว่าเรากำลังพิจารณาชุดของซอร์สที่แทนโค้งรูปปิด ดังนั้นผลรวมของกำลังของซอร์สจะต้องเป็นศูนย์ สมการ (3.124) เพียงแต่เป็นผลทางคณิตศาสตร์ที่แสดงความจริงข้อนี้

สมการ (3.123) เป็นสมการที่ใช้หาค่า $q(t)$ เมื่อกำหนดค่า $Y(x)$ หรือรูปทรงสมมาตรมาให้ คงเห็นจากตัวสมการเองแล้วว่าสมการติดค่าการอินทิเกรตตัว $q(t)$ ดังนั้นการหาค่า $q(t)$ ที่เหมาะสมจึงไม่ใช่งานง่าย เพราะเมื่อไม่ทราบ $q(t)$ ก็ทำให้ไม่สามารถอินทิเกรตสมการได้ตั้งแต่เริ่มต้น การแก้สมการ (3.123) โดยตรงจึงเป็นไปได้ยากเกินไป ในหัวข้อต่อไปเราจะใช้สมการ (3.123) พัฒนาวีธีเชิงตัวเลขเพื่อแก้ปัญหาลไหลผ่านรูปทรงสมมาตร แต่ในตอนนี้เราจะลองมองหาวิธีวิเคราะห์คำตอบโดยประมาณที่เหมาะสมกับปัญหาที่อยู่ในความสนใจของเรา นั่นคือรูปแผนอากาศบาง (Thin symmetrical airfoils) ซึ่งมีความหนาน้อยเมื่อเทียบกับความยาวคอर्ड

$$Y(x) \ll c$$

ในกรณีนี้ การแก้ปัญหาโดยพิจารณาความเร็วที่ผิวแผนอากาศจะสะดวกกว่าการพิจารณาแก้สมการ (3.123) โดยตรง คงจำได้ว่านอกจากฟังก์ชันกระแสนำมารวมกันได้โดยตรงแล้ว เราสามารถรวมความเร็วของการไหลเอกรูปและซอร์สเข้าด้วยกันได้โดยตรงเช่นเดียวกัน ถ้าให้ u_s และ v_s เป็นความเร็วตามแกน x และ y ที่เกิดจากการเหนี่ยวนำของซอร์สทั้งหมดรวมกัน ดังนั้นความเร็วของการไหลเอกรูปรวมกับของซอร์ส จะเป็น

$$u = V_\infty + u_s \quad (3.125a)$$

$$v = v_s \quad (3.125b)$$

$$\text{เมื่อ} \quad u_s = \frac{1}{2\pi} \int_0^c q(t) \frac{x-t}{(x-t)^2 + y^2} dt \quad (3.126)$$

$$\text{และ} \quad v_s = \frac{1}{2\pi} \int_0^c q(t) \frac{y}{(x-t)^2 + y^2} dt \quad (3.127)$$

สำหรับเงื่อนไขที่การไหลต้องสัมผัสไปกับผิวจะได้ว่า บนผิว $y = Y(x)$;

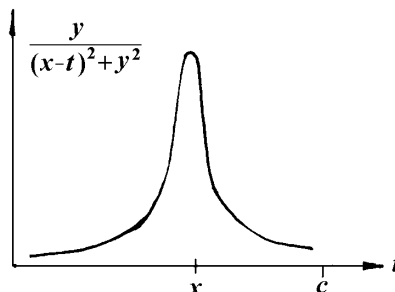
$$\frac{v_s}{V_\infty + u_s} = \frac{dY}{dx}$$

สำหรับแผนอากาศบางความเร็วของกระแสขณะไหลเลียดไปบนผิวจะเปลี่ยนแปลงไปจากความเร็วของกระแสนอิสระเพียงเล็กน้อย (ยกเว้นบริเวณใกล้จุดชะงักด้านหน้าและด้านหลัง) เมื่อพิจารณาค่าโดยประมาณ เราอาจสมมติให้ความเร็วที่เกิดจาก ซอร์สมีค่าน้อยเมื่อเทียบกับความเร็วกระแสนอิสระ $u_s, v_s \ll V_\infty$ ดังนั้นเงื่อนไขด้านบนจะเขียนได้ใหม่เป็น

$$v_s \cong V_\infty \frac{dY}{dx} \quad (3.128)$$

นอกจากนี้เพราะ $Y(x) \ll c$ การแทนเงื่อนไขตามสมการ (3.128) อาจใช้การพิจารณาความเร็ว v_s ที่ตำแหน่ง $y = 0$ แทนตำแหน่งจริงบนผิววัตถุก็ได้ นั่นคือเราประมาณค่า v_s ตามสมการ (3.127) บนแกน x เมื่อ $y \rightarrow 0$ แทนที่จะเป็นบน $y = Y(x)$

เมื่อ $y \rightarrow 0$ ค่าอินทิเกรตตามสมการ (3.127) จะมีค่าเป็นศูนย์ ยกเว้นตรงตำแหน่ง $x = t$ ตามที่แสดงในรูป 3.32 ซึ่งมีค่าสูงขึ้นมา ดังนั้นในขีดจำกัด $y \rightarrow 0$ เราอาจปรับการอินทิเกรตสมการ (3.127) ได้โดยจะไม่ส่งผลกระทบต่อผลลัพธ์ที่จะได้ออกมา ด้วยการแทนค่า $q(t)$ โดยใช้ค่าของตัวมันเองที่ตำแหน่ง x สมมติเป็น $q(x)$ และนำออกนอกการอินทิเกรต พร้อมกันนี้ในขีดจำกัด $y \rightarrow 0$ ค่าของการอินทิเกรตจะไม่เปลี่ยนแปลงถ้าเราเปลี่ยนขอบเขตของการอินทิเกรตเดิมไปเป็นจาก $-\infty$ ถึง ∞ นั่นคือในขีดจำกัด $y \rightarrow 0$



$$\begin{aligned} \lim_{y \rightarrow 0} v_s(x, y) &= \lim_{y \rightarrow 0} \frac{1}{2\pi} \int_0^c q(t) \frac{y}{(x-t)^2 + y^2} dt \\ &= \frac{1}{2\pi} q(x) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{y}{(x-t)^2 + y^2} dt \\ &= \frac{1}{2\pi} q(x) \tan^{-1} \frac{t-x}{y} \Big|_{t=-\infty}^{t=\infty} \\ &= \frac{1}{2\pi} q(x) \left[\frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2} \right) \right] \end{aligned}$$

รูป 3.32 ค่าอินทิเกรตในสมการ (3.127) $v_s(x, 0^+) = \frac{q(x)}{2} \quad (3.129)$

เมื่อนำไปแทนในสมการ (3.128) จะได้ค่าโดยประมาณของกำลังของซอร์สที่แจกแจงบนแกน x สำหรับแผนอากาศบางโดยตรงจากค่าความชันของผิว ณ ตำแหน่ง x นั้น ๆ

$$q(x) = 2V_\infty \frac{dY}{dx} \quad (3.130)$$

สังเกตว่ากำลังของซอร์สตามสมการ (3.130) จะขึ้นกับความชันของผิววัตถุซึ่งเป็นบวกในช่วงด้านหน้าของแผนอากาศและเป็นลบในช่วงด้านหลังซึ่งเป็นไปตามที่คาดไว้ ซอร์สที่มีกำลังเป็นบวกจะดันให้เส้นกระแสของการไหลเอกรูปที่เข้ามาแยกออกจากกันทางด้านหน้า และซอร์สที่มีกำลังเป็นลบ (ซิงค์) จะดึงเส้นกระแสให้กลับมาบรรจบกันด้านหลัง รูป 3.31 แสดงการแจกแจงของ $q(x)$ ตามสมการ (3.131) วัฏหาด้านล่าง สังเกตว่าเนื่องจากรูปร่างทางด้านหน้าของแผนอากาศค่าความชันของผิวจะมีค่าสูงบริเวณใกล้ชายหน้าเป็นผลให้ $q(x)$ ตามสมการมีค่าพุ่งขึ้นสู่ ∞ เมื่อใกล้จุดชะงักด้านหน้า

หลังจากได้การแจกแจงของซอร์สแล้ว เราสามารถคำนวณความเร็วของการไหลตามผิวได้จากสมการ (3.126) และ (3.127) และคำนวณความดันได้จากสมการเบอร์นูลลี ส่วนของความเร็วตามแกน

y บนผิวโดยประมาณได้จากสมการ (3.128) สำหรับส่วนของความเร็วตามแกน x สังเกตว่า ถ้า $y \ll c$ ตัวอินทิเกรตในสมการ (3.126) จะเป็น $\frac{q(t)}{(x-t)}$ ในบริเวณที่ x ไม่ใกล้กับ t ดังนั้นเราแบ่งการอินทิเกรตเป็น 3 ช่วงระหว่าง $0 < t < x - \epsilon$, $x - \epsilon < t < x + \epsilon$ และ $x + \epsilon < t < c$ เมื่อ ϵ มีค่าน้อย จะเห็นว่าค่าอินทิเกรตในช่วงกลาง $q(t) \rightarrow q(x)$ ดังนั้น

$$u_s(x, Y(x)) \cong \frac{1}{2\pi} \left[\int_0^{x-\epsilon} q(t) \frac{1}{x-t} dt + q(x) \int_{x-\epsilon}^{x+\epsilon} \frac{x-t}{(x-t)^2 + Y^2(x)} dt + \int_{x+\epsilon}^c q(t) \frac{1}{x-t} dt \right] \quad (3.131)$$

ให้ $z = x - t$ ในอินทิเกรตตัวกลางทางขวาของสมการ (3.131) ดังนั้นอินทิเกรตตัวกลางจะเป็น

$$q(x) \int_{-\epsilon}^{+\epsilon} \frac{z}{z^2 + Y^2(x)} dz$$

จะเห็นว่าตัวอินทิเกรตเป็นฟังก์ชันคี่ (Odd function) ในขณะที่ขีดจำกัดของการอินทิเกรตเป็นค่าคู่ (even, จาก $-\epsilon$ ถึง $+\epsilon$) ค่าของการอินทิเกรตจะหักล้างกันหมดไป ดังนั้น 2π

$$u_s(x, Y(x)) \cong \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left[\int_0^{x-\epsilon} \frac{q(t)}{x-t} dt + \int_{x+\epsilon}^c \frac{q(t)}{x-t} dt \right]$$

$$u_s(x, Y(x)) = \oint_0^c \frac{q(t)}{x-t} dt \quad (3.132)$$

เมื่อแทนค่า $q(t)$ จากสมการ (3.130) สำหรับกำลังของซอร์สของแพนอากาศจะได้

$$u_s(x, Y(x)) \cong \frac{V_\infty}{\pi} \oint_0^c \frac{Y'(t)}{x-t} dt \quad (3.133)$$

เครื่องหมาย P ในสมการ (3.132) และ (3.133) แสดงค่าการอินทิเกรตโดยใช้ค่า “Cauchy principal value” เพื่อหลีกเลี่ยงการหารด้วยศูนย์จากตัวหาร $x - t$ เมื่อ $x \rightarrow t$ โดยการพิจารณาการอินทิเกรตตามสมการ (3.131)

แทนค่าความเร็ว u_s และ v_s ในสัมประสิทธิ์ความดัน

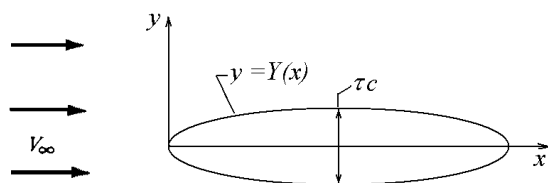
$$c_p = 1 - \left(\frac{V}{V_\infty} \right)^2 = 1 - \frac{(V_\infty + u_s)^2 + v_s^2}{V_\infty^2}$$

$$= -2 \frac{u_s}{V_\infty} - \left(\frac{u_s}{V_\infty} \right)^2 - \left(\frac{v_s}{V_\infty} \right)^2 \quad (3.134)$$

แต่ u_s และ v_s มีค่าน้อยเมื่อเทียบกับ V_∞ ตามที่กล่าวไว้ข้างต้น โดยเฉพาะบนผิววัตถุสมการ (3.128) และ (3.133) บอกเราว่า u_s และ v_s จะมีค่าหายาก ๆ เป็นสัดส่วนกับความหนาของวัตถุ ดังนั้นถ้าเราพิจารณาแพนอากาศบาง สองเทอมหลังของสมการ (3.134) จะน้อยมากเมื่อเทียบกับเทอมแรก และ

$$c_p \cong -2 \frac{u_s}{V_\infty} \quad (3.135)$$

ตัวอย่าง 3.12 จงพิจารณาการแจกแจงความดันของการไหลเอกรูปผ่านวงรีความยาวคอร์ต c และมีความหนา π เมื่อ τ เป็นอัตราส่วนความหนา



วิธีทำ จากสมการวงรี $\left(x - \frac{c}{2}\right)^2 + \frac{Y^2(x)}{\tau^2} = \frac{c^2}{4}$

หรือ $Y(x) = \tau \sqrt{x(c-x)}$ (i)

และ $Y'(x) = \frac{\tau}{2} \frac{c-2x}{\sqrt{x(c-x)}}$ (ii)

ดังนั้นจากสมการ (3.129) กำลังของซอร์สสำหรับวงรี จะเป็น

$$q(x) = \tau V_\infty \frac{c-2x}{\sqrt{x(c-x)}} \quad (iii)$$

เพื่อหา c_p บนผิววงรี สิ่งที่ต้องทำก็เพียงคำนวณค่า u_s ตามสมการ (3.132) เท่านั้น แต่ Y' ติดเทอมที่มี $\sqrt{}$ เพื่อสะดวกใช้ความสัมพันธ์รีโกณมิติช่วย

$$x = \frac{c}{2}(1 - \cos \theta_0) \quad (iv)$$

$$t = \frac{c}{2}(1 - \cos \theta) \quad (v)$$

ดังนั้น $t = 0 \rightarrow \theta = 0$; $t = c \rightarrow \theta = \pi$ และ $dt = \frac{c}{2} \sin \theta d\theta$

จากสมการ (ii) และ (iv)

$$\begin{aligned} Y'(t) &= \frac{\tau}{2} \frac{c - c(1 - \cos \theta)}{\sqrt{\frac{c}{2}(1 - \cos \theta) \left[c - \frac{c}{2}(1 - \cos \theta) \right]}} \\ &= \tau \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \end{aligned}$$

แทนในสมการ (3.133) จะได้

$$u_s[x, Y(x)] \cong \frac{\tau V_\infty}{\pi} \int_0^\pi \frac{\cos \theta}{\cos \theta - \cos \theta_0} d\theta \quad (vi)$$

ในบทที่ 4 เราจะแสดงให้เห็นว่าค่าอินทิเกรตในสมการ (vi) จะมีค่าตามสูตร

$$\int_0^\pi \frac{\cos n\theta}{\cos \theta - \cos \theta_0} d\theta = \pi \frac{\sin n\theta_0}{\sin \theta_0} \quad (vii)$$

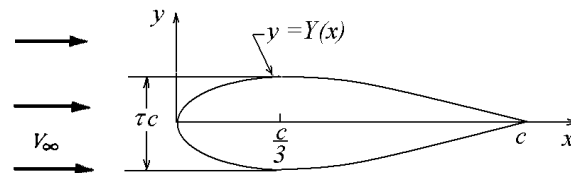
ในสมการ (vi) การอินทิเกรตเป็นกรณี $n = 1$ ของสมการ (vii) ผลลัพธ์เป็น π ฉะนั้นการประมาณค่า u_s บนผิววงรีจะได้

$$u_s[x, Y(x)] = \tau V_\infty$$

เป็นค่าคงที่และทำให้ $c_p \cong -2 \frac{u_s}{V_\infty} = -2\tau$ มีค่าคงที่บนผิววงรี

เมื่อพิจารณาจากการแจกแจงความดันบนผิวจริงของวงรี(จากการคำนวณด้วยวิธีแม่นยำ)แล้วผลที่ได้ถือว่าไม่เลวเมื่อมองจากความง่ายในการคำนวณ ผลลัพธ์ที่ได้ใกล้เคียงกันเกือบตลอดความยาวคอร์ดยกเว้นที่จุดซีกที่ปลายทั้งสองด้านของวงรีซึ่งควรจะมีค่า $c_p = 1$ แต่การประมาณค่าตามตัวอย่างให้ค่า $c_p = -2\tau$

ตัวอย่าง 3.13 จงพิจารณาการแจกแจงความดันของการไหลผ่านวัตถุที่มีรูปร่างกำหนดโดยเส้นโค้งปิดที่มองดูคล้ายรูปแพนอากาศสร้างที่ขึ้นโดยใช้สมการ $Y(x) = A\sqrt{\frac{c}{x}}(c-x)$ โดยมีรูปทรงคล้ายวงรีส่วนหน้าแต่ส่วนท้ายจะเรียวแหลม



จาก
$$Y(x) = A\sqrt{\frac{c}{x}}(c-x)$$

ดังนั้น
$$Y'(x) = \frac{A}{2} \left(\sqrt{\frac{c}{x}} - 3\sqrt{\frac{x}{c}} \right)$$

ตำแหน่งความหนาสูงสุดจะอยู่ที่ $\frac{x}{c} = \frac{1}{3}$ ถ้า τ เป็นอัตราส่วนความหนาจะได้ว่าที่ $x = \frac{1}{3}c$

$Y = \frac{\tau c}{2}$ ดังนั้น $A = \sqrt{\frac{27}{16}}\tau$ ใช้การประมาณค่าสำหรับแพนอากาศบางกำลังของซอร์สคู่กับการไหลเอกรูปผ่านรูปทรงนี้จะเป็น

$$q(x) = \sqrt{\frac{27}{16}} V_\infty \tau \left(\sqrt{\frac{c}{x}} - 3\sqrt{\frac{x}{c}} \right)$$

บนผิวความเร็ว u_s จะเป็น

$$u_s = \sqrt{\frac{27}{16}} \frac{V_\infty \tau}{2\pi} \int_0^c \frac{\sqrt{c/t} - 3\sqrt{t/c}}{x-t} dt$$

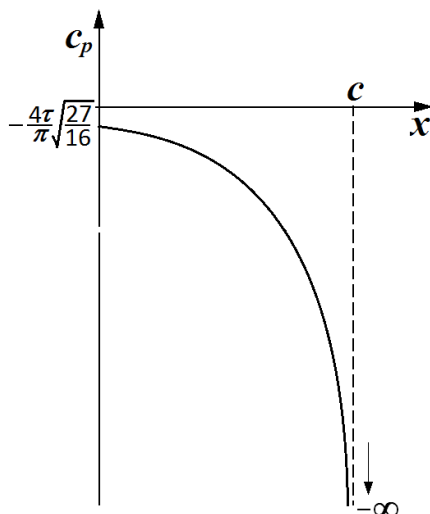
ค่าอินทิเกรตมีค่าที่หาได้จากหนังสือคู่มือคณิตศาสตร์ ดังนั้น

$$\frac{u_s}{V_\infty} = \frac{\tau}{2\pi} \sqrt{\frac{27}{16}} \left[\left(\sqrt{\frac{c}{x}} - 3\sqrt{\frac{x}{c}} \right) \ln \frac{\sqrt{x} + \sqrt{c}}{\sqrt{c} - \sqrt{x}} + 6 \right]$$

แทนค่าลงในสมการ (3.134) จะได้ค่าประมาณสำหรับแผนอากาศบางของ c_p บนผิวซึ่งแสดงเป็นกราฟในรูปด้านล่าง เช่นเดียวกับรูปวงรี ผลลัพธ์ที่ได้ของตัวอย่างนี้มีความผิดพลาดที่ใกล้จุดชะงักที่

$$\text{ชายหน้า} \quad c_p = -\frac{4\tau}{\pi} \sqrt{\frac{27}{16}}$$

$$\text{และที่ชายหลัง } (x = c) \quad c_p = -\infty$$



รูป 3.33 การแจกแจงสัมประสิทธิ์ความดันของตัวอย่าง 3.13

ในทั้งสองตัวอย่างที่ผ่านมามีทฤษฎีแผนอากาศบางล้มเหลวที่จะนำมาใช้คำนวณค่าความดันใกล้จุดชะงัก และจะเกิดขึ้นแบบนี้เสมอไปกับปัญหาอื่นๆ ด้วย ซึ่งเป็นเพราะการประมาณค่าความเร็วในแนวสัมผัสผิวตามสมการ (3.128) นั้นมีความคลาดเคลื่อนน้อย และจะยังมีความคลาดเคลื่อนสูงขึ้นเมื่อเข้าใกล้จุดชะงัก ความคลาดเคลื่อนนี้เกิดจากการที่เราใช้ค่า v_s ตามสมการ (3.128) ซึ่งเป็นค่าโดยประมาณสำหรับการคำนวณกำลังของซอร์ส ส่วนความคลาดเคลื่อนอีกอย่างหนึ่งซึ่งอาจเห็นไม่ชัดเจนเกิดขึ้นจากการคำนวณค่า u_s และ v_s ซึ่งไม่ได้ทำที่ตำแหน่งบนผิวแผนอากาศโดยตรง แต่ประมาณค่าบนแกน x แทนด้วยข้อจำกัดทางคณิตศาสตร์ นอกจากนี้ยังมีความคลาดเคลื่อนที่มาจาก การที่เราพิจารณาการแจกแจงของซอร์สตั้งแต่ชายหน้าไปชายหลัง ($0 < x < c$) แต่จากหัวข้อ 3.10 การไหลเอกรูปผ่านคู่ซอร์สซิงค์ ตำแหน่งของซอร์สน้ำสุดและหลังสุดจะอยู่ห่างจากจุดชะงักด้านหน้าและด้านหลังอยู่เป็นระยะทางหนึ่ง การพิจารณาการแจกแจงซอร์สบนแกน x ก็จะมีลักษณะเดียวกันคือการแจกแจงซอร์สจะเรียงจากระยะห่างจากจุดชะงักด้านหน้าและสิ้นสุดก่อนถึงจุดชะงักด้านหลังอยู่เล็กน้อยเสมอ ดังนั้นขีดจำกัดของการอินทิเกรตจาก 0 ถึง c ในสมการ (3.123) จะไม่ตรงกับลักษณะนี้ เพื่อให้สมการ (3.123) ให้คำตอบที่ตรงกับสภาพการไหลจริงขีดจำกัดของการอินทิเกรตควรจะเปลี่ยนเป็นจาก x_s ถึง x_f เมื่อ x_s เป็นระยะห่างจากจุดชะงักด้านหน้าถึงจุดเริ่มต้น และ x_f เป็นระยะห่างจากจุดชะงักด้านหลังถึงจุดสิ้นสุดเส้นการแจกแจงซอร์ส เราอาจพิสูจน์ได้ว่าระยะห่าง

ระหว่างซอร์สและจุดชะงักจะมีค่าประมาณครึ่งหนึ่งของรัศมีความโค้งผิวตรงที่ผ่านจุดชะงัก ให้ r_s เป็นรัศมีความโค้งตรงที่ผ่านจุดชะงัก

$$x_s \cong \frac{r_s}{2} \quad (3.136)$$

สมการ (3.136) นำไปใช้ได้ทั้งกับจุดชะงักด้านหน้าและหลัง และมีความสำคัญสำหรับวิธีเชิงตัวเลขในหัวข้อต่อไป

3.17 การใช้วิธีเชิงตัวเลขแบบการแจกแจงจุดซ้อนบนเส้น (Line doublet distribution)

การแก้สมการ (3.123) เพื่อหาค่า $q(x)$ ที่เหมาะสมกับรูปร่างของโค้ง $Y(x)$ นอกจากการใช้วิธีประมาณในหัวข้อ 3.16 แล้วอีกทางเลือกหนึ่งที่สามารถทำได้คือการใช้วิธีเชิงตัวเลข (Kuethe & Chow, 1997) ในตอนท้ายของหัวข้อ 3.16 ได้อธิบายแล้วว่าการจัดเรียงซอร์สไปตามแกน x ไม่ควรเรียงเต็มระยะคอร์ดของแพนอากาศ แต่ควรอยู่ห่างจากปลายคอร์ดเป็นระยะครึ่งหนึ่งของรัศมีความโค้ง ดังนั้นจึงควรเขียนสมการ (3.123) ใหม่ให้เป็น

$$0 = V_\infty Y(x) + \frac{1}{2\pi} \int_{x_s}^{x_f} q(t) \tan^{-1} \left[\frac{Y(x)}{x-t} \right] dt \quad (3.137)$$

เมื่อ $x_s \cong \frac{1}{2} r_o$ และ $x_f \cong \frac{1}{2} r_c$ x_s เป็นระยะห่างระหว่างจุดชะงักด้านหน้ากับจุดเริ่มต้นของเส้นการแจกแจงซอร์ส x_f เป็นระยะห่างระหว่างจุดชะงักด้านหลังกับจุดสิ้นสุดของเส้นการแจกแจงซอร์ส r_o และ r_c เป็นรัศมีความโค้งที่ $x = 0$ และ $x = c$ ของ $Y(x)$

ดังที่กล่าวแล้วว่าการหาค่า $q(x)$ จากสมการ (3.137) โดยตรงเมื่อกำหนดค่า $Y(x)$ เป็นไปไม่ได้ แต่อาจทำได้โดยวิธีเชิงตัวเลข โดยมีขั้นตอนที่เป็นมาตรฐานสำหรับแก้สมการอินทิกรัล อย่างสมการ (3.137) คือ

1. สมมติรูปแบบการเปลี่ยนแปลง (Parametric form) ของฟังก์ชันที่เราไม่ทราบค่า ในที่นี้คือ $q(x)$ ให้เกี่ยวข้องกับตัวแปร N ตัว และเพื่อให้การหาค่าตัวแปร N ตัวทำได้โดยง่ายเรามักสมมติรูปแบบการเปลี่ยนแปลงที่เป็นแบบตรงไปตรงมา

2. ประเมินค่าการอินทิเกรตให้อยู่ในเทอมของ x และตัวแปร N ตัวนั้น

3. จัดให้สมการสมจริงที่ตำแหน่ง x ต่างๆ กัน N ตำแหน่ง วิธีนี้จะสร้างชุดของสมการพีชคณิต N สมการที่มีตัวแปรไม่ทราบค่า N ตัวขึ้น หลังจากการแก้ชุดของสมการก็จะทราบค่าตัวแปรทุกตัวซึ่งสามารถแทนกลับไปในรูปแบบการเปลี่ยนแปลงที่เราสมมติไว้สำหรับ $q(x)$ ได้

โดยหลักการถ้ารูปแบบของฟังก์ชันที่เลือกใช้ในขั้นตอนที่ 1 เหมาะสมเพียงพอ เราอาจหาคำตอบที่ให้อยู่ละเอียดยกมากเท่าที่ต้องการได้เพียงแค่ใช้จำนวน N ให้มากพอ รูปแบบฟังก์ชันที่ง่ายและเชื่อถือได้มากที่สุด คือ การกำหนดฟังก์ชันให้มีค่าคงที่เป็นช่วงๆ (Piecewise-constant function) คือการแบ่งช่วง $x_s < x < x_f$ เป็น N ส่วนย่อย (ซึ่งไม่จำเป็นต้องเท่ากัน) และสมมติให้

ความหนาแน่นของซอร์สมีค่าคงที่บนแต่ละส่วนย่อยนั้น นั่นคือ สมมติ

$$q(t) = q_i \quad \text{สำหรับ } t_i < t < t_{i+1} \quad i = 1, 2, 3, \dots, N$$

ในที่นี้ $t_1 = x_s$ และ $t_{n+1} = x_f$ รวมทั้งระยะแบ่งช่วงของ t_i แต่ละช่วงจะถูกกำหนดค่าเจาะจงลงไป แต่ความหนาแน่นของซอร์ส q_i (คือ $q_1, q_2, \dots, q_N$) ที่คงที่ในแต่ละช่วงคือตัวแปร N ตัวที่ยังไม่ทราบค่าที่กล่าวถึงในขั้นตอนข้างต้น อินทิเกรตในสมการ (3.137) จะถูกแทนที่โดยสมการ

$$0 = V_\infty Y(x) + \frac{1}{2\pi} \sum_{i=1}^N \int_{t_i}^{t_{i+1}} q_i \tan^{-1} \left[\frac{Y(x)}{x-t} \right] dt \quad (3.138)$$

สมการ (3.138) สามารถจัดให้อยู่ในรูปชุดของสมการพีชคณิต N สมการได้ดังนี้ เขียนสมการ (3.138) ให้อยู่ในรูป

$$\sum_{j=1}^N A_j(x) q_j = b(x) \quad \text{สำหรับ } 0 < x < c \quad (3.139)$$

เมื่อ

$$A_j(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{t_j}^{t_{j+1}} \tan^{-1} \left[\frac{Y(x)}{x-t} \right] dt$$

และ

$$b(x) = -V_\infty Y(x)$$

เขียนสมการ (3.139) โดยคำนวณค่าของสมการที่ตำแหน่ง x ต่างๆ กัน N ตำแหน่ง จะได้เป็นชุดสมการ N สมการของตัวไม่ทราบค่า q_1 ถึง q_N N ตัว เมื่อแก้สมการชุดนี้ด้วยวิธีเชิงตัวเลขวิธีใดวิธีหนึ่งก็จะได้คำตอบที่ต้องการ

อย่างไรก็ตามอย่างที่เห็นจากสมการ (3.130) ทฤษฎีแผนอากาศบางทำนายความหนาแน่นของซอร์ส $q(x)$ เป็นสัดส่วนกับความชันของผิวที่ตำแหน่ง x เดียวกัน ซึ่งจะมีค่าพุ่งสูงขึ้นไปที่ยานหน้าที่มีลักษณะมน (ความชันของผิวเป็น ∞) อย่างในรูป 3.31 ทำให้การแก้สมการ (3.139) มีความไม่เสถียร เพื่อหลีกเลี่ยงผลอันนี้เราลองพยายามเปลี่ยนฟอร์มของสมการ (3.137) โดยใช้การอินทิเกรตแบ่งส่วน (by parts, $\int v du = uv - \int u dv$) กับสมการ (3.120b) เมื่อ

$$\psi_s(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int q(t) \tan^{-1} \left(\frac{y}{x-t} \right) dt \quad (3.120b)$$

ให้ $q(t)dt$ เป็น du และ $\tan^{-1} \frac{y}{x-t}$ เป็น v และ ให้

$$\kappa(x) = \int_{x_s}^x q(t) dt \quad \text{สำหรับ } x_s < x < x_f \quad (3.140)$$

ดังนั้นฟังก์ชันการไหลตามสมการ (3.119) อาจเขียนได้ใหม่เป็น

$$\psi(x, y) = V_\infty y + \frac{1}{2\pi} \kappa(t) \tan^{-1} \frac{y}{x-t} \Big|_{t=x_s}^{t=x_f} - \frac{1}{2\pi} \int_{x_s}^{x_f} \kappa(t) \frac{y}{(x-t)^2 + y^2} dt \quad (3.141)$$

อย่าลืมว่าสำหรับรูปร่างวัตถุผลรวมของกำลังของซอร์สจะเป็นศูนย์เสมอ ดังนั้นจากสมการ (3.140)

$$\kappa(x_f) = \int_{x_s}^{x_f} q(t)dt = 0$$

และสมการบอกอยู่ในตัวว่า $\kappa(x_s) = 0$ ดังนั้นเทอมที่สองทางขวาของสมการ (3.141) จะมีค่าเป็นศูนย์ และได้ฟอร์มใหม่ของฟังก์ชันกระแสของการไหลเอกรูปผ่านเส้นการแจกแจงซอร์สบนแกน x เป็น

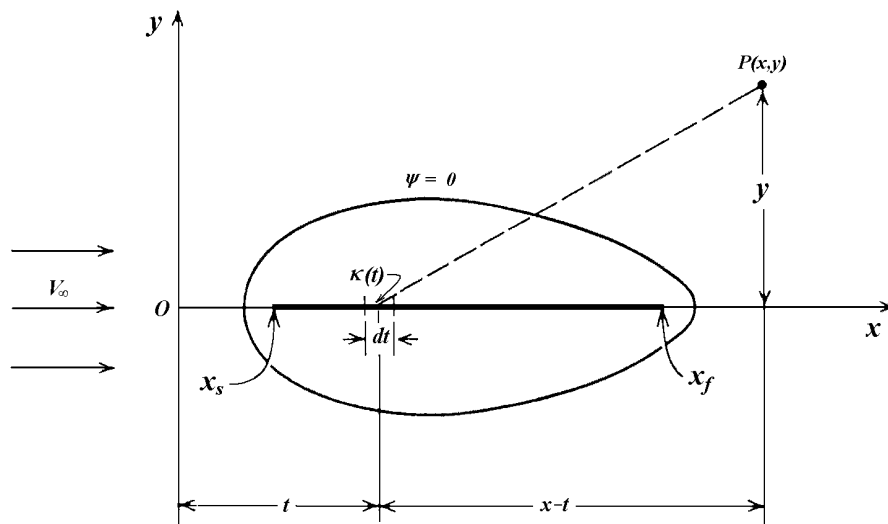
$$\psi(x, y) = V_\infty y - \frac{1}{2\pi} \int_{x_s}^{x_f} \frac{\kappa(t)y}{(x-t)^2 + y^2} dt \quad (3.142)$$

สมการ (3.142) คือสมการเดียวกับสมการ (3.119) แต่อยู่ในฟอร์มที่ต่างกัน ที่น่าสนใจคือถ้าพิจารณาฟังก์ชันกระแสของการไหลเอกรูปผ่านจุดซ้อนที่มีการแจกแจงบนแกน x จาก x_s ถึง x_f โดยให้ความหนาแน่นของจุดซ้อนเป็น $\kappa(t)$ ตามที่แสดงในรูป 3.33 จากสมการ (3.79a) ที่จุด $P(x, y)$ ใดๆ ในสนาม จุดซ้อนที่เรียงอยู่ในช่วง dt ที่ตำแหน่ง t จากจุดกำเนิดจะเหนี่ยวนำให้เกิดค่าฟังก์ชันกระแส $d\psi$ ณ จุด P มีค่า

$$d\psi = \frac{\kappa(t)dt}{2\pi} \frac{y}{(x-t)^2 + y^2}$$

ค่าฟังก์ชันกระแสที่จุด P เนื่องจากจุดซ้อนทั้งหมดที่แจกแจงจาก $x = x_s$ ถึง $x = x_f$ จะเป็น

$$\psi_P = - \int_{x_s}^{x_f} \frac{\kappa(t)y}{(x-t)^2 + y^2} dt \quad (3.143)$$



รูป 3.33 การแจกแจงจุดซ้อนในการไหลเอกรูป (Kuethe & Chow, 1997)

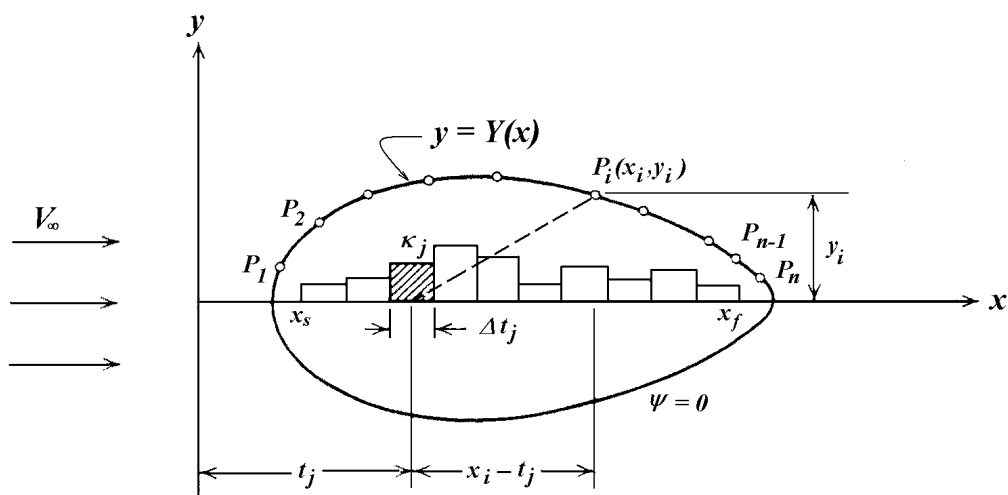
นั่นคือฟังก์ชันกระแสของการไหลเอกรูปผ่านจุดซ้อนที่เรียงกันอยู่บนแกน x จะเป็น

$$\psi(x, y) = V_\infty y - \frac{1}{2\pi} \int_{x_s}^{x_f} \frac{\kappa(t)y}{(x-t)^2 + y^2} dt \quad (3.142')$$

ผลที่ได้เป็นสมการเดียวกับสมการ (3.142) เมื่อ $\kappa(t)$ เป็นค่าเดียวกัน แต่สมการ (3.142) ได้จากการไหลเอกรูปผ่านการแจกแจงซอร์สที่เรียงกันบนแกน x ส่วนสมการ (3.142') ได้จากการไหลเอกรูปผ่านการแจกแจงจุดซอร์สที่เรียงกันบนแกน x ทำให้เราพอจะสรุปได้ตรงนี้ว่า การไหลเอกรูปผ่านการแจกแจงซอร์สจะมีผลเช่นเดียวกับที่ผ่านการแจกแจงจุดซอร์ส ภายใต้เงื่อนไขตามสมการ (3.140) คือกำลังต่อหน่วยความยาวของจุดซอร์สที่ตำแหน่ง x ใดๆ ระหว่าง $x_s < x < x_f$ จะต้องเท่ากับผลรวมของกำลังของซอร์สที่เรียงจาก x_s ถึงตำแหน่ง x นั้นๆ กล่าวอีกอย่างหนึ่งคือ เราแทนการไหลเอกรูปผ่านรูปทรงสมมาตรด้วยการแจกแจงซอร์ส หรือจุดซอร์สที่เรียงกันบนแกน x อย่างไม่อย่างหนึ่งก็ได้

เพื่อหลีกเลี่ยงความไม่เสถียรในการแก้ปัญหาเชิงตัวเลข เนื่องจากค่า $q(x) \rightarrow \infty$ ที่เกิดขึ้นบริเวณจุดซอร์สที่ด้านหน้าเมื่อแทนวัตถุด้วยการแจกแจงซอร์สอย่างที่เราได้กล่าวแล้วข้างต้น เราอาจจะเลือกพิจารณาการไหลผ่านการแจกแจงจุดซอร์สแทนได้ โดยใช้ ฟังก์ชันกระแสตามสมการ (3.142) ในกรณีนี้เส้นกระแสผ่านจุดซอร์สก็ยังคงเป็นเส้น $\psi = 0$ ตามเดิม แต่สมการ (3.137) จะเขียนใหม่เป็น

$$0 = V_\infty y + \frac{1}{2\pi} \int_{x_s}^{x_f} \frac{\kappa(t)Y(x)}{(x-t)^2 + Y^2(x)} dt \quad \text{สำหรับ } 0 < x < c \quad (3.144)$$



รูป 3.34 วิธีการของวิธีเชิงตัวเลข ในรูปแสดง $i = 6, j = 3$ สำหรับ $N = 10$ (Kuethe & Chow, 1997)

สมการ (3.144) ต้องหาคำตอบโดยวิธีเชิงตัวเลข โดยสมมติฟังก์ชัน $\kappa(t)$ ตามที่กล่าวมาแล้ว ลองพิจารณาการไหลผ่านรูปทรงสมมาตรความยาวคอร์ด c ตามที่แสดงในรูป 3.34 ให้เส้นรอบรูป

วัตถุประสงค์ด้วย $y = Y(x)$ เรากำหนดรูปแบบการเปลี่ยนแปลงความหนาแน่น $K(t)$ บนแกน x จาก x_s ถึง x_f ให้มีลักษณะคงที่เป็นช่วงๆ โดยแบ่งระยะจาก x_s ถึง x_f เป็น N ช่วง แต่ละช่วงมีความกว้าง $\Delta t = t_{j+1} - t_j$ ตามที่แสดงในรูป 3.34 ให้ $K(t)$ มีค่าคงที่ในแต่ละช่วง Δt แต่อาจมีค่าเปลี่ยนแปลงจากช่วงหนึ่งไปยังอีกช่วงหนึ่งได้

$$K(t) = K_j \quad \text{สำหรับ} \quad t_j < t < t_{j+1}$$

ดังนั้นสมการ (3.144) จะเป็น

$$0 = V_\infty y + \frac{1}{2\pi} \sum_{j=1}^N \int_{t_j}^{t_{j+1}} K_j \frac{Y(x)}{(x-t)^2 - Y^2(x)} dt \quad (3.144a)$$

สมการ (3.144a) จัดให้อยู่ในรูปชุดของสมการพีชคณิต N สมการได้เหมือนกับสมการ (3.138) คือ เขียนสมการ (3.144a)ให้อยู่ในรูป

$$\sum_{j=1}^N A_j(x) K_j = b(x) \quad \text{สำหรับ} \quad 0 < x < c \quad (3.145)$$

เมื่อ

$$A_j(x) = \frac{1}{2\pi Y(x)} \int_{t_j}^{t_{j+1}} \frac{Y(x)}{(x-t)^2 + Y^2(x)} dt \quad (3.146a)$$

และ

$$b(x) = -V_\infty \quad (3.146b)$$

ค่าอินทิเกรตในสมการ (3.146a) ประมาณค่าได้ง่ายๆ จาก

$$\int_{t_j}^{t_{j+1}} \frac{Y(x)}{(x-t)^2 + Y^2(x)} dt = \tan^{-1} \frac{(t-x)}{Y(x)} \Big|_{t_j}^{t_{j+1}}$$

เพราะฉะนั้น

$$A_j(x) = \frac{1}{2\pi} \left(\tan^{-1} \frac{t_{j+1} - x}{Y(x)} - \tan^{-1} \frac{t_j - x}{Y(x)} \right) \quad (3.146c)$$

ถ้าเลือกตำแหน่งใดๆ บนผิว N ตำแหน่งสมมติเป็นตำแหน่ง P_i ในรูป

$$P_i = P(x_i, Y(x_i)) \quad i = 1, 2, \dots, N$$

เราอาจเขียนสมการ (3.145) ได้ N สมการให้อยู่ในฟอร์ม

$$\sum_{i,j=1}^N C_{ij} K_j = -V_\infty \quad (3.147)$$

เมื่อ

$$C_{ij} = A_j(x_i) = \frac{1}{2\pi Y(x_i)} \left(\tan^{-1} \frac{t_{j+1} - x_i}{Y(x_i)} - \tan^{-1} \frac{t_j - x_i}{Y(x_i)} \right) \quad (3.148)$$

จะเห็นว่าในสมการ (3.147) เป็นชุดสมการ N สมการ N ตัวแปรไม่ทราบค่า เมื่อแทนค่า C_{ij} และ $b(x_i)$ ตามสมการ (3.148) และ (3.146b) ที่ตำแหน่งต่างๆ บนผิว N ตำแหน่งลงไป ชุดของสมการจะอยู่ในฟอร์ม

$$\begin{aligned}
C_{11}K_1 + C_{12}K_2 + \dots C_{1N}K_N &= V_\infty \\
C_{21}K_1 + C_{22}K_2 + \dots C_{2N}K_N &= V_\infty \\
&\vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots \\
C_{N1}K_1 + C_{N2}K_2 + \dots C_{NN}K_N &= V_\infty
\end{aligned} \tag{3.149}$$

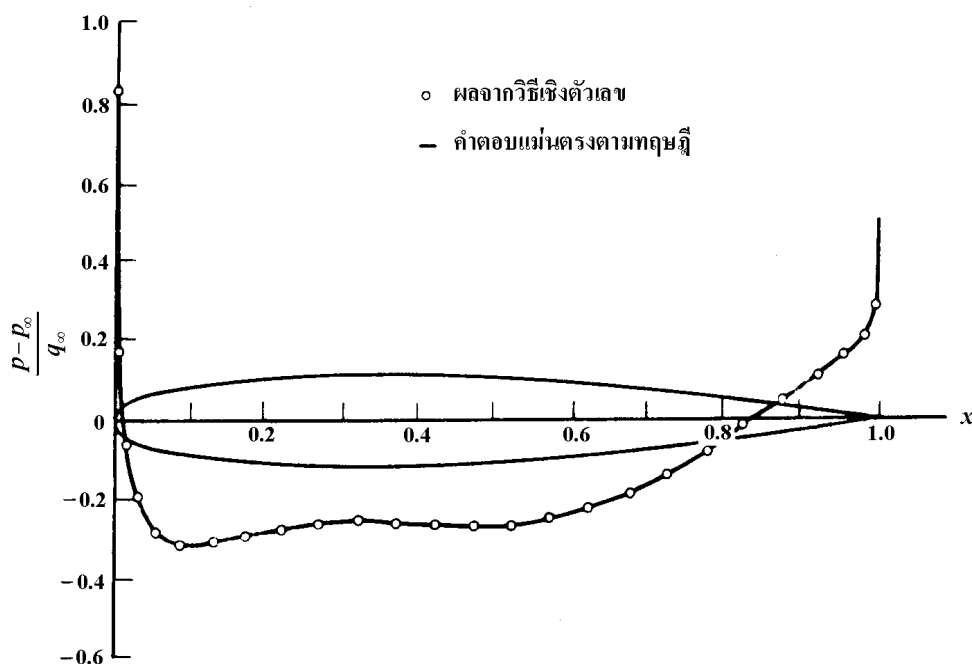
จะเห็นว่าชุดสมการพีชคณิตในสมการ (3.149) มีตัวแปรไม่ทราบค่า $K_1, K_2, \dots, K_N$ N ตัว แต่ละสมการในสมการ (3.149) แสดงผลของการแจกแจงจุดซ้อนที่มีค่าคงที่ K_j ในช่วง Δt_j ที่มีผลต่อค่าฟังก์ชันกระแส ณ จุด $(x_i, Y(x_i))$ จุดหนึ่งบนผิววัตถุหรือบนเส้นกระแสผ่านจุดชะงัก ในกรณีที่เราลดระยะ Δt ลงจำนวน N จะเพิ่มขึ้น ในขีดจำกัด N เข้าสู่ ∞ การแจกแจง K_j จะเข้าสู่ $K(t)$ ดังนั้นถ้าต้องการคำตอบที่ใกล้เคียงกับที่นำจะได้จากสมการ (3.143) จำนวน N จะต้องมาก ซึ่งทำให้จำนวนสมการและตัวแปร K_j ในสมการเพิ่มขึ้น ในแง่การแก้สมการจำเป็นต้องอาศัยความได้เปรียบของเครื่องคำนวณในการแก้สมการพีชคณิต ซึ่งนักเรียนจะศึกษาได้จากตำราอ้างอิงทั่วไปที่เกี่ยวกับการวิเคราะห์ด้วยวิธีเชิงตัวเลข (Numerical analysis)

เมื่อได้ค่า K_j จากสมการ (3.149) เราจะทราบจากการแจกแจงของจุดซ้อนบนแกน x จากนั้นฟังก์ชันกระแส ณ จุดใดๆ จะสามารถคำนวณได้จากสมการ (3.146) ส่วนความเร็วและความดันจะเป็นผลที่ตามมาของการหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันกระแส และนำไปแทนค่าในสมการเบอร์นูลลี

รูป 3.35 เป็นตัวอย่างการคำนวณสัมประสิทธิ์ความดันรอบแพนอากาศสมมาตร โดยใช้จำนวน $N = 52$ ขอให้สังเกตความถูกต้องของคำตอบเมื่อเทียบกับคำตอบจริงที่สอดคล้องกันมาก

สำหรับการไหลเอกรูปผ่านรูปทรงไม่สมมาตร การคำนวณในลักษณะเดียวกันอาจจะทำได้โดยกระจายจุดซ้อนหรือซอร์สไปตามเส้นโค้งแทนที่เส้นตรง อย่างไรก็ตามเพราะความไม่สมมาตรตำแหน่งบนผิว $P(x_i, Y(x_i))$ ที่ใช้ในสมการ (3.147) และ (3.149) ต้องเป็นจุดที่อยู่บนผิวทั้งด้านบนและด้านล่างของแพนอากาศ และจำนวน N ที่ใช้ในการคำนวณก็จะต้องมากกว่าที่ใช้กับปัญหาสมมาตร ที่ความถูกต้องเท่าๆ กัน

นอกจากนี้แทนที่จะใช้ฟังก์ชันกระแสเราอาจใช้ศักย์ความเร็ว ϕ ของการไหลเอกรูปผ่าน การแจกแจงจุดซ้อน และพิจารณาแนวความเร็วที่ผิวให้อยู่ในแนวสัมผัส ซึ่งคือ $\frac{\partial \phi}{\partial n} = 0$ ที่ผิวก็ได้ ทั้งสองวิธีจะให้คำตอบเดียวกันเพียงแต่การแทนเงื่อนไขที่ผิวของศักย์ความเร็วจะทำได้ง่ายกว่าในบางปัญหาที่ต่างออกไป



รูป 3.35 การแจกแจงสัมประสิทธิ์ความดันรอบแพนอากาศสมมาตรที่มีมุมปะทะ 0°

3.18 วิธีซอร์สแพแนล (Source panel method)

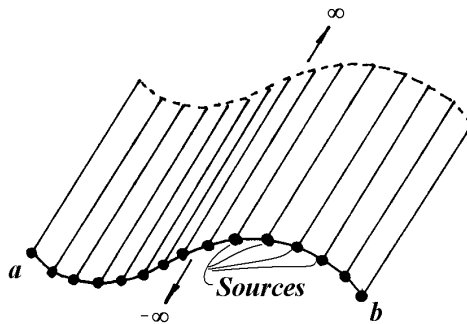
วิธีเชิงตัวเลขในหัวข้อ 3.17 โดยการแทนวัตถุด้วยการแจกแจงซอร์สบนเส้นตรง (Line source distribution) ตามแนวคอร์ดของวัตถุใช้ได้ดีเฉพาะกับการไหลผ่านรูปทรงสมมาตรที่มีมุมปะทะเป็นศูนย์ รวมทั้งการที่ไม่ทราบระยะห่างที่แน่นอนจากจุดเชิงกักด้านหน้าและด้านหลังไปยังจุดเริ่มต้นและจุดสิ้นสุดของเส้นซอร์ส หรือระยะ x_s และ x_f ทำให้การแก้ปัญหาต้องใช้วิธีลองผิดลองถูกซึ่งไม่สะดวกในการปฏิบัติ ในหัวข้อนี้เราจะแนะนำวิธีเชิงตัวเลขที่สามารถแก้ไขข้อขัดข้องดังกล่าว และสามารถนำไปใช้ได้กับกรณีทั่วไปได้เรียกว่าวิธี “ซอร์สแพแนล” (Source panel method) วิธีซอร์สแพแนลถือได้ว่าเป็นวิธีแก้ปัญหามาตรฐานมาตั้งแต่ปี พ.ศ.2513 ที่ใช้กันทั่วไปในวงการอุตสาหกรรมและวิศวกรรมอากาศยาน (Kuethe & Chow, 1997) ที่จริงแล้วการหาคำตอบของการไหลไร้ความหนืดไร้การอัดตัวโดยวิธีซอร์สแพแนลและวอร์เทกแพแนล (Vortex panel, จะได้กล่าวถึงในบทที่ 4) ถือได้ว่าเป็นการปฏิบัติการวิเคราะห์การไหลความเร็วต่ำทีเดียว

ย้อนกลับไปยังหัวข้อ 3.16 ถ้าจุดซอร์สที่มีกำลังน้อยแต่มีจำนวนมากไม่จำกัดมาเรียงกันแน่นอย่างต่อเนื่องอยู่บนแนวเส้นตรงหรือเส้นโค้งใดๆ ซอร์สเหล่านี้จะเรียงตัวกันและฟอร์มตัวเป็นแนวที่เรียกว่าเส้นซอร์ส (Line source) ถ้าให้ค่ากำลังต่อหน่วยความยาวหรือความหนาแน่นของซอร์สที่เรียงกันนี้เป็นฟังก์ชันของตำแหน่งบนเส้นโค้ง $q(s)$ แล้ว บนส่วนสั้นๆ ds ของเส้นโค้งกำลังของซอร์สในช่วงสั้นๆ นี้ก็จะเป็น $q(s)ds$ ต้องไม่ลืมว่าจุดซอร์สสองมิติที่พิจารณาในหัวข้อ 3.16 มีธรรมชาติจริงๆ เป็นเส้นตรงตั้งฉากกับระนาบที่พิจารณา ดังนั้นจุดซอร์สที่เรียงกันอย่างต่อเนื่องบนเส้นโค้งใน

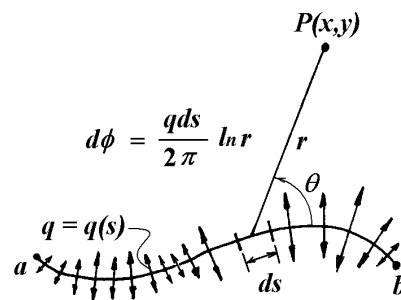
สามมิติจะฟอร์มตัวเป็นแผ่นซอร์ส (Source sheet) ดังแสดงในรูป 3.36ก เมื่อมองเข้าไปทางด้านข้าง ขนานแกน z ในรูป จะมองเห็นแผ่นซอร์สตามรูป 3.36 ข เป็นเส้นโค้งที่มีการแจกแจงของซอร์สอย่าง ต่อเนื่อง เหมือนมองดูด้านข้างของแผ่นซอร์สซึ่งตั้งฉากกับหน้ากระดาษ อย่างที่อธิบายไว้แล้ว ตอนต้น ซอร์สบนระยะสั้นๆ ds บนโค้ง s จะมีกำลัง $q(s)ds$ และทำให้จุด $P(x, y)$ ที่อยู่ห่าง r จาก ds มีฟังก์ชันกระแสและศักย์ความเร็ว (Velocity potential) เป็น

$$d\psi = \frac{qds}{2\pi}\theta \quad \text{และ} \quad d\phi = \frac{qds}{2\pi}\ln r \quad (3.150)$$

ตามที่แสดงในรูป 3.36 ข ฟังก์ชันกระแสและ ศักย์ความเร็วที่จุด P ซึ่งเป็นผลจากซอร์ส ทั้งหมดบนเส้นโค้ง s จาก a ถึง b จะเป็น



(ก) แผ่นซอร์ส มองจากมุมเฉียง



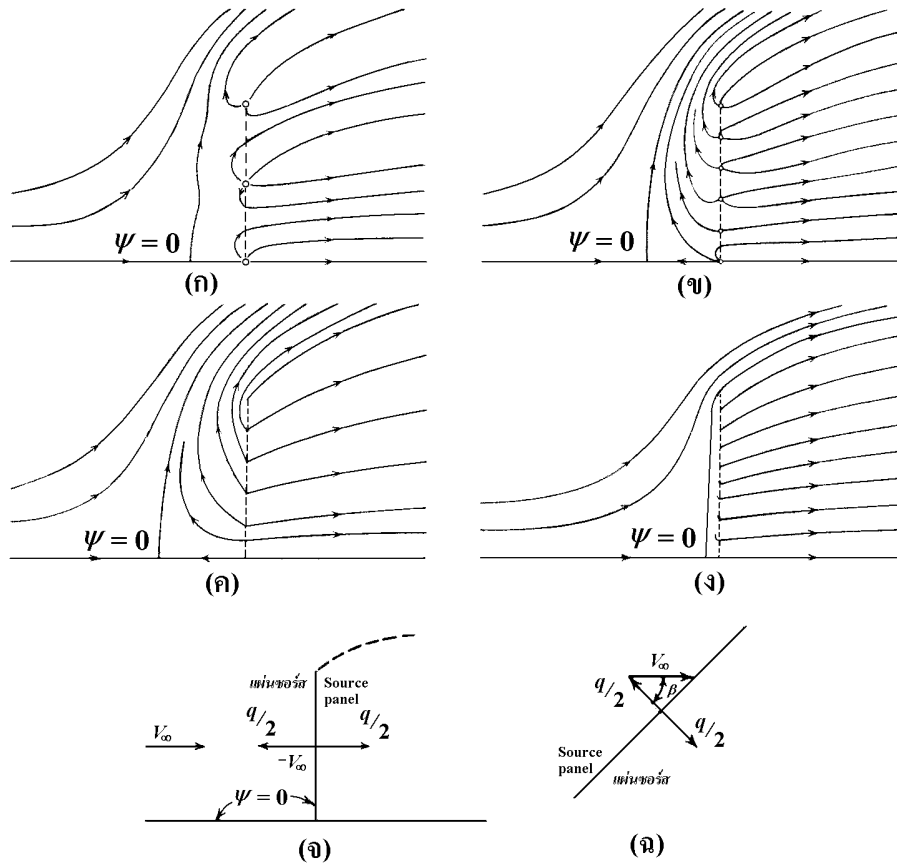
(ข) แผ่นซอร์ส มองจากด้านข้าง

รูป 3.36 แผ่นซอร์ส (Source sheet) (Kuethe & Chow, 1997)

$$\psi(x, y) = \int_a^b \frac{qds}{2\pi}\theta \quad \text{และ} \quad \phi(x, y) = \int_a^b \frac{qds}{2\pi}\ln r \quad (3.151)$$

อย่างที่เคยกล่าวไว้ในหัวข้อ 3.16 ว่า $q(s)$ อาจเปลี่ยนค่าจากบวกเป็นลบได้เมื่อพิจารณาไปตามโค้ง s ดังนั้นแผ่นซอร์สจะเป็นส่วนประกอบของซอร์สและซิงค์ผสมกัน

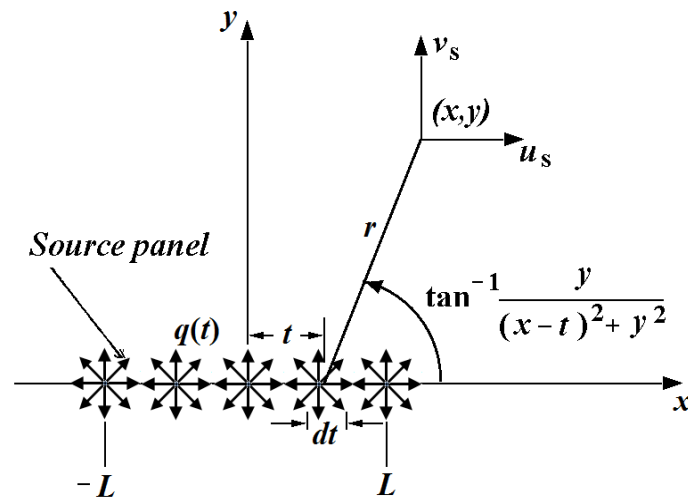
แผ่นซอร์สที่เป็นแผ่นตรงที่เราศึกษาในหัวข้อ 3.16 มีคุณสมบัติที่น่าสนใจดังจะแสดงในรูป 3.37 รูปแบบการไหลที่ซับซ้อนในรูป 3.37 ก เป็นครึ่งบนของเส้นกระแสที่เกิดจากการไหลเอกรูปผ่านซอร์สที่มีกำลังเท่ากันและวางไว้ในตำแหน่งที่มีระยะห่างเท่ากัน 5 ตำแหน่งในแนวเส้นตรงตั้งฉากกับทิศทางการไหล จากหัวข้อ 3.10 การวางซอร์สขวางการไหลเอกรูป การไหลออกจากซอร์สจะดันการไหลเอกรูปให้ไหลอ้อมซอร์สไปทำให้เกิดเป็นรูปเปิดไปสู่อนันต์ทางด้านหลัง ดังนั้นการนำซอร์สทั้ง 5 วางไว้ในตำแหน่งในรูป 3.37 ก จะทำให้เกิดลักษณะการไหลเหมือนกับเส้นกระแส $\psi = 0$ (เส้นกระแสที่ผ่านจุดซิงค์) โอบรอบซอร์สทั้ง 5 ไว้ด้านใน ฟอร์มตัวเป็นรูปเปิดไปสู่อนันต์ และสามารถแทนผิววัตถุที่มีรูปทรงแบบเดียวกันได้ตามที่แสดงในรูป (เส้นกระแสในรูปแสดงครึ่งบนของการไหลสมมาตร) สังเกตว่าเส้นกระแส $\psi = 0$ มีลักษณะเป็นคลื่นด้านหน้าซึ่งเป็นผลมาจากการดันของการไหลออกจากซอร์สทั้ง 5 ตำแหน่งถ้าเรากระจายซอร์ส บนเส้นตรงให้มีจำนวนมากขึ้นในช่วงความยาวเดียวกันจาก



รูป 3.37 รูปแบบการไหลของการไหลเอกรูปผ่านซอร์สที่วางเรียงในแนวเส้นประขวาง การไหลในแนวตั้งฉากวงกลม แสดงตำแหน่งของซอร์ส ในรูปแสดงการไหลครั้งบน (ก) จำนวนซอร์สเท่ากับ 5 (ข) จำนวนซอร์สเพิ่มเป็น 11 แต่ให้กำลังรวมเท่าเดิม (ค) จำนวนซอร์สเพิ่มเป็น 101 แต่กำลังรวมยังคงเท่าเดิม (ง) จำนวนของซอร์สเป็น 101 แต่ลดกำลังรวมลง (จ) จำนวนของซอร์สเพิ่มขึ้นจนเข้าสู่อนันต์ และลดกำลังรวมจน $q/2 = V_\infty$ (ฉ) เงื่อนไขที่แผ่น (Panel) เอียงทำมุม β กับ V_∞

5 เป็น 11 ตำแหน่งตามรูป 3.37 ข โดยให้กำลังรวมไม่เพิ่มขึ้น ความเป็นคลื่นของเส้นกระแส $\psi = 0$ จะหมดไป เส้นกระแส $\psi = 0$ จะราบเรียบ แต่เส้นกระแสด้านในยังคงแสดงลักษณะการไหลจากซอร์สทั้ง 11 ตำแหน่งให้เห็น ถ้าเรายังเพิ่มจำนวนของซอร์สทั้งหมดออกไปอีกจาก 11 เป็น 101 ตำแหน่งที่ระยะห่างเท่ากันบนแนวเส้นเดิมโดยให้กำลังรวมเท่าเดิม ผลที่ได้ตามรูป 3.37 ค จะแสดงเส้นกระแส $\psi = 0$ ที่มีลักษณะเหมือนเดิมแต่เส้นกระแสด้านในจะไม่แสดงลักษณะการไหลออกจากซอร์สแต่ละตำแหน่งให้เห็นอีก แต่จะมีเส้นกระแสที่พุ่งออกจากแนวที่วางซอร์สไว้จะกระจายออกมาทั้ง 2 ด้านต่อเนื่องกันไป ถาลดกำลังของซอร์สทั้ง 101 ตัวลง ด้านหน้าของเส้นกระแส $\psi = 0$ จะขยับเข้าใกล้แนวของซอร์สที่เรียงกันอยู่และเส้นกระแสที่พุ่งออกจากแนวที่วางซอร์สไว้จะกระจายออกเฉพาะที่พุ่งออกไปทางด้านหลังตามรูป 3.37 ง ต่อไปถ้าเพิ่มจำนวนของซอร์สให้มากขึ้นจนเรียงกัน

แน่นแต่ให้กำลังของซอร์สแต่ละตัวน้อยมากอย่างเหมาะสม เส้นกระแส $\psi = 0$ จะไปอยู่ในตำแหน่งทับกับแนวของซอร์สที่เรียงกันได้ตามรูป 3.37 จ แนวของจุดซอร์สจำนวนมากที่เรียงกันแน่นบนเส้นตรงโดยที่จุดซอร์สแต่ละตัวมีกำลังน้อยจนเกือบเป็นศูนย์นี้ฟอร์มตัวเป็นแนวการแจกแจงของซอร์สเรียกว่า “แผงซอร์สหรือซอร์สแพแนล (Source panel)” ลักษณะสำคัญของซอร์สแพแนล คือ ถ้าจัดให้มีกำลังเหมาะสม ซอร์สแพแนลสามารถจัดให้อยู่ในแนวสัมผัสกับทิศทางการไหลของกระแสหรือวางแทนที่เส้นกระแสใดๆ ของการไหลได้นั่นเอง



รูป 3.38 ซอร์สแพแนลความหนาแน่น $q(t)$ จาก $-L$ ถึง L บนแกน x (Kuethe & Chow, 1997)

พิจารณาซอร์สแพแนลที่มีความหนาแน่นคงที่ $q(t)$ จาก $-L$ ถึง L บนแกน x ตามรูป 3.38 จากสมการ (3.16) ฟังก์ชันกระแสที่จุด $P(x, y)$ เนื่องจากซอร์สที่เรียงอยู่จาก $-L$ ถึง L จะเป็น

$$\psi_s = \frac{1}{2\pi} \int_{-L}^L q(t) dt \tan^{-1} \frac{y}{x-t} \quad (3.152)$$

และความเร็วตามแกน x และ y จะเป็น

$$u_s = \frac{1}{2\pi} \int_{-L}^L q(t) \frac{x-t}{(x-t)^2 + y^2} dt \quad (3.153)$$

$$v_s = \frac{1}{2\pi} \int_{-L}^L q(t) \frac{y}{(x-t)^2 + y^2} dt \quad (3.154)$$

สำหรับ $q(t)$ เป็นค่าคงที่ สมการ (3.153) และ (3.154) อินทิเกรตได้

$$u_s(x, y) = -\frac{q}{2\pi} \ln \left[(x-t)^2 + y^2 \right]^{\frac{1}{2}} \Bigg|_{t=-L}^{t=L} \quad (3.155)$$

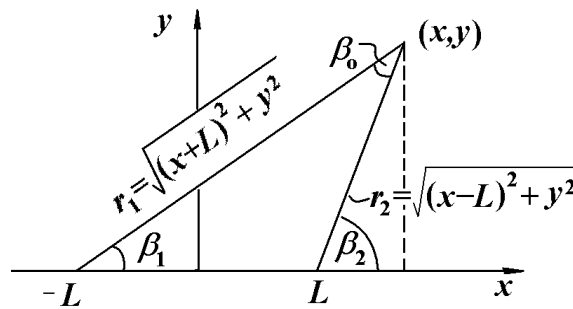
$$v_s(x, y) = \frac{q}{2\pi} \tan^{-1} \frac{y}{x-t} \Bigg|_{t=-L}^{t=L} \quad (3.156)$$

เมื่อแทนค่าขีดจำกัดของการอินทิเกรตจะได้

$$u_s(x, y) = -\frac{q}{2\pi} \ln \frac{(x-L)^2 + y^2}{(x+L)^2 + y^2} \quad (3.157)$$

$$v_s(x, y) = \frac{q}{2\pi} \left[\tan^{-1} \frac{y}{x-L} - \tan^{-1} \frac{y}{x+L} \right] \quad (3.158)$$

เราสนใจความเร็วที่ไล่ไปตามผิวของซอร์สแพแนล คือ u_s และ v_s เมื่อ $y \rightarrow 0$ ในช่วง $-L < x < L$ ค่าอินทิเกรตในสมการ (3.157) และ (3.158) แสดงให้เห็นในรูปเรขาคณิตตามที่แสดงในรูป 3.39 นั่นคือ



รูป 3.39 สมการ (3.157) และ (3.158) แสดงในรูปเรขาคณิต (Kuethe & Chow, 1997)

$$u_s(x, y) = \frac{q}{2\pi} \ln \frac{r_2}{r_1} \quad (3.159)$$

$$\begin{aligned} v_s(x, y) &= \frac{q}{2\pi} [\beta_2 - \beta_1] \\ &= \frac{q}{2\pi} \beta_0 \end{aligned} \quad (3.160)$$

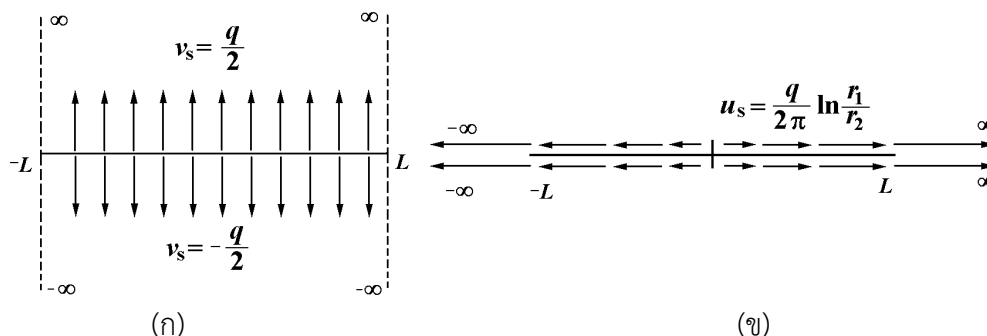
พิจารณาจุด (x, y) ใดๆ ที่ y เข้าสู่อำนาจ 0 จากทางด้านบน (ใช้สัญลักษณ์ $y \rightarrow 0^+$) ในช่วง $-L < x < L$ จุดนี้จะเป็นจุดที่เข้าสู่ผิวซอร์สแพแนลจากทางด้านบน สังเกตว่าตลอดแนว $-L < x < L$ $v_s = \frac{q}{2}$ แต่ถ้าจุด (x, y) เข้าสู่ศูนย์จากทางด้านล่าง (ใช้สัญลักษณ์ $y \rightarrow 0^-$) ความเร็วบนผิวซอร์สแพแนลจะเป็น $v_s = -\frac{q}{2}$ นั่นคือบนผิวซอร์สแพแนลความเร็วในทิศทางตั้งฉากกับแนวของแพแนลเนื่องจากกำลังของซอร์สบนแพแนลจะมีค่าเป็นครึ่งหนึ่งของกำลังต่อหน่วยความยาวของซอร์ส มีทิศทางพุ่งออกทั้งสองด้านของแพแนล และมีค่าคงที่ตลอดความยาวของแพแนล

จากสมการ (3.159) และรูป 3.40 u_s จะมีค่าเป็นศูนย์ที่กึ่งกลางแพแนลและเพิ่มขึ้นเป็น ∞ ที่ L ทางด้านบวก และ u_s จะเพิ่มเป็น $-\infty$ ที่ $-L$ ทางด้านลบ ดังนั้นสำหรับซอร์สแพแนลที่มีกำลัง q คงที่

$$u_s(x, 0^\pm) = \frac{q}{2\pi} \ln \frac{L-x}{L+x} \quad (3.161)$$

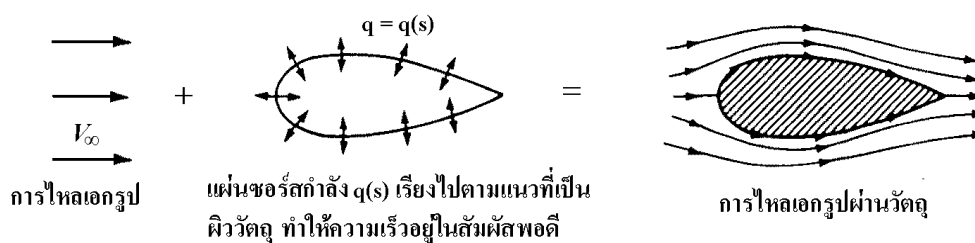
และ

$$v_s(x, 0^\pm) = \pm \frac{q}{2} \quad (3.162)$$



รูป 3.40 ความเร็วบนผิวแพแนลกำลัง q คงที่ (ก) ความเร็วตั้งฉากกับแพแนลมีค่าคงที่ (ข) ความเร็วขนานกับแพแนลมีค่าเป็นศูนย์ที่กึ่งกลางและเพิ่มเป็น $\pm \infty$ ที่ปลาย

จะเห็นว่าเมื่อนำซอร์สแพแนลกำลังต่อความยาว q ไปไว้ในกรไลเอกรูปที่มีความเร็ว V_∞ อย่างในรูป 3.37 จ ถ้าจัดกำลังของซอร์สให้ $\frac{q}{2} = V_\infty$ แล้ว ความเร็ว v_s ที่ผิวแพแนลจะหักล้างกับ V_∞ หมดไปพอดี เหลือแต่ส่วนของความเร็ว u_s ในแนวสัมผัสกับแพแนล นั่นคือซอร์สแพแนลจะอยู่ในแนวเส้นกระแส หรือแทนเส้นกระแสเส้นหนึ่งได้ และสามารถแทนผิววัตถุได้ ในรูป 3.37 ฉ แสดงกรณี ที่ซอร์สแพแนลวางทำมุม β กับกระแสอิสระ ถ้ากำลังของซอร์ส $\frac{q}{2} = V_\infty \cos \beta$ ความเร็วบนผิวแพแนลจะอยู่ในแนวสัมผัสกับแพแนล และแพแนลที่ถูกนำไปวางไว้ในกระแสอิสระนี้จะทำให้กระแสอิสระเปลี่ยนทิศทางไปในทิศทางเดียวกับแนวของแพแนล นั่นคือแพแนลจะทับกับแนวของเส้นกระแสที่เปลี่ยนทิศทางและอาจใช้แทนเส้นกระแสที่เกิดขึ้นได้



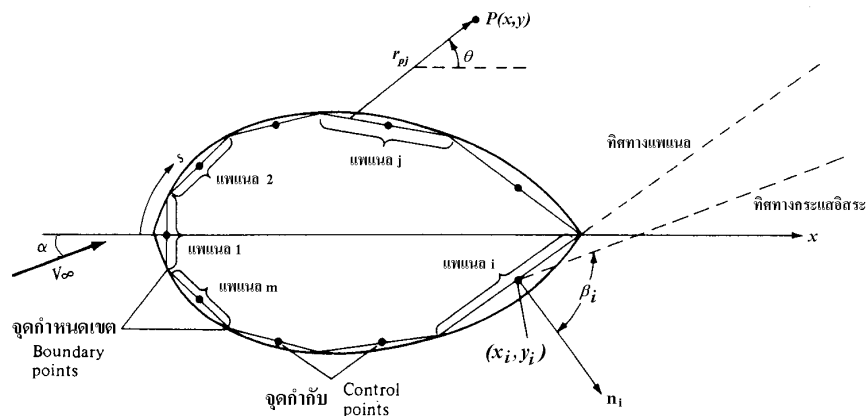
รูป 3.41 การรวมการไหลเอกรูปกับแผ่นซอร์สที่เรียงเป็นเส้นรอบรูปของวัตถุ ทำให้เกิดการไหลผ่านวัตถุ (Katz & Plotkin, 2001)

พิจารณาวัตถุรูปทรงใดๆ ในกระแสอิสระความเร็ว V_∞ ในรูป 3.41 ถ้าเราคลุมผิววัตถุทั้งหมดด้วยแผ่นซอร์สที่มีความหนาแน่น $q(s)$ ที่เปลี่ยนแปลงไปตามตำแหน่งบนผิวในลักษณะที่ความเร็วลัพธ์ของการไหลเอกรูปและการไหลจากแผ่นซอร์สรวมกันอยู่ในแนวสัมผัสกับผิวพอดี แผ่นซอร์สที่มีกำลัง $q(s)$ นี้ก็สามารถแทนผิวของวัตถุได้พอดีเช่นกัน และแทนเส้นกระแสของการไหลเส้นที่ทับกับผิววัตถุนั้นเอง ดังนั้นจึงอาจสรุปได้ว่าปัญหาของเรา คือ การหาฟังก์ชันการเปลี่ยนแปลง $q(s)$ ที่

เหมาะสมกับรูปทรงของวัตถุที่มีรูปร่างต่างๆ เมื่อหาฟังก์ชัน $q(s)$ ได้แล้วการคำนวณหาสนามการไหลรอบวัตถุก็สามารถทำได้โดยง่ายด้วยการรวมการไหลเอกรูปกับการไหลจากซอร์ส $q(s)$ บนแผ่นซอร์สเท่านั้นเอง แต่การหาฟังก์ชัน $q(s)$ จริงๆ ที่เหมาะสมสำหรับรูปทรงที่กำหนดเป็นไปได้ยาก หรือพูดให้ถูกคือเป็นไปได้ไม่ได้ เราจึงต้องใช้แนวทางการวิเคราะห์เชิงตัวเลขมาประมาณ $q(s)$ ดังต่อไปนี้

เนื่องจากเราไม่สามารถหาฟังก์ชันการเปลี่ยนแปลงของ $q(s)$ ที่แท้จริงได้ เราจะประมาณกำลังของแผ่นซอร์ส(source sheet) ที่แทนผิววัตถุด้วยซอร์สแพแนล(source panel) ที่เป็นเส้นตรงเรียงต่อกันไปตามที่แสดงในรูป 3.42 สมมติให้กำลังต่อหน่วยความยาว q มีค่าคงที่บนแพแนลแต่ละแพแนล แต่ให้มีความเปลี่ยนแปลงได้จากแพแนลหนึ่งไปอีกแพแนลหนึ่ง นั่นคือถ้าแทนผิววัตถุด้วยจำนวนแพแนลทั้งหมด n แพแนล กำลังต่อหน่วยความยาวของซอร์สบนแต่ละแพแนลจะเป็น $q_1, q_2, q_3, \dots, q_n$ เช่นเดียวกับในหัวข้อ 3.17 กำลังต่อหน่วยความยาวของซอร์สทั้ง n ตัวนี้เป็นตัวไม่ทราบค่าที่เราพยายามจะหาค่าที่พอดีทำให้ซอร์สแพแนลที่เรียงกันอยู่เป็นเส้นกระแส เงื่อนไขข้อนี้เกิดขึ้นได้โดยที่เรากำหนดให้จุดกึ่งกลางของแต่ละแพแนลเป็นตำแหน่งกำกับ “Control point” ซึ่งส่วนของความเร็วในแนวตั้งฉากกับแพแนลที่ได้จาก $q_j, j = 1$ ถึง n บนแต่ละแพแนลกับการไหลเอกรูปหักล้างกันหมดไปพอดี หรือให้ความเร็วอยู่ในทิศทางสัมผัสกับแพแนล

ให้ P เป็นจุดใดๆ ที่ตำแหน่ง (x, y) ในการไหล ให้ r_{pj} เป็นระยะห่างจากจุดใดๆ บนแพแนล j ถึงจุด P ตามรูป 3.42 ค่าศักย์ความเร็ว (Velocity potential), $\Delta\phi$, ที่จุด P เนื่องจากซอร์สบนแพแนล j จะเป็น



รูป 3.42 การแทนรูปร่างวัตถุด้วยแผ่นซอร์ส (Source panel) (Katz & Plotkin, 2001)

$$\Delta\phi_j = \frac{q_j}{2\pi} \int_j \ln r_{pj} ds_j \quad (3.163)$$

ในสมการ (3.163) s_j เป็นระยะวัดไปตามแนวแพแนล j และค่า q_j คงที่บนแพแนล j ดังนั้นการอินทิเกรตคิดบนช่วงความยาวของแพแนล j สำหรับศักย์ความเร็วที่จุด P เนื่องจากซอร์สบนแพแนลทุกแพแนลจะเป็นผลรวมของ

$$\phi_s(x, y) = \sum_j^n \Delta\phi_j = \sum_j^n \frac{q_j}{2\pi} \int \ln r_{pj} ds_j \quad (3.164)$$

ในสมการ (3.164) ระยะ r_{pj} พิจารณาจากรูป 3.42 จะได้

$$r_{pj} = \sqrt{(x-x_j)^2 + (y-y_j)^2} \quad (3.165)$$

เมื่อ (x_j, y_j) เป็นพิกัดของจุดตามแนวของแพแนล j พิจารณาจุด $P(x_i, y_i)$ ที่เป็นจุดกำกับของแพแนล i ดังแสดงในรูป 3.42 เขียนสมการ (3.164) และ (3.165) ใหม่เป็น

$$\phi_s(x_i, y_i) = \sum_j^n \frac{q_j}{2\pi} \int \ln r_{ij} ds_j \quad (3.166)$$

$$\text{และ} \quad r_{ij} = \sqrt{(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2} \quad (3.167)$$

สมการ (3.166) คือศักย์ความเร็วที่จุดกึ่งกลางแพแนล i ที่เกิดจากซอร์สบนแพแนลทั้งหมดจากแพแนล 1 ถึง แพแนล n

คงจำได้ว่าเงื่อนไขของความเร็วนบนแพแนลต่างๆ คือความเร็วต้องอยู่ในแนวสัมผัสกับแพแนล (เพราะว่าแพแนลแทนผิววัตถุซึ่งถือเป็นเส้นกระแสเส้นหนึ่ง) นั่นคือที่จุดกำกับบนแต่ละแพแนล ส่วนของความเร็วดังฉากกับแพแนลจะเป็นศูนย์ ให้ $\hat{n}_i$ เป็นหน่วยเวกเตอร์ตั้งฉากของแพแนล i มีทิศทางชี้ออกจากผิวตามรูป 3.42 ให้ความชันของแพแนลเป็น $\frac{dy}{dx}$ และให้ทิศทางกระแสอิสระทำมุมปะทะ α กับแกน x ตามรูป 3.42 เมื่อสำรวจรูปจะเห็นว่าส่วนของความเร็ว V_∞ ที่ตั้งฉากกับแพแนล i

$$V_{\infty, n} = \vec{V}_\infty \cdot \hat{n}_i = V_\infty \cos \beta_i \quad (3.168)$$

เมื่อ β_i เป็นมุมระหว่าง $\vec{V}_\infty$ และ $\hat{n}_i$ สังเกตว่า $V_{\infty, n}$ เป็นบวกเมื่อชี้ออกจากผิวและเป็นลบเมื่อชี้เข้าในผิว ส่วนของความเร็วกว่าที่จุด (x_i, y_i) เนื่องจากซอร์สบนแพแนลทั้งหมดในทิศตั้งฉาก¹ จะเป็น

$$V_n = \frac{\partial}{\partial n_i} [\phi_s(x_i, y_i)] \quad (3.169)$$

แทน $\phi_s(x_i, y_i)$ จากสมการ (3.166) และจากสมการ (3.162) ความเร็วที่จุดกึ่งกลางแพแนล i เนื่องจาก ซอร์สบนแพแนล i เองมีค่า $\frac{q_i}{2}$ ดังนั้น

$$V_n = \frac{q_i}{2} + \sum_{\substack{j=1 \\ i \neq j}}^n \frac{q_j}{2\pi} \int \frac{\partial}{\partial n_i} (\ln r_{ij}) ds_j \quad (3.170)$$

ที่จุดกำกับบนแพแนล i ความเร็วดังฉากกับแพแนลเป็นศูนย์ เพราะฉะนั้นจากสมการ (3.168) และ (3.170)

¹ ในการเขียนโปรแกรมคอมพิวเตอร์ การใช้ความเร็วตั้งฉากและขนานกับแพแนลตามสมการ (3.159) และ (3.160) จะใช้ได้สะดวกกว่าการอธิบายในหัวข้อนี้

$$V_{\infty, n} + V_n = \frac{q_i}{2} + \sum_{\substack{j=1 \\ i \neq j}}^n \frac{q_j}{2\pi} \int_j \frac{\partial}{\partial n_i} (\ln r_{ij}) ds_j + V_{\infty} \cos \beta_i = 0 \quad (3.171)$$

สมการนี้เป็นสมการหลักของวิธีซอร์สแพแนล ค่าของการอินทิเกรตจะขึ้นอยู่กับตำแหน่งของแพแนลโดยไม่ขึ้นกับคุณสมบัติของการไหล ถ้าให้ $I_{i,j}$ แทนค่าการอินทิเกรตที่จุดกำกับ i เนื่องจากแพแนล j เขียนสมการ (3.171) ได้ใหม่เป็น

$$\frac{q_i}{2} + \sum_{\substack{j=1 \\ i \neq j}}^n \frac{q_j}{2\pi} I_{i,j} + V_{\infty} \cos \beta_i = 0 \quad (3.172)$$

เหมือนในหัวข้อ 3.17 สมการ (3.172) เป็นชุดสมการพีชคณิต n สมการที่มีตัวไม่ทราบค่า n ตัว $q_1, q_2, q_3, \dots, q_n$ ที่แสดงผลของซอร์สบนแพแนล 1 ถึง n ซึ่งเหนี่ยวนำให้เกิดความเร็วขึ้นที่จุดกำกับ (Control point) บนแพแนล i เมื่อ $i = 1$ ถึง n ชุดของสมการเมื่อแก้แล้วจะให้ค่า q_1 ถึง q_n ซึ่งเป็นการแจกแจงกำลังของซอร์สแพแนลที่เรียงไปตามผิววัตถุที่พอดีทำให้แพแนลเป็นเส้น กระแสของการไหล จะเห็นว่าการประมาณค่า q ด้วยวิธีนี้สามารถเพิ่มความละเอียดขึ้นได้โดยการเพิ่มจำนวนแพแนลที่ใช้แทนผิววัตถุ เนื่องจากการเพิ่มจำนวนแพแนลขึ้นจะทำให้แพแนลที่เรียงกันมีรูปร่างใกล้เคียงเส้นรอบรูปวัตถุมากขึ้น และมีกำลังต่อเนื่อง $q(s)$ ไหลไปตามผิวอย่าง que แสดงในรูป 3.41 ที่จริงแล้วเราพบจากการคำนวณว่าความแม่นยำของวิธีซอร์สแพแนลมีมากจนน่าอัศจรรย์ ทรงกระบอกกลม (ที่จะแสดงในตัวอย่าง) สามารถใช้ซอร์สแพแนลเพียง 8 แพแนล แทนผิวทรงกระบอกในการคำนวณได้อย่างถูกต้อง ในขณะที่รูปทรงแบบแพนอากาศส่วนใหญ่จะใช้ จำนวนแพแนลระหว่าง 50 ถึง 100 (ในกรณีของแพนอากาศ จำเป็นต้องแทนผิวช่วงด้านหน้าโดยใช้แพแนลสั้นๆ จำนวนมากเพื่อให้เหมาะสมกับผิวที่มีลักษณะโค้งมาก และใช้แพแนลที่ยาวขึ้นในช่วงหลังที่ผิวมีลักษณะแบนราบ สังเกตว่าในกรณีทั่วไปแพแนลในรูป 3.42 ไม่จำเป็นต้องมีขนาดเท่ากัน)

ค่า q_1 ถึง q_n จะนำไปคำนวณส่วนของความเร็วสัมผัสกับผิวของแพแนลที่แต่ละจุดกำกับโดยใช้ s เป็นระยะวัดไปตามผิวจากหน้าไปหลังตามรูป 3.42 ส่วนของความเร็วสัมผัสกับผิวเนื่องจากกระแสอิสระ จะเป็น

$$V_{\infty, t} = V_{\infty} \sin \beta_i \quad (3.173)$$

ส่วนความเร็วสัมผัสที่จุดกำกับบนแพแนล i เนื่องจากแพแนล j ได้จาก

$$V_t = \frac{\partial \phi}{\partial s} = \sum_{j=1}^n \frac{q_j}{2\pi} \int_j \frac{\partial}{\partial s_i} (\ln r_{ij}) ds_j \quad (3.174)$$

จากสมการ (3.161) ความเร็วขนานกับแพแนลเนื่องจากซอร์สบนแพแนลเองที่จุดกึ่งกลางแพแนลจะเป็นศูนย์ ดังนั้นในสมการ (3.174) เทอมที่ $i = j$ จะเป็นศูนย์ ความเร็วในแนวสัมผัสที่จุดกำกับบนแพแนล i , $\vec{V}_i$ จะเป็นผลรวมของความเร็วจากกระแสอิสระรวมกับจากซอร์สแพแนล

$$\vec{V}_i = V_{\infty, t} + V_t = V_{\infty} \sin \beta_i + \sum_{j=1}^n \frac{q_j}{2\pi} \int_j \frac{\partial}{\partial s_i} (\ln r_{ij}) ds_j \quad (3.175)$$

และสัมประสิทธิ์ความดันที่จุดกำกับบนแพแนล i จะเป็น

$$c_{p,i} = 1 - \left(\frac{V_i}{V_\infty} \right)^2 \quad (3.176)$$

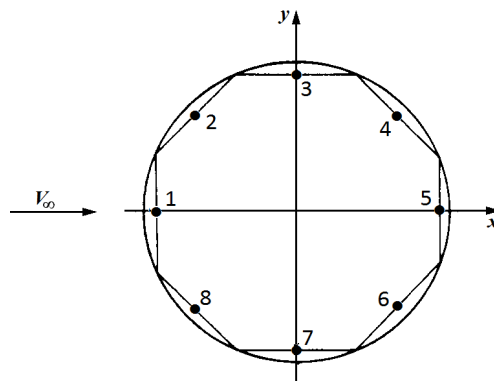
ด้วยวิธีการเช่นนี้ วิธีซอร์สแพแนลจะให้รายละเอียดการแจกแจงความดันรอบผิววัตถุรูปทรงต่างๆ ที่ไม่เกิดแรงยก

ขั้นตอนทั้งหมดสามารถตรวจสอบความถูกต้องของการคำนวณได้ดังนี้ ถ้า s_j เป็นช่วงความยาวของแพแนล j ในช่วงนี้กำลังต่อหน่วยความยาวของซอร์ส q_j มีค่าคงที่ ดังนั้นกำลังของแพแนล j จะเท่ากับ $q_j s_j$ สำหรับรูปปิดอย่างในรูป 3.42 กำลังรวมของซอร์ส และ ซิงค์ จะเป็นศูนย์เสมอ ถ้าไม่เช่นนั้นจะกลายเป็นว่าตัววัตถุมีการปล่อยมวลหรือดูดซับมวลของการไหลไว้บางส่วน ซึ่งขัดต่อกฎทรงมวลที่เราใช้พิจารณา นั่นคือค่า q_j ที่คำนวณได้จะต้องสอดคล้องกับความสัมพันธ์

$$\sum_{j=1}^n q_j s_j = 0 \quad (3.177)$$

สมการ (3.177) เป็นวิธีตรวจสอบความถูกต้องของผลการคำนวณ q_j ได้เป็นอย่างดี

ตัวอย่าง 3.14 จงคำนวณการแจกแจงสัมประสิทธิ์ความดันรอบทรงกระบอกกลมโดยใช้วิธีซอร์สแพแนล (Source panel method)



รูป 3.43 การกระจายซอร์สแพแนลรอบทรงกระบอกเพื่อแทนผิว

วิธีทำ เลือกแทนผิวทรงกระบอกกลมด้วยซอร์สแพแนลที่มีระยะเท่ากันจำนวน 8 แพแนลตามที่แสดงในรูป ประสพการณ์แสดงว่าการจัดในรูปจะให้ความถูกต้องได้อย่างเพียงพอ ให้หมายเลขแพแนลเป็น 1 ถึง 8 และจุดกำกับแสดงด้วยจุดดำประมาณค่า $I_{i,j}$ ในสมการ (3.172) โดยดูจากรูป 3.44 ซึ่งแสดงตำแหน่งเทียบกันของสองแพแนลใดๆ บนผิวทรงกระบอก ให้ (x_i, y_i) เป็นพิกัดของจุดกำกับของแพแนล i (x_j, y_j) เป็นพิกัดของจุดใดๆ บนแพแนล j ให้พิกัดของจุดปลายขอบ (Boundary point) ของแพแนล i เป็น (X_i, Y_i) และ (X_{i+1}, Y_{i+1}) ของแพแนล j เป็น (X_j, Y_j) และ (X_{j+1}, Y_{j+1}) ในตัวอย่างนี้ V_∞ อยู่ในทิศทาง x ดังนั้นมุมระหว่างแกน x และ หน่วยเวกเตอร์ $\hat{n}_i$ และ $\hat{n}_j$ เป็น β_i และ β_j ตามลำดับ สังเกตด้วยว่ามุม β มีค่าได้จาก 0 ถึง 2π

ค่าอินทิเกรต $I_{i,j}$ ประมาณที่จุดกึ่งกลางของแพแนล i โดยอินทิเกรตตลอดความยาวของแพแนล j ดังนั้นเราประมาณค่า $I_{i,j}$ จาก

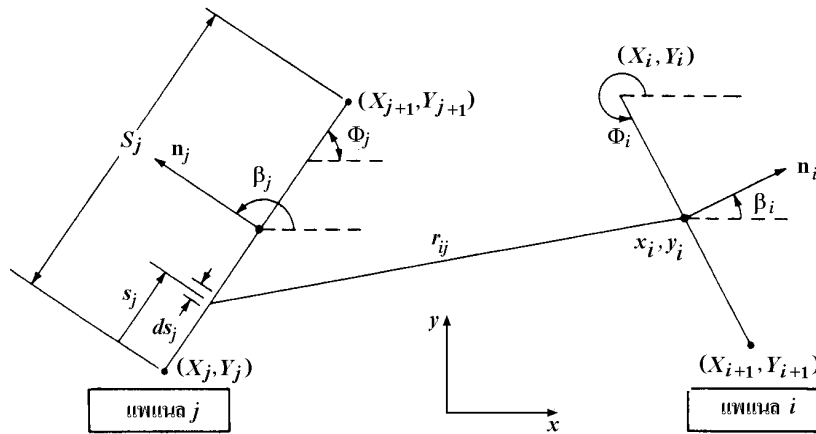
$$I_{i,j} = \int_j \frac{\partial}{\partial n_i} (\ln r_{ij}) ds_j$$

เพราะ

$$r_{ij} = \sqrt{(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2}$$

$$\begin{aligned} \text{ดังนั้น} \quad \frac{\partial}{\partial n_i} (\ln r_{ij}) &= \frac{1}{r_{ij}} \frac{\partial r_{ij}}{\partial n_i} \\ &= \frac{1}{r_{ij}} \frac{1}{2} [(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2]^{-\frac{1}{2}} \left[2(x_i - x_j) \frac{\partial x_i}{\partial n_i} + 2(y_i - y_j) \frac{\partial y_i}{\partial n_i} \right] \end{aligned}$$

$$\text{หรือ} \quad \frac{\partial}{\partial n_i} (\ln r_{ij}) = \frac{(x_i - x_j) \cos \beta_i + (y_i - y_j) \sin \beta_i}{(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2} \quad (i)$$



รูป 3.44 พิกัดที่ใช้ประมาณค่า $I_{i,j}$

ในรูป 3.44 มุม Φ_i และ Φ_j วัดทวนเข็มนาฬิกาจากแกน x ถึงด้านล่างของแพแนล i และ j (ด้านล่างหมายถึงด้านที่หันเข้าด้านในตัววัตถุ) จะได้

$$\beta_i = \Phi_i + \frac{\pi}{2}$$

$$\text{ดังนั้น} \quad \sin \beta_i = \cos \Phi_i \quad \text{และ} \quad \cos \beta_i = -\sin \Phi_i \quad (ii)$$

และจากรูป 3.44

$$x_j = X_j + s_j \cos \Phi_j \quad \text{และ} \quad y_j = Y_j + s_j \sin \Phi_j \quad (iii)$$

แทนค่าสมการ (i) ถึง (iii) ใน $I_{i,j}$ จะได้

$$I_{i,j} = \int_0^{l_j} \frac{Cs_i + D}{s_j^2 + 2As_j + B} ds_j$$

เมื่อ

$$A = (x_i - x_j) \cos \Phi_j - (y_i - y_j) \sin \Phi_j$$

$$B = (x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2$$

$$C = \sin (\Phi_i - \Phi_j)$$

$$D = (y_i - y_j) \cos \Phi_i - (x_i - x_j) \sin \Phi_i$$

$$l_j = \sqrt{(X_{j+1} - X_j)^2 + (Y_{j+1} - Y_j)^2}$$

ถ้าให้

$$E = \sqrt{B - A^2} = (x_i - x_j) \sin \Phi_j - (y_i - y_j) \cos \Phi_j$$

จะได้ค่าการอินทิเกรตสำหรับ $I_{i,j}$ จากตารางมาตรฐานของการอินทิเกรต

$$I_{i,j} = \frac{C}{2} \ln \left(\frac{l_j^2 + 2Al_j + B}{B} \right) + \frac{D - AC}{E} \left(\tan^{-1} \frac{l_j + A}{E} - \tan^{-1} \frac{A}{E} \right) \quad (\text{iv})$$

สมการ (iv) เป็นค่าทั่วไปสำหรับสองแพแนลใดๆ บนผิววัตถุไม่จำเป็นต้องเป็นทรงกระบอก เพื่อแสดงเป็นตัวอย่าง เลือกแพแนล 4 เป็นแพแนล i และ แพแนล 2 เป็น แพแนล j จากรูป 3.43 คำนวณ $I_{4,2}$ ได้จาก (สมมติรัศมีทรงกระบอกเป็น 1)

$$X_j = -0.9239 \quad X_{j+1} = -0.3827 \quad Y_i = 0.3827 \quad Y_{j+1} = 0.9239$$

$$\Phi_i = 315^\circ \quad \Phi_j = 45^\circ \quad x_i = 0.6533 \quad y_i = 0.6533$$

หลังแทนค่าลงใน A, B, C, D, l_j และ E จะได้

$$A = -1.3065 \quad B = 2.5607 \quad C = -1 \quad D = 1.3065$$

$$l_j = 0.7654 \quad E = 0.9239$$

แทนค่าใน (iv)

$$I_{4,2} = 0.4018$$

ทำนองเดียวกัน เราอาจคำนวณผลของแพแนล j อื่นๆ บนแพแนล 4 ได้ $I_{4,1} = 4.074$; $I_{4,3} = 0.3528$; $I_{4,5} = 0.3528$; $I_{4,6} = 0.4018$; $I_{4,7} = 0.4074$ และ $I_{4,8} = 0.4084$ ดังนั้น เขียนสมการ (3.172) สำหรับแพแนล 4 ได้ (หลังจากคูณทุกเทอมด้วย 2 และ $\beta_i = 45^\circ$ สำหรับแพแนล 4)

$$0.4074q_1 + 0.4018q_2 + 0.3528q_3 + pq_4 + 0.3528q_5 + 0.4018q_6 + 0.4074q_7 + 0.4084q_8 = -0.7071(2\pi V_\infty) \quad (\text{v})$$

สมการทำนองเดียวกับสมการ (v) สำหรับแพแนลอื่นๆ จะคำนวณได้ด้วยวิธีเดียวกัน สุดท้ายจะได้ชุดของสมการในรูปเมทริก เป็น

$$\begin{bmatrix} 3.1416 & .3528 & .4018 & .4074 & .4084 & .4074 & .4018 & .3528 \\ .3528 & 3.1416 & .3528 & .4018 & .4074 & .4084 & .4074 & .4018 \\ .4018 & .3528 & 3.1416 & .3528 & .4018 & .4074 & .4084 & .4074 \\ .4074 & .4018 & .3528 & 3.1416 & .3528 & .4018 & .4074 & .4084 \\ .4084 & .4074 & .4018 & .3528 & 3.1416 & .3528 & .4018 & .4074 \\ .4074 & .4084 & .4074 & .4018 & .3528 & 3.1416 & .3528 & .4018 \\ .4018 & .4074 & .4084 & .4074 & .4018 & .3528 & 3.1416 & .3528 \\ .3528 & .4018 & .4074 & .4084 & .4074 & .4018 & .3528 & 3.1416 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q'_1 \\ q'_2 \\ q'_3 \\ q'_4 \\ q'_5 \\ q'_6 \\ q'_7 \\ q'_8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.000 \\ .7071 \\ .000 \\ -.7071 \\ -1.000 \\ -.7071 \\ .000 \\ .7071 \end{bmatrix}$$

เมื่อ $q'_i = \frac{q_i}{2\pi} V_\infty$ ชุดของสมการแก้ได้ค่า q_1 ถึง q_8 ดังนี้

$$\begin{aligned}
 \frac{q_1}{2\pi} V_\infty &= 0.3765 & \frac{q_2}{2\pi} V_\infty &= 0.2662 & \frac{q_3}{2\pi} V_\infty &= 0 \\
 \frac{q_4}{2\pi} V_\infty &= -0.2662 & \frac{q_5}{2\pi} V_\infty &= -0.3765 & \frac{q_6}{2\pi} V_\infty &= -0.2662 \\
 \frac{q_7}{2\pi} V_\infty &= 0 & \frac{q_8}{2\pi} V_\infty &= 0.2662
 \end{aligned}$$

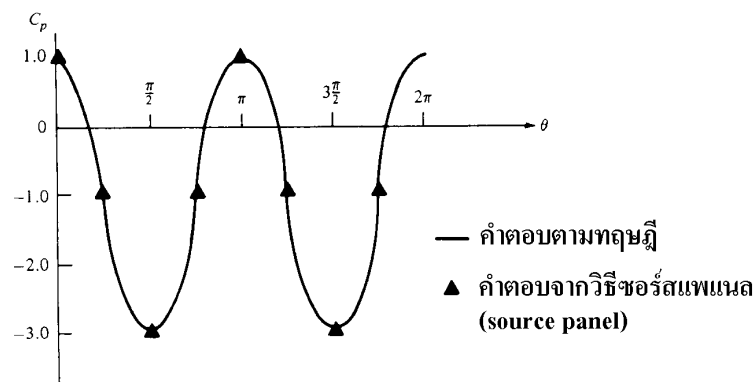
สังเกตว่าคำตอบที่ได้สมมาตรกัน ซึ่งเป็นไปตามที่คาดสำหรับทรงกระบอกกลมที่ไม่มีแรงยก นอกจากนี้เพราะทุกแพแนลมีความยาวเท่ากัน สมการ (3.177) จะเขียนได้เป็น

$$\sum_{j=1}^n q_j = 0$$

เมื่อแทนค่า q_j จากด้านบน จะเห็นว่าสอดคล้องกับสมการ

ความเร็วที่จุดกำกับบนแพแนล i ได้จากสมการ (3.175) ในสมการค่าการอินทิเกรตบนแพแนล i จะขึ้นอยู่กับรูปร่างซึ่งประมาณค่าได้เหมือนที่ผ่านมา ผลลัพธ์คือ

$$\int_j \frac{\partial}{\partial s_i} (\ln r_{ij}) ds_j = \frac{D-AC}{2E} \ln \frac{l_j^2 + 2Al_j + B}{B} - C \left(\tan^{-1} \frac{l_j + A}{E} - \tan^{-1} \frac{A}{E} \right) \quad (\text{vi})$$



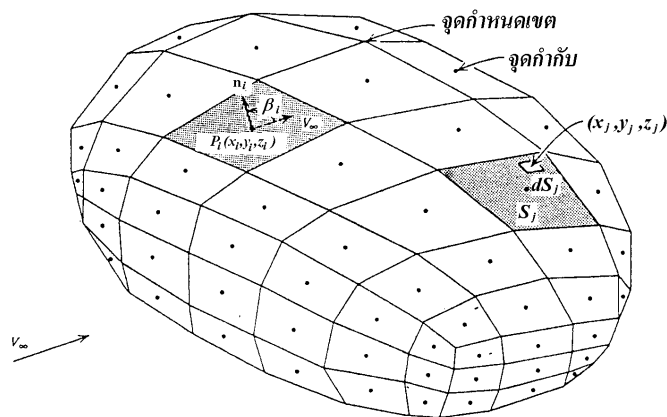
รูป 3.45 สัมประสิทธิ์ความดันบนทรงกระบอกกลมคำนวณด้วยวิธีซอร์สแพแนล โดยใช้แพแนล 8 แพแนล เปรียบเทียบกับคำตอบจริง

เมื่อแทน q_i ที่คำนวณได้ และค่าอินทิเกรตในสมการ (vi) ในสมการ (3.175) จะได้ความเร็ว $V_1, V_2, V_3, \dots, V_8$ และสัมประสิทธิ์ความดันจะคำนวณได้โดยตรงจาก

$$c_{p,i} = 1 - \left(\frac{V_i}{V_\infty} \right)^2 \quad (3.176)$$

ผลลัพธ์ที่ได้ถูกนำมาเปรียบเทียบกับค่า c_p จากหัวข้อ 3.13 ในรูป 3.45 จะเห็นว่าผิวทรงกระบอกที่สร้างจากซอร์สแพนแนลอย่างหยาบๆ ให้ค่า c_p ที่คำนวณได้มีความถูกต้องสอดคล้องกับคำตอบแม่นยำตรงจนน่าประหลาดใจ

ก่อนจะจบหัวข้อนี้ ขอให้สังเกตว่าถึงแม้เราจะสามารถใช้ซอร์สแพนแนลแทนผิวแพนอากาศที่มีรูปร่างอย่างใดก็ได้ที่มีการไหลเอกรูปไหลผ่านนั้น เราจำกัดการพิจารณาไว้แค่รูปทรงที่ไม่สร้างแรงยกเท่านั้น แต่ในกรณีที่มีแรงยกเกิดขึ้นเราจะพบในบทที่ 4 ว่าวอร์เทกซ์แพนแนล (Vortex panel) จำเป็นต้องถูกนำมาใช้ร่วมกับซอร์สแพนแนล (Source panel) เพื่อทำให้เกิดการหมุนวน (Circulation) ขึ้นรอบแพนอากาศเพื่อให้สอดคล้องกับสภาพที่มีการเกิดแรงยก



รูป 3.46 การใช้ซอร์สแพนแนลแทนวัตถุ 3 มิติ (Anderson, 2016)

ที่น่าสนใจอีกข้อหนึ่งคือ สำหรับวัตถุ 3 มิติ ที่ไม่เกิดแรงยกอาจแทนได้ด้วยซอร์สแพนแนลเช่นกัน อย่างในรูป 3.46 จุดที่ขอบ (Boundary point) ซึ่งเป็นจุดตัดของแพนแนลและผิววัตถุ และจุดกำกับแสดงให้เห็นในรูป การคำนวณจะซับซ้อนกว่ามาก และจำนวนแพนแนลที่ต้องใช้แทนผิววัตถุมีจำนวนมาก รวมทั้งการอินทิเกรตตามเส้นจะเปลี่ยนเป็นการอินทิเกรตตามผิว อย่างไรก็ตามหลักการและแนวคิดทั้งหมดจะเหมือนที่เราพิจารณาในหัวข้อนี้ทุกประการ

แบบฝึกหัดบทที่ 3

1. ฟังก์ชันกระแส (Stream function) ของการไหลไร้การอัดตัว 2 มิติ มีค่าตามสมการ

$$\psi = x^2 + 2y$$

ก) จงหาขนาดและทิศทางของความเร็วที่จุด (2, 3)

ข) ที่จุด (2, 3) จงหาว่า ส่วนย่อยของความเร็วที่มีทิศทางทำมุม 30° กับแกน x มีค่าเท่าใด

2. การไหล 2 มิติ ไร้การอัดตัวกำหนดด้วยฟังก์ชันกระแส (Stream function)

$$\psi = x^2 + y^3$$

จงเขียนสมการเส้นกระแส (Streamline) ที่ผ่านจุด (2, 1) และจงแสดงว่าขนาดของความเร็วที่จุด (2, 1)

เท่ากับค่าสมบูรณ์ของเกรเดียน $\nabla\psi$ ที่จุด (2, 1) และจงแสดงว่าทิศทางของความเร็วจะตั้งฉากกับ $\nabla\psi$

3. ฟังก์ชันกระแสของการไหลสองมิติไร้การอัดตัว เป็น

$$\psi = \frac{\Gamma}{2\pi} \ln r$$

จงแสดงว่าการหมุนวน (Circulation) รอบโค้งปิดที่ล้อมรอบจุดกำเนิดมีค่าเท่ากับ Γ และไม่ขึ้นอยู่กับค่า r และจงหาค่าการหมุนวน สำหรับคาร์ดมีอันหนึ่ง

4. ความเร็ว ของการไหลกำหนดโดย

$$u = x^2 + y^2 ; v = -2xy$$

จงหาอินทิเกรตของ $\vec{V}$ ตามโค้ง s ระหว่างจุด (0, 0) และ (1, 2) สำหรับกรณีต่อไปนี้

ก) s เป็นเส้นตรง

ข) s เป็นพาราโบลา ที่มีจุดยอดที่จุดกำเนิด และเปิดไปทางขวา

ค) s เป็นส่วนของเส้นตามแกน x และเส้นตรงตั้งฉากกับแกน x

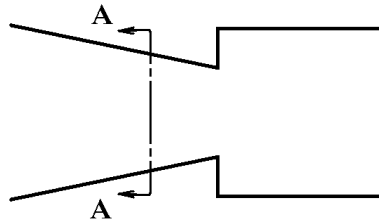
5. สนามความเร็ว ถูกกำหนดด้วย $u = 2xy ; v = x^2 + 1$ จงหาค่าศักย์ความเร็ว ϕ

6. สนามการไหลสองมิติอธิบายด้วยฟังก์ชันกระแส $\psi = x^2 - y$ จงหาค่าของ $\nabla p/\rho$ ที่จุด (1, 2)

7. นำท่อปิโตไทป์ไปไว้ในลำธาร โดยให้ปลายเปิดขนานกับกระแส น้ำ ถ้าระดับน้ำในส่วนของท่อที่อยู่ในแนวตั้งสูงขึ้นเหนือระดับน้ำ 5 cm จงหาความเร็วของกระแส

8. แพนอากาศเคลื่อนที่ที่ระดับน้ำทะเลด้วยความเร็ว 180 km/hr จงหาความดันที่จุดชะงัก (Stagnation) บนแพนอากาศ พิจารณาจุดบนแพนอากาศที่ความเร็วกระแสอากาศเทียบกับแพนอากาศเป็น 60 m/s จงหาความดันที่จุดนี้

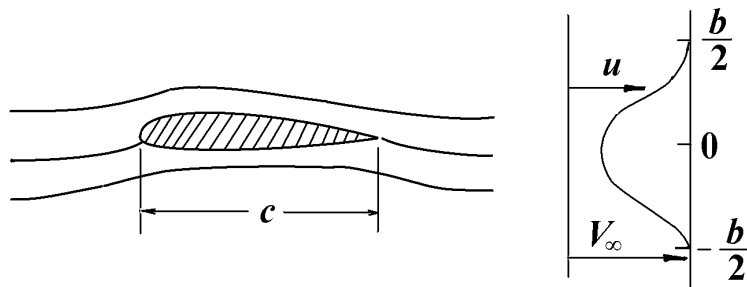
9. อากาศที่ระดับน้ำทะเลถูกส่งเข้าในถังสุญญากาศผ่านท่อที่แสดงในรูป ความดันที่ตำแหน่ง AA ในท่อเป็น $9.33 \times 10^4 \text{ N/m}^2$ จงหาความเร็วที่ตำแหน่ง AA สมมติการไหลเป็นไม่มีการอัดตัว ไม่คิดผลของความหนืด



10. การแจกแจงความเร็วที่ระยะห่าง 0.4 คอร์ดหลังแพนอากาศวัดได้ตามแสดงในรูป พบว่าความกว้างของ wake ครึ่งหนึ่ง $b/2 = 0.1$ คอร์ด และการแจกแจงใน wake แสดงได้ด้วยสมการ

$$u = V_\infty \left[1 - 0.83 \cos^2 \left(\frac{\pi y}{b} \right) \right]$$

จงหาค่าสัมประสิทธิ์แรงต้านของแพนอากาศ c_d



11. นำวอร์เทกกำลัง Γ ไว้ที่ตำแหน่ง $(0, y_0)$ และวอร์เทกกำลัง $-\Gamma$ ไว้ที่ตำแหน่ง $(0, -y_0)$ ถ้าให้ระยะ y_0 เข้าสู่ศูนย์โดยให้คงผลคูณ Γy_0 ไว้คงที่ จงแสดงว่าฟังก์ชันกระแสที่เป็นผลลัพธ์ จะอยู่ในรูปเดียวกับที่ได้จากจุดซ้อน (Doublet) บนแกน x

12. สนามความเร็ว อธิบายโดยฟังก์ชันกระแส

$$\psi = 100y \left(1 - \frac{25}{r^2} \right) + \frac{628}{2\pi} \ln \frac{r}{5}$$

จงหา ก) รูปร่างของเส้นกระแสผ่านจุดชะงัก (Stagnation streamline)

ข) ตำแหน่งของจุดชะงัก (Stagnation point)

ค) ค่าการหมุนวน (Circulation) รอบวัตถุ

ง) ความเร็วที่ ∞

จ) แรงกระทำบนผิววัตถุ

13. พิจารณาซอร์สแพนเนล (Source panel) ความยาว l และความหนาแน่นคงที่ q วางทับแกน y จงแสดงให้เห็นว่า ค่าศักย์ความเร็ว (Velocity potential) ที่จุด (x, y) เนื่องจากซอร์สแพนเนล เป็น

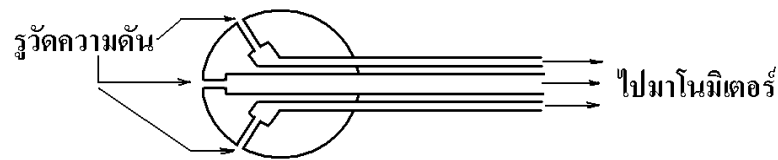
$$\phi(x, y) = \frac{q}{2\pi} \int_{y_1}^{y_1+l} \ln[x^2 + (y - y_0)^2] dy_0$$

เมื่อ y_1 เป็นตำแหน่งบนแกน y ของปลายล่างของแพนเนลจากแกน x หลังจากนั้นจงพิสูจน์ว่า ส่วนของความเร็วที่จุดจะเป็น

$$u(x, y) = \frac{q}{2\pi} \left[\tan^{-1} \left(\frac{y - y_1}{x} \right) - \tan^{-1} \left(\frac{y - y_1 - l}{x} \right) \right]$$

$$v(x, y) = \frac{q}{2\pi} \{ \ln [x^2 + (y - y_1)^2] - \ln [x^2 + (y - y_1 - l)^2] \}$$

14. พิจารณาการไหลผ่านทรงกระบอกกลมที่เกิดแรงยกที่มีรัศมี R เมื่อมีค่าการหมุนวน Γ ถ้า V_∞ เพิ่มขึ้นสองเท่าโดย Γ มีค่าเท่าเดิม อยากทราบว่ารูปร่างของเส้นกระแสจะเป็นเช่นเดิมหรือไม่
15. ท่อวัดความเร็วมีส่วนหัวเป็นทรงกระบอกโดยมีรูเจาะไว้ 3 รู ในแนวรัศมีตามรูปใช้วัดทิศทางความเร็วกระแสได้ เมื่อใดก็ตามที่ความดันจากรูด้านข้างเท่ากัน ความดันจากรูด้านหน้าจะเป็นความดันเบ็ดเสร็จ (Stagnation pressure) เรียกอุปกรณ์นี้ว่า Cylindrical yaw probe
- ก) ถ้าจะใช้รูด้านข้างวัดความดันสถิตของกระแสอิสระ p_∞ ตำแหน่งเจาะรูควรอยู่ที่ตำแหน่งใด
- ข) ถ้าตำแหน่งเจาะรูเป็นตามข้อ (ก) จงหาความไวของ probe ที่กำหนดโดยการเปลี่ยนค่าความดันต่อการเปลี่ยนมุมไป 1 หน่วย (i.e., $\frac{\partial p}{\partial \theta}$)



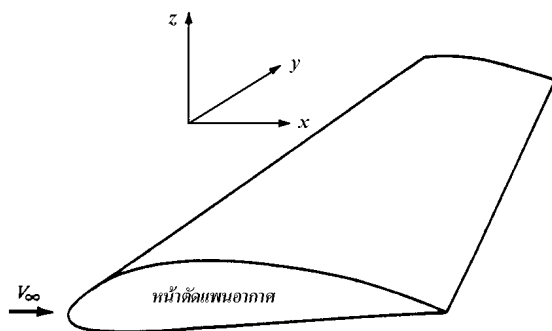
บทที่ 4

การไหลไร้การอัดตัวผ่านแพนอากาศ

4.1 ความนำ

ในบทที่ 3 ได้พิจารณาการไหลไร้การหมุนไร้การอัดตัวผ่านวัตถุโดยใช้เทคนิคต่างๆ ไปบ้างแล้ว แต่การพิจารณาข้างต้นยังจำกัดอยู่เฉพาะกรณีของรูปทรงสมมาตรที่ไม่เกิดแรงยก สำหรับกรณีของการไหลผ่านแพนอากาศที่เกิดแรงยก (แพนอากาศที่ไม่สมมาตร หรือมีมุมปะทะ) ซึ่งเป็นกรณีที่เราน่าสนใจเพราะกลไกพื้นฐานของการบินมีอยู่สำคัญอยู่ที่การสร้างแรงยกบนปีกของอากาศยาน (หรือปีกหมุนของเฮลิคอปเตอร์) นั่นจะเป็นเนื้อหาของบทนี้ ในช่วงปี ค.ศ.1912 - 1918 การค้นคว้าของ “Prof. Ludwig Prandtl” และคณะที่มหาวิทยาลัยก๊อตติงเกิน (University of Göttingen) เยอรมันนี แสดงให้เห็นว่าการพิจารณาอากาศพลศาสตร์ของปีกอาจแบ่งออกได้เป็นสองส่วน (Anderson, 2016) คือ การศึกษาการไหลสองมิติผ่านภาคตัดขวางของปีกหรือแพนอากาศ และการปรับคุณสมบัติของแพนอากาศในสองมิติเพื่อนำมาใช้ในการไหลสามมิติผ่านปีกทั้งอัน ข้อพิจารณาอันนี้ยังคงใช้อยู่ในปัจจุบัน อันที่จริงแล้วการวิจัยจำนวนไม่น้อยในช่วงทศวรรษที่ 70 และ 80 ขององค์การบริหารการบินและอวกาศแห่งชาติของสหรัฐอเมริกา (NASA) จะเกี่ยวข้องกับการคำนวณและการทดลองคุณสมบัติของแพนอากาศแบบใหม่ๆ ดังนั้นอาศัยแนวทางนี้เราจะทำการศึกษาการไหลผ่านแพนอากาศในบทนี้และศึกษาการไหลผ่านปีกในบทที่ 5

พิจารณาปีกในรูป 4.1 ให้แนวยาวของปีก (แนวกางปีก “span”) อยู่ในทิศทาง y กระแสอิสระ V_∞ ขนานกับระนาบ xz หน้าตัดขวางใดๆ ของปีกที่เกิดจากรอยตัดโดยระนาบขนานกับระนาบ xz เรียกว่า “แพนอากาศ” (Airfoil, Aerofoil) ความมุ่งหมายของเราในบทนี้คือการแสดงวิธีการทางทฤษฎีที่นำมาใช้คำนวณคุณสมบัติของแพนอากาศเหล่านี้ โดยใช้ทฤษฎีการไหลไร้ความหนืดไร้การอัดตัวอย่าลืมว่าเพราะเราพิจารณาเฉพาะการไหลไร้ความหนืด (Inviscid flow) วิธีการในบทนี้ย่อมไม่สามารถ



รูป 4.1 นิยามของแพนอากาศ

ทำนายแรงต้านที่เกิดขึ้นบนแพนอากาศได้

อย่างไรก็ตามการที่แรงยกและโมเมนต์ที่เกิดขึ้นบนแพนอากาศเป็นผลส่วนใหญ่มาจากการแจกแจงความดันรอบแพนอากาศซึ่ง (ก่อนจะถึงมุม stall) สามารถทำนายได้โดยใช้ทฤษฎีการไหลไร้ความหนืดไร้การอัดตัว การทำนายแรงยกและโมเมนต์ทางอากาศพลศาสตร์โดยสมมุติการไหลไร้ความหนืดจึงอาจทำได้อย่างใกล้เคียงทางทฤษฎี

4.2 การกำหนดรูปร่างแพนอากาศ (Airfoil Nomenclature)

ความพยายามที่จะพัฒนารูปร่างแพนอากาศที่มีประสิทธิภาพสูงเริ่มต้นมาตั้งแต่ก่อนการทำการบินครั้งแรกของพี่น้องตระกูลไรท์ (Wright) การวิเคราะห์โดยใช้ทฤษฎีไฮโดรไดนามิกส์ (Hydrodynamics) ประสบผลสำเร็จในการทำนายแรงยกบนแพนอากาศรูปทรงต่างๆ แต่การวิเคราะห์รูปทรงแพนอากาศจำเป็นต้องใช้วิธีการที่สลับซับซ้อน และไม่สามารถให้รูปทรงที่ให้ประโยชน์สูงสุดได้ในแง่สมรรถนะ การพิจารณาคูณลักษณะเฉพาะของแพนอากาศรูปทรงต่างๆ จึงจำเป็นต้องใช้ข้อมูลที่ได้จากการทดสอบที่มีบรรทัดฐานจากทฤษฎีเป็นตัวกำหนด

รูปร่างแพนอากาศที่ได้รับการจดทะเบียนครั้งแรกพัฒนาโดย “Harotio F. Phillips” ชาวอังกฤษในปี ค.ศ.1884 (Anderson, 2016) ซึ่งเป็นบุคคลแรกที่ทำทดสอบแพนอากาศอย่างจริงจังในอุโมงค์ลม ต่อมาในปี ค.ศ.1902 พี่น้องตระกูลไรท์ (The Wright brothers, Orville; August 19, 1871 – January 30, 1948 and Wilbur; April 16, 1867 – May 30, 1912) ได้ทำการทดสอบแพนอากาศแบบต่างๆ ซึ่งพวกเขาออกแบบเองเพื่อหารูปร่างที่ดีที่สุด สิ่งนี้เองที่ช่วยให้พวกเขาเป็นบุคคลแรกที่ประสบความสำเร็จในการทำการบิน ในช่วงนี้รูปร่างของแพนอากาศไม่มีการกำหนดที่เป็นมาตรฐาน แต่จะกำหนดเอาตามความพอใจและประเพณีนิยมของผู้ออกแบบเป็นผลให้การพิจารณาสมรรถนะหรือประสิทธิภาพของแพนอากาศแบบต่างๆ เป็นไปได้ยาก ในปี ค.ศ.1929 คณะที่ปรึกษาด้านการบินแห่งชาติของสหรัฐอเมริกา (National Advisory Committee for Aeronautics, NACA) ได้เริ่มการทดสอบแพนอากาศที่มีการกำหนดรูปทรงอย่างเป็นระบบแน่นอน และรวบรวมข้อมูลของแพนอากาศแบบต่างๆ ไว้อย่างเป็นระเบียบสามารถค้นคว้าได้โดยง่าย แพนอากาศของ NACA จำนวนมากยังคงใช้งานอยู่ในปัจจุบัน หรือเป็นต้นแบบของแพนที่ได้รับการปรับปรุงเพื่อใช้งานในปัจจุบัน ดังนั้นเราจะถือการกำหนดเครื่องหมายโดยใช้ระบบตัวเลขของ NACA ซึ่งถือเป็นมาตรฐานทั่วไป สำหรับใช้งานในบทนี้ จากรูป 4.2 รูปร่างของแพนอากาศมีลักษณะเฉพาะตัวที่กำหนดได้จาก (Anderson, 2016)

1. เส้นโก่งเฉลี่ยหรือเส้นกลาง (Mean camber line หรือ Mean line) คือเส้นแบ่งครึ่งระยะทางระหว่างผิวบนและผิวล่างของแพนอากาศ ที่วัดในแนวตั้งฉากกับเส้นกลางจากชายหน้าถึงชายหลังของแพนอากาศ ปลายสุดด้านหน้าของเส้นกลางเรียก “ชายหน้า” (Leading edge) และปลายสุดด้านหลังของเส้นกลางเรียกชายหลัง (Trailing edge) ของแพนอากาศ

ดังนั้น NACA 2415 จึงหมายถึงแพนอากาศที่มีความโค้งสูงสุด 2 % คอร์ดอยู่ที่ตำแหน่ง 40 % คอร์ด และมีความหนาสูงสุด 15 % คอร์ด เส้นโค้งเฉลี่ยของแพนอากาศตระกูลเลขสี่ตัวจะเป็นเส้นโค้ง พาราโบลาสองเส้นจากชายหน้าและชายหลังมาเจอกันที่ตำแหน่งความโค้งสูงสุด ดังนั้นตัวเลขสองตัว แรกจะกำหนดเส้นโค้งเฉลี่ยของแพนอากาศ สำหรับการแจกแจงความหนาจะมีค่าแน่นอนและมี ตำแหน่งความหนาสูงสุดอยู่ที่ 30% คอร์ด

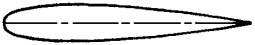
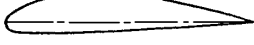
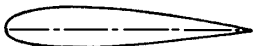
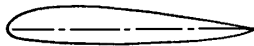
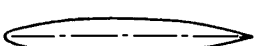
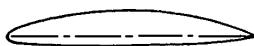
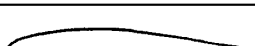
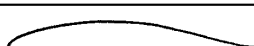
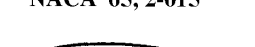
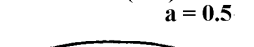
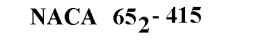
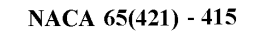
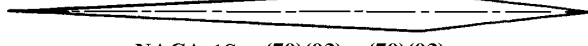
แพนอากาศอนุกรมที่ 2 ของ NACA คือตระกูลเลข 5 ตัว เช่น NACA 23012 ในที่นี้เลขตัวแรก คูณด้วย 3/2 จะให้ค่าสัมประสิทธิ์แรงยกแผนแบบ (Design lift coefficient)¹ เป็นส่วนสิบซึ่งจะ สัมพันธ์กับความโค้ง เลขสองตัวต่อมาหารด้วย 2 จะให้ตำแหน่งของความโค้งสูงสุดวัดจากชายหน้า เป็นร้อยละของคอร์ด และเลขสองตัวสุดท้ายจะบอกความหนาสูงสุดเป็นเปอร์เซ็นต์คอร์ด การแจก แจงความหนาของแพนอากาศเลข 5 ตัวจะเป็นเช่นเดียวกับแพนอากาศเลข 4 ตัว แต่เส้นโค้งเฉลี่ยจะ เป็นเส้นโค้งกำลัง 3 จากชายหน้าไปจนถึงระยะความโค้งสูงสุด จากตำแหน่งความโค้งสูงสุดไปชายหลัง เส้นโค้งเฉลี่ยจะเป็นเส้นตรงไปยังชายหลังถ้าเลขตัวที่ 3 เป็น 0 หรือเป็นโค้งกำลัง 3 กลับทางถ้าตัวเลข ตัวที่ 3 เป็น 1

แพนอากาศของ NACA ที่ยังใช้งานมากในปัจจุบันคือแพนอากาศอนุกรม 6 อย่างเช่น NACA 65-218 ในที่นี้ตัวเลขตัวแรกเป็นตัวบอกอนุกรม ตัวเลขที่สองจะบอกตำแหน่งของความดันบนผิว ต่ำสุด (ความเร็วสูงสุด) เป็นส่วนสิบของคอร์ดจากชายหน้า (สำหรับแพนอากาศแบบเดียวกันที่ไม่มี ความโค้ง) ตัวเลขที่สามเป็นค่าสัมประสิทธิ์แรงยกแผนแบบเป็นส่วนสิบ และตัวเลข 2 ตัวสุดท้ายจะ บอกความหนาสูงสุดเป็นเปอร์เซ็นต์คอร์ด นั่นคือ NACA 65-218 แสดงแพนอากาศอนุกรมเลข 6 มีตำแหน่งความดันต่ำสุดเกิดที่ 0.5 c (สำหรับแพนอากาศสมมาตรแบบเดียวกันที่มุมปะทะศูนย์) ค่าสัมประสิทธิ์แรงยกแผนแบบ 0.2 และหนา 18 % คอร์ด

ต่างจากแพนอากาศตระกูลเลข 4 ตัว และเลข 5 ตัว ที่มีพื้นฐานมาจากการเลียนแบบแพน อากาศที่ประสบความสำเร็จมาก่อนหน้านี้ แพนอากาศตระกูลเลข 6 มีพื้นฐานของเส้นโค้งเฉลี่ย และ การแจกแจงความหนาที่พัฒนาขึ้นจากการพิจารณาทฤษฎีอากาศพลศาสตร์ล้วนๆ ค่าความเร็วที่แจก แจงตามผิวบนและผิวล่างจะถูกคำนวณควบคู่ไปกับตำแหน่งความเร็วสูงสุดบนผิว ซึ่งจะมีค่าความหนา สูงสุดอยู่ประมาณ 35 % ถึง 45 % คอร์ด และเส้นโค้งเฉลี่ยมาตรฐานจะได้รับการคำนวณให้ทำให้เกิด ความเร็วบนผิวแพนอากาศคงที่ ในลักษณะนี้เส้นโค้งเฉลี่ยจะไม่สามารถอธิบายโดยใช้สมการโค้ง พาราโบลากำลังต่างๆได้ แต่จะใช้การกำหนดพิกัดที่ระยะ x ต่างๆ แทน รวมทั้งรูปร่างของแพนอากาศ ก็กำหนดโดยใช้ตำแหน่งของจุดบนผิวเช่นกัน รายละเอียดของแพนอากาศตระกูลต่างๆ ผู้สนใจ

¹ ค่า Design lift coefficient คือค่า C_l ทางทฤษฎีของแพนอากาศที่มุมปะทะที่พอดีเส้นความชัน (slope) ของ เส้นความโค้งเฉลี่ยที่ชายหน้าพอดีขนานกับกระแสอิสระ

สามารถค้นคว้าได้จากหนังสือ “Theory of Wing Sections” (Abbott & von Doenhoff, 1959) รูป 4.3 แสดงตัวอย่างของแผนอากาศ NACA รูปร่างต่างๆ ที่ใช้กันทั่วไป รวมถึงตระกูลเลข 1 และ 7 และแผนอากาศความเร็วเหนือเสียง (Supersonic airfoils) ที่ไม่ได้กล่าวถึงในที่นี้ด้วย

Four - digit series airfoils	 NACA 0015	 NACA 4415
Five - digit series airfoils	 NACA 23015	 NACA 23115
1 - series airfoils	 NACA 16 - 015	 NACA 16 - 515
6 - series airfoils	 NACA 65, 2-015	 NACA 65(216) - 415 $a = 0.5$
	 NACA 65 ₂ - 415	 NACA 65(421) - 415
7 - series airfoils	 NACA 747A015	 NACA 747A415
Supersonic airfoils	 NACA 1S - (70)(03) - (70)(03)	
	 NACA 2S - (30)(03) - (30)(03)	

รูป 4.3 ตัวอย่างแผนอากาศ NACA ที่ใช้อยู่ทั่วไป (จาก TN976 TN1211 TR537 และ WR L-560) (Abbott & von Doenhoff, 1959)

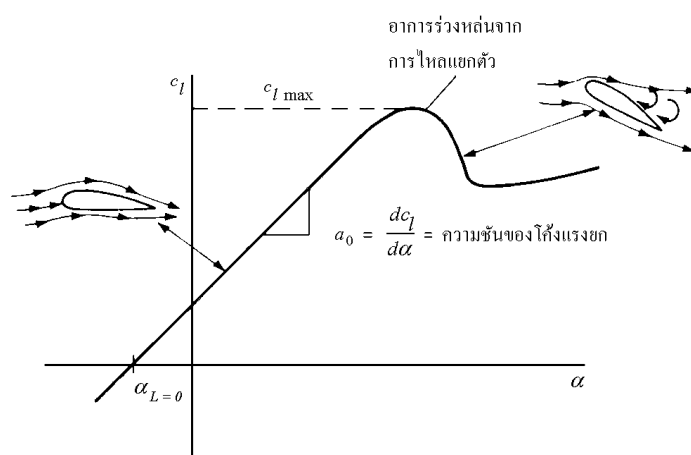
4.3 คุณลักษณะเฉพาะตัวของแผนอากาศ (Airfoil Characteristics)

ก่อนที่จะพิจารณาคูณลักษณะของแผนอากาศทางทฤษฎี เราจะมาศึกษาผลการทดสอบของ NACA ที่ได้จากการวัด แรงยก แรงต้าน และโมเมนต์บนแผนอากาศต่างๆ ในช่วงปี ค.ศ. 1930 – 1940 การทดสอบกระทำในอุโมงค์ความเร็วต่ำ โดยใช้ปีกที่มีความยาวคอร์ดคงที่ทางเต็มส่วนหน้าตัด ทดลองของอุโมงค์ลมจากผนังด้านหนึ่งถึงผนังอีกด้านหนึ่ง ในลักษณะนี้กระแสอิสระจะไหลผ่านปีก โดยไม่มีปลายปีกและดูเหมือนปีกมีความยาวไม่จำกัด (Infinite wing) เป็นการจำลองการไหลสองมิติ ผ่านแผนอากาศ ในทางทฤษฎีปีกยาวไปถึงอนันต์จะมีหน้าตัดแผนอากาศของปีกเหมือนกันตลอด แนวจึงอาจกล่าวได้ว่าคุณสมบัติของแผนอากาศและของปีกยาวไม่จำกัดจะเป็นอย่างเดียวกัน ฉะนั้น ข้อมูลของแผนอากาศจึงมักถูกเรียกว่าเป็นข้อมูลของปีกยาวไม่จำกัด

ตาราง 4.1 รายชื่ออากาศยาน (ค.ศ.1982) ที่ใช้แผนอากาศของ NACA กับปีก (Anderson, 2016)

อากาศยาน	แผนอากาศ
Beechcraft Sundowner	NACA 63A415
Beechcraft Bonanza	NACA 23016.5 (ที่โคน) NACA 23012 (ที่ปลาย)
Cessna 150	NACA 2412
Fairchild A-10	NACA 6716 (ที่โคน) NACA 6713 (ที่ปลาย)
Gates Learjet 24D	NACA 64A109
General Dynamics F-16	NACA 64A204
Lockheed C-5 Galaxy	NACA 0012 (modified)

รูป 4.4 แสดงความสัมพันธ์ระหว่างสัมประสิทธิ์แรงยกกับมุมปะทะของแผนอากาศทั่วไป ในช่วงมุมปะทะต่ำ c_l จะแปรผันเป็นเส้นตรงกับ α ค่าความชันของเส้นกราฟใช้สัญลักษณ์ a_0 เรียกว่า ความชันโค้งแรงยก (Lift curve slope) ในช่วงนี้กระแสจะไหลราบเรียบเกาะติดผิวแผนอากาศไปจนเกือบตลอดตามที่แสดงในภาพร่างทางซ้ายของรูป 4.4 แต่เมื่อมุมปะทะเพิ่มขึ้นจนมีค่ามาก กระแสมีแนวโน้มที่จะแยกตัวจากผิวบนของแผนอากาศ สร้างแถบของอากาศที่หยุดเคลื่อนที่ (Dead air) ที่ซึ่งเป็นแนวไปทางด้านหลัง อย่างในภาพร่างทางขวาของรูป 4.4 ในแถบที่การไหลแยกตัวออกมาจากผิวนี้กระแสน้ำอากาศจะไหลวนเวียนอยู่ภายใน และมีกระแสบางส่วนไหลสวนทางกับกระแสอิสระหรือเรียกการไหลย้อนกลับ (Reversed flow) การแยกตัวนี้เป็นผลมาจากความหนืดซึ่งจะศึกษา



รูป 4.4 กราฟแสดงความสัมพันธ์ระหว่างสัมประสิทธิ์แรงยกและมุมปะทะของแผนอากาศ

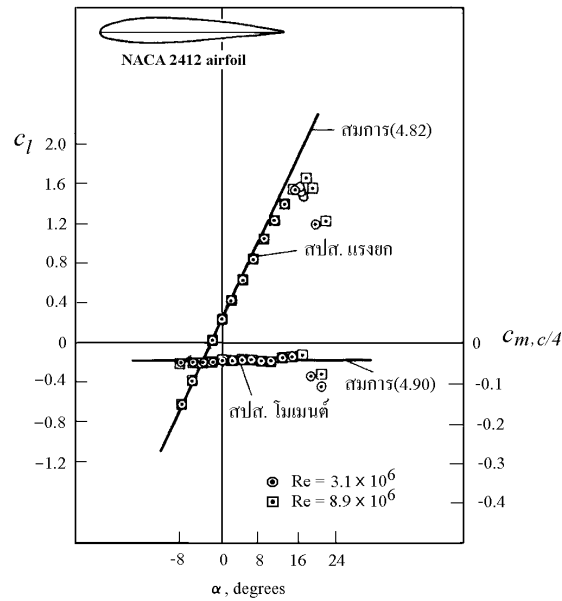
ในภายหลัง ผลที่ตามมาของการแยกตัวที่มุมปะทะสูง คือ การสูญเสียแรงยกและการเพิ่มขึ้นของแรงต้านอย่างฉับพลัน ในภาวณี้เรียกว่าแพนอากาศอยู่ใน “อาการร่วงหล่น”(stall) ค่า c_l สูงสุดที่ มุมปะทะก่อนถึงจุดร่วงหล่นใช้สัญลักษณ์ $c_{l_{max}}$ เป็นลักษณะที่สำคัญที่สุดอย่างหนึ่งในการพิจารณาสมรรถนะของแพนอากาศเพราะว่า $c_{l_{max}}$ จะเป็นตัวกำหนดความเร็วร่วงหล่นของอากาศยาน ยิ่ง $c_{l_{max}}$ สูงเท่าไร ความเร็วร่วงหล่นต่ำลงเท่านั้น ดังนั้นงานวิจัยส่วนใหญ่เกี่ยวกับแพนอากาศแบบใหม่ๆ มักจะเกี่ยวข้องกับการเพิ่มค่า $c_{l_{max}}$ ในรูป 4.4 พบว่า c_l จะเพิ่มขึ้นเป็นเส้นตรงกับ α จนกระทั่งการไหลแยกตัวเริ่มส่งผล ทำให้เส้นกราฟจะเริ่มไม่เป็นเส้นตรง แต่ค่า c_l จะยังคงเพิ่มขึ้นตามมุมปะทะจนถึง $c_{l_{max}}$ และต่อจากนั้นแพนอากาศจะเข้าสู่อาการร่วงหล่น ที่ปลายอีกข้างหนึ่งของเส้นกราฟจะเห็นว่าค่า c_l ที่มุมปะทะ $\alpha = 0$ มีค่าเป็นบวกและค่า c_l จะเป็นศูนย์ก็ต่อเมื่อแพนอากาศมีมุมปะทะเป็นลบอันหนึ่ง ค่า α ที่ค่า c_l เป็นศูนย์เรียกว่ามุมปะทะที่แรงยกเป็นศูนย์ (Zero lift angle of attack) ใช้สัญลักษณ์ $\alpha_{L=0}$ สำหรับแพนอากาศสมมาตร $\alpha_{L=0} = 0$ แต่แพนอากาศที่มีความโค้งเป็นบวก (เส้นโค้งเฉลี่ยอยู่เหนือแนวคอร์ด) จะมีมุม $\alpha_{L=0}$ เป็นลบ (โดยทั่วไปจะอยู่ที่ประมาณ -1° ถึง -3°)

การพิจารณาการไหลไร้ความหนืดผ่านแพนอากาศที่เราจะใช้ศึกษาในบทนี้ใช้ทำนายค่าความชันโค้งแรงยก α_0 และ $\alpha_{L=0}$ สำหรับแพนอากาศ แต่ไม่สามารถใช้คำนวณค่า $c_{l_{max}}$ ได้ การทำนายค่า $c_{l_{max}}$ เป็นปัญหาที่เกี่ยวกับความหนืดที่จะต้องศึกษากันต่อไปภายหลัง

ผลการทดลองสำหรับสัมประสิทธิ์แรงยก และโมเมนต์ของแพนอากาศ NACA 2412 แสดงในรูป 4.5 โดยโมเมนต์วัดที่ตำแหน่ง $1/4$ คอร์ด พร้อมกับแสดงค่าทางทฤษฎีที่จะได้พิจารณาต่อไป สังเกตด้วยว่าผลการทดลองเป็นของ Re สองค่าต่างกัน จะเห็นว่าความชัน α_0 ไม่ได้รับผลกระทบจากค่า Re ที่เปลี่ยนไป แต่ $c_{l_{max}}$ จะมีค่าเปลี่ยนไปตาม Re ซึ่งเป็นสิ่งที่พอจะคาดคะเนได้ อย่าลืมว่าจาก บทที่ 1 Re เป็นตัวแปรที่ขึ้นกับสัดส่วนของแรงเฉื่อยกับแรงหนืดในการไหล ดังนั้นลักษณะการแยกตัวของการไหลน่าจะขึ้นอยู่กับ Re สัมประสิทธิ์โมเมนต์ไม่ขึ้นกับ Re เช่นกันยกเว้นเมื่อมุมปะทะมีค่าสูง

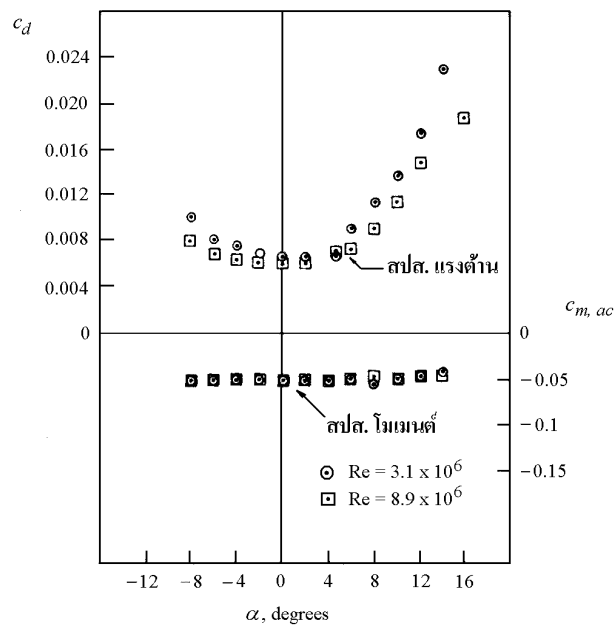
แพนอากาศ NACA เป็นแพนอากาศที่ใช้กันทั่วไปและผลลัพธ์ที่นำมาแสดงในรูป 4.5 ค่อนข้างจะเป็นสามัญสำหรับแพนอากาศทั่วไป ในรูป 4.5 คุณลักษณะเฉพาะตัวของ NACA 2412 ได้แก่ $\alpha_{L=0} = -2.1^\circ$ $c_{l_{max}} \cong 1.6^\circ$ และมุมปะทะร่วงหล่น $\cong 16^\circ$

เนื่องจากทฤษฎีที่จะกล่าวต่อไปไม่สามารถจะนำมาใช้ทำนายแรงต้านได้ ดังได้กล่าวแล้ว อย่างไรก็ตามเพื่อให้การพิจารณาคูณลักษณะของแพนอากาศสมบูรณ์ ผลการทดลองสำหรับค่า c_d ของ NACA 2412 นำมาแสดงในรูป 4.6 เป็นฟังก์ชันของมุมปะทะ แหล่งที่มาของแรงต้านนี้ มาจากทั้งแรงเสียดทานผิวและความดันเนื่องจากการไหลแยกตัว (ที่เรียก Form drag) ผลรวมจากทั้งสองส่วน



รูป 4.5 ผลการทดลองสำหรับสัมประสิทธิ์แรงยกและโมเมนต์รอบ 1/4 คอร์ด ของ NACA 2412 (Abbott & von Doenhoff, 1959)

จะให้ค่าแรงต้านของโปรไฟล์ (Profile drag) ของแพนอากาศหรือในรูปสัมประสิทธิ์คือค่า C_d ของแพนอากาศ สังเกตว่า C_d จะมีค่าขึ้นกับ Re ซึ่งเป็นธรรมดา เพราะว่าทั้งแรงเสียดทานผิวและการไหลแยกตัวต่างก็เป็นผลมาจากความหนืดซึ่งแสดงในรูปของ Re อย่างที่เคยว่าไว้ในบทที่ 1



รูป 4.6 ผลการทดลองสำหรับสัมประสิทธิ์แรงต้านและสัมประสิทธิ์โมเมนต์ รอบจุด a.c. ของแพนอากาศ NACA 2412 (Abbott & von Doenhoff, 1959)

รูป 4.6 ยังแสดงค่าสัมประสิทธิ์โมเมนต์รอบจุด a.c. ซึ่งเป็นจุดที่ค่าโมเมนต์รอบจุดนี้จะไม่เปลี่ยนแปลงไปตามมุมปะทะ ข้อมูลในรูป 4.6 แสดงให้เห็นคุณสมบัติข้อนี้จากค่า c_{mac} ที่คงที่ในย่านกว้างของมุม α

ตัวอย่าง 4.1 พิจารณาแพนอากาศ NACA 2412 ความยาวคอर्ड 0.64 m ในกระแสอากาศในบรรยากาศมาตรฐาน ค่าความเร็วกระแสอิสระ 70 m/s แรงยกต่อหน่วยกางปีกเป็น 1254 N/m จงคำนวณมุมปะทะและแรงต้านต่อหน่วยกางปีก

วิธีทำ ที่บรรยากาศมาตรฐาน $\rho = 1.23 \text{ kg/m}^3$

$$q_\infty = \frac{1}{2} \rho_\infty V_\infty^2 = \frac{1}{2} (1.23 \text{ kg/m}^3)(70 \text{ m/s})^2 \\ = 3013.5 \text{ N/m}^2$$

$$\therefore c_l = \frac{L'}{q_\infty S} = \frac{L'}{q_\infty c(1)} \\ = \frac{1254 \text{ N}}{3013.5(0.64) \text{ N/m}^2(\text{m}^2)} = 0.65$$

จากรูป 4.5 สำหรับ $c_l = 0.65$ จะได้ $\alpha = 4^\circ$

หาค่าแรงต้านจากรูป 4.6 แต่เนื่องจาก c_d ขึ้นกับ Re จึงต้องคำนวณค่า Re ที่ระดับน้ำทะเล

ที่ระดับน้ำทะเลมาตรฐาน $\mu = 1.89 \times 10^{-5} \text{ kg/m}\cdot\text{s}^2$ ดังนั้น

$$\text{Re} = \frac{\rho_\infty V_\infty c}{\mu_\infty} \\ = \frac{1.23(70)(0.64) \text{ kg/m}^3(\text{m/s})(\text{m})}{1.789 \times 10^{-5} \text{ kg/m}\cdot\text{s}^2} \\ = 3.08 \times 10^6$$

ดังนั้นใช้ค่า Re ที่ 3.08×10^6 ในรูป 4.6 ที่ $\alpha = 4^\circ$ ได้ $c_d = 0.0068$

ดังนั้น

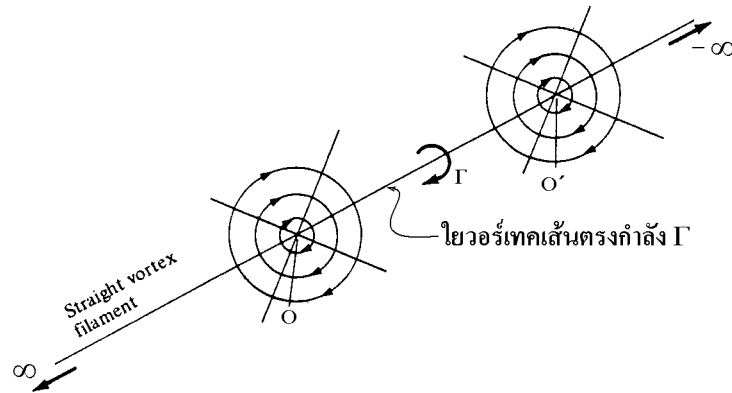
$$D' = q_\infty S c_d = q_\infty (c \times 1) c_d \\ = 3013.5(0.64)(0.0068) \text{ N/m}^2(\text{m}^2) \\ = 13.115 \text{ N}$$

ตอบ

4.4 แผ่นวอร์เทก (Vortex Sheet)

ในหัวข้อ 3.13 ได้อธิบายแนวคิดเกี่ยวกับวอร์เทก (Vortex) ที่มีเส้นกระแสของการไหลเป็นวงกลมรอบจุดวอร์เทกที่มีค่าการหมุนวน (Circulation) ขึ้นอยู่กับกำลัง Γ ของวอร์เทก ในหัวข้อนี้จะขยายแนวคิดนี้ออกไปอีก จุดวอร์เทกก็เช่นเดียวกับจุดซอร์สที่จริงๆ แล้วมีลักษณะเป็นสามมิติ ขอให้นึกภาพเส้นตรงตั้งฉากกับหน้ากระดาษผ่านจุด o ซึ่งเป็นตำแหน่งของวอร์เทก ให้เส้นตรงยาวไปถึง ∞ ทั้งในหน้ากระดาษและออกจากหน้ากระดาษ เส้นตรงนี้คือไวยอร์เทก (Vortex filament) ที่มีกำลัง Γ

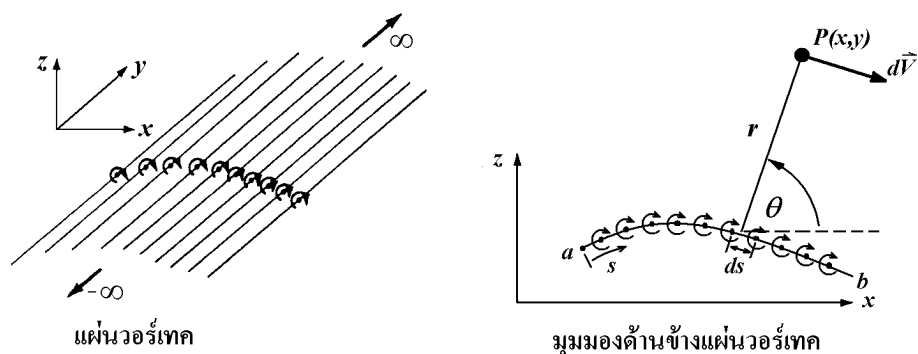
ใยวอร์เทคนีจะเหนี่ยวนำให้เกิดการไหลวอร์เทคขึ้นบนระนาบทุกระนาบที่ตั้งฉากกับเส้นใยเหมือนที่แสดงในรูป 4.7 เนื่องจากลักษณะการไหลเหมือนกันทุกระนาบ ดังนั้นเราจึงพิจารณาให้การไหลเป็นสองมิติไม่ใช่เพราะการไหลเกิดขึ้นบนระนาบ



รูป 4.7 ใยวอร์เทค (Vortex filament) (Katz & Plotkin, 2001)

ในรูป 4.7 การไหลที่เกิดจากการเหนี่ยวนำของเส้นใยวอร์เทคบนระนาบใดๆ ตั้งฉากกับเส้นตรงจะเหมือนกันทุกประการและเหมือนกับการไหลที่ถูกเหนี่ยวนำจากจุดวอร์เทคกำลัง Γ ดังนั้นการไหลรอบจุด O และจุด O' บนระนาบที่ตั้งฉากกับเส้นจะเหมือนกับการไหลรอบจุดวอร์เทค กำลัง Γ หรือจริงๆ แล้วอาจกล่าวได้ว่าจุดวอร์เทคในหัวข้อ 3.13 เป็นส่วนหนึ่งของเส้นใยวอร์เทค นั่นเอง

ถ้าเรานำเอาเส้นใยวอร์เทคมาเรียงกันโดยให้กำลังของวอร์เทคแต่ละเส้นมีค่าน้อยมากแต่จำนวนวอร์เทคที่เรียงกันมีจำนวนมหาศาลในแบบเดียวกับแผ่นซอร์ส (Source sheet) วอร์เทคที่เรียงกันอย่างต่อเนื่องจะฟอร์มตัวเป็นแผ่นวอร์เทค (Vortex sheet) อย่างในรูป 4.8 เมื่อมองเข้าไปทางข้างจะเห็นแผ่นวอร์เทคปรากฏในรูปการแจกแจงวอร์เทคบนเส้น (Line vortex distribution) ที่มีเส้นใยตั้งฉากกับแผ่นกระดาษ ให้ s เป็นระยะวัดไปตามเส้นโค้งที่เรียงไว้ด้วยวอร์เทคโดยให้กำลังต่อหน่วยความยาวหรือความหนาแน่นของวอร์เทคเป็น $\gamma = \gamma(s)$ วัดตามระยะ s จะได้ว่าบนช่วง ds สั้นๆ บนโค้งกำลังของวอร์เทคจะเป็น γds ซึ่งสามารถพิจารณาได้เหมือนกับจุดวอร์เทคกำลัง γds



รูป 4.8 แผ่นวอร์เทค (Vortex sheet) (Katz & Plotkin, 2001)

ต่อไปพิจารณาจุด $P(x, y)$ ที่อยู่ที่ตำแหน่ง r วัดห่างจาก ds ตามรูป ส่วน ds ของแผ่นวอร์เทค ที่มีกำลัง γds จะเหนี่ยวนำให้เกิดความเร็ว dV ที่จุด P (ตั้งฉากกับ r) มีค่า

$$dV = -\frac{\gamma ds}{2\pi r} \quad (4.1)$$

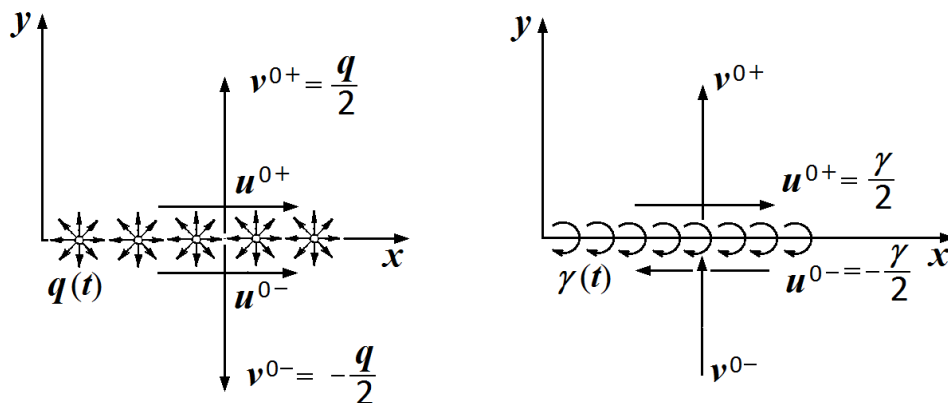
ตามที่แสดงในรูป 4.8 ความเร็วที่จุด P เนื่องจากวอร์เทคทั้งหมดบนโค้ง s จาก a ถึง b จะได้จากการอินทิเกรตสมการ (4.1) จาก a ถึง b สังเกตว่าความเร็ว dV ที่ถูกเหนี่ยวนำจากวอร์เทคแต่ละส่วนบนโค้ง s จะมีทิศทางต่างกันเพราะทิศทางของ dV ตั้งฉากกับ r ที่วัดจาก ds ดังนั้นการรวมความเร็วจาก a ถึง b จึงต้องรวมกันแบบเวกเตอร์ ด้วยเหตุนี้เราจึงสะดวกที่จะพิจารณาค่าศักย์ความเร็วหรือฟังก์ชันกระแสที่จุด P มากกว่าความเร็ว V จากรูปศักย์ความเร็วที่จุด P ที่ถูกเหนี่ยวนำจากวอร์เทคส่วนสั้นๆ ds จะเป็น

$$d\phi = -\frac{\gamma ds}{2\pi} \theta \quad (4.2)$$

และศักย์ความเร็วที่ P เนื่องจากวอร์เทคบนโค้ง s ทั้งหมดจาก a ถึง b คือ

$$\phi(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_a^b \theta \gamma ds \quad (4.3)$$

สมการ (4.3) ยากที่จะประมาณค่าบนโค้ง s ใดๆ แต่จากการพิจารณาแผ่นชอร์สในบทที่ 3 คงจำได้ว่าถ้าแผ่นชอร์สเป็นเส้นตรง การประมาณค่าจะทำได้ง่ายกว่าโดยเฉพาะเมื่อเป็นค่าบนแกนที่เป็นแนวของแผ่น สำหรับแผ่นวอร์เทคก็เช่นเดียวกัน และถ้าไม่ลืมคงทราบว่ชอร์สและวอร์เทคมีเส้นกระแสที่อยู่ในแนวฉากกัน ซึ่งทำให้การไหลทั้งสองมีคุณสมบัติสำคัญคือ ϕ ของวอร์เทคจะมีฟอร์มเดียวกับ ψ ของชอร์สหรือกลับกัน ดังนั้นความเร็ว u ที่เกิดจากชอร์สจะเป็นแบบเดียวกับ v ที่เกิดจากวอร์เทคและความเร็ว u ที่เกิดจากวอร์เทคจะเป็นแบบเดียวกับ v ที่เกิดจากชอร์ส (Katz & Plotkin, 2001) ดังแสดงในรูป 4.9



รูป 4.9 เปรียบเทียบความเร็วบนแผ่นชอร์ส และ แผ่นวอร์เทค ที่เป็นแผ่นเรียบตรง (Katz & Plotkin, 2001)

เนื่องจากค่าการหมุนวน Γ รอบจุดวอร์เทกจะมีค่าเท่ากับกำลังของวอร์เทก ดังนั้นค่าการหมุนวนรอบแผ่นวอร์เทกจะมีค่าเท่ากับกำลังของวอร์เทกทั้งหมดบนแผ่นรวมกัน หรือ

$$\Gamma = \int_a^b \gamma ds \quad (4.4)$$

แต่จากหัวข้อ 3.18 การพิจารณาความเร็วที่เกิดจากแผ่นซอร์สได้ว่าความเร็วตั้งฉากกับแผ่นซอร์ส ณ จุดที่อยู่ด้านบนและด้านล่างของแผ่นซอร์สจะมีทิศทางตรงข้ามกัน ส่วนความเร็วขนานกับแผ่นซอร์ส จะมีขนาดเท่ากันและทิศทางเดียวกันทั้งด้านบนด้านล่างของแผ่นซอร์ส ดังนั้นจึงอาจสรุปได้เลยว่าสำหรับแผ่นวอร์เทกผลที่เกิดขึ้นจะตรงข้ามกัน คือ ความเร็วขนานกับแผ่นวอร์เทก จะมีทิศทางตรงข้ามกัน ณ จุดที่อยู่ด้านบนและด้านล่างเมื่อผ่านจากผิวด้านบนไปด้านล่างของแผ่นวอร์เทก ส่วนความเร็วตั้งฉากกับแผ่นวอร์เทกจะมีค่าคงเดิมเมื่อผ่านจากผิวบนไปผิวด้านล่าง ความเร็วในแนวขนานกับแผ่นวอร์เทกที่เปลี่ยนทิศทางจะสัมพันธ์กับกำลังของวอร์เทกดังนี้ พิจารณาแผ่นวอร์เทกในรูป 4.10 ให้เส้นรอบรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าล้อมรอบส่วนของแผ่นวอร์เทกกว้าง ds ให้ส่วนความเร็วขนานกับขอบด้านบนและด้านล่างของสี่เหลี่ยมเป็น u_1 และ u_2 ตามลำดับ ให้ส่วนความเร็วขนานกับด้านซ้ายและด้านขวาของสี่เหลี่ยมเป็น v_1 และ v_2 ตามลำดับ ให้ด้านบนและด้านล่างของรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าห่างกัน dn ดังนั้นจากนิยามของการหมุนวนรอบโค้งปิดตามสมการ (2.73) จะได้ค่าการหมุนวนรอบโค้งรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า จะเป็น

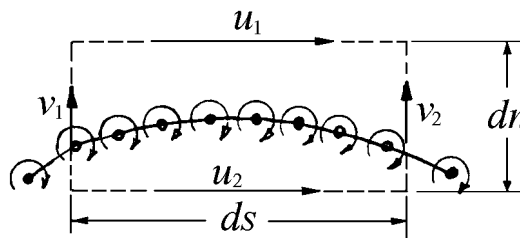
$$\begin{aligned} \Gamma &= -(v_2 dn - u_1 ds - v_1 dn + u_2 ds) \\ &= (u_1 - u_2) ds + (v_1 - v_2) dn \end{aligned} \quad (4.5)$$

แต่ค่าการหมุนวน Γ เท่ากับกำลังของวอร์เทกในช่วง ds นั่นคือ

$$\Gamma = \gamma ds \quad (4.6)$$

นั่นคือ

$$\gamma ds = (u_1 - u_2) ds + (v_1 - v_2) dn \quad (4.7)$$



รูป 4.10 การหมุนวนรอบแผ่นวอร์เทก (Katz & Plotkin, 2001)

ถ้าให้ระยะ $dn \rightarrow 0$ หรือให้ด้านบนและด้านล่างของรูปสี่เหลี่ยมเลื่อนมาทับกับแผ่นวอร์เทก ในขีดจำกัด u_1 และ u_2 จะเป็นความเร็วในแนวขนานกับแผ่นวอร์เทกที่ด้านบนและด้านล่างของแผ่นพอดี และ สมการ (4.7) จะเป็น

$$\gamma ds = (u_1 - u_2) ds$$

หรือ
$$\gamma = (u_1 - u_2) \quad (4.8)$$

สมการ (4.8) แสดงผลลัพธ์สำคัญ คือ มันทำให้เห็นว่า “ความเร็วขนานกับแผ่นวอร์เทคที่เปลี่ยนค่าขณะผ่านผิวแผ่นวอร์เทคจากด้านหนึ่งไปอีกด้านหนึ่งจะมีค่าเท่ากับกำลังต่อหน่วยความยาวของแผ่นวอร์เทคตรงจุดนั้น”



รูป 4.11 การจำลองการไหลผ่านแผนอากาศโดยการกระจายวอร์เทคไปตามผิวแผนอากาศ

อย่าลืมว่าแผ่นวอร์เทคและแผ่นซอร์สในหัวข้อ 3.17 มีคุณสมบัติแบบเดียวกัน ดังนั้นในทำนองเดียวกันกับที่เราแทนผิวของแผนอากาศด้วยแผ่นซอร์ส เราอาจแทนผิวแผนอากาศด้วย แผ่นวอร์เทคที่มีกำลังเหมาะสม $\gamma(s)$ เรียงไปตามผิวแผนอากาศ ตามที่แสดงในรูป 4.11 $\gamma(s)$ ที่เหมาะสมคือ $\gamma(s)$ ที่กระจายไปตามผิวของแผนอากาศแล้วเหนี่ยวนำให้เกิดความเร็วขึ้นที่จุดใดจุดหนึ่งบนผิวซึ่งเมื่อรวมกับความเร็วกระแสอิสระแล้วจะอยู่ในแนวสัมผัสผิวพอดี หรือทำให้แผ่นวอร์เทค(ผิวของแผนอากาศ) เป็นเส้นกระแสเส้นหนึ่งของการไหล และค่าการหมุนวนรอบแผนอากาศจะได้มาจาก

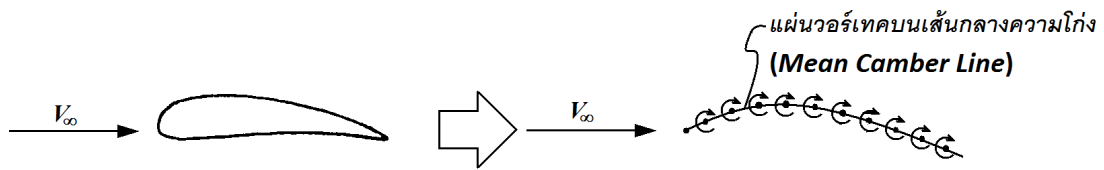
$$\Gamma = \int_s \gamma ds$$

เมื่อการอินทิเกรตกระทำไปรอบผิวของแผนอากาศ และในขั้นสุดท้ายจะได้แรงยกจากทฤษฎีของ Kutta-Joukowski

$$L' = \rho_\infty V_\infty \Gamma$$

แนวคิดอันนี้ที่จริงมีมานานแล้วแต่การหาค่า $\gamma(s)$ โดยตรงไม่สามารถกระทำได้แต่ต้องหาค่ากำลังของ γ โดยวิธีเชิงตัวเลข ทำให้หลักการได้รับการพัฒนาหลังจากปี ค.ศ.1960 ซึ่งจะได้ศึกษาต่อไป

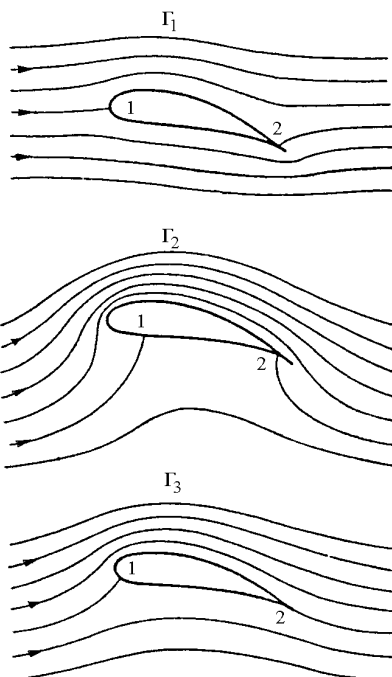
ในกรณีของแผนอากาศบางอาจพิจารณาแทนแผนอากาศด้วยเส้นโค้งเฉลี่ย (Mean camber line) และใช้แผ่นวอร์เทคที่โค้งไปตามแนวของเส้นโค้งเฉลี่ยตามที่แสดงในรูป 4.12 คำนวณหาค่ากำลัง $\gamma(s)$ ของแผ่นวอร์เทคที่แจกแจงอยู่ในลักษณะที่เมื่อรวมกับความเร็วกระแสอิสระแล้ว ความเร็วจะอยู่ในแนวสัมผัสกับเส้นโค้งเฉลี่ย หรือเส้นโค้งเฉลี่ยเป็นเส้นกระแสของการไหล ถึงแม้วิธีการในรูป 4.12 จะเป็นเพียงการประมาณของรูป 4.11 แต่ก็มีข้อได้เปรียบในแง่ที่มันจะให้คำตอบในรูป “Analytical form” การพิจารณาแผนอากาศบางเป็นวิธีการที่พัฒนาขึ้นโดย “Max Munk” ในปี 1922



รูป 4.12 การประมาณแผนอากาศบางด้วยแผ่นวอร์เทค (Katz & Plotkin, 2001)

4.5 เงื่อนไขของคุดต้า (Kutta Condition)

ในหัวข้อ 3.14 เราได้พิจารณาการไหลผ่านทรงกระบอกกลมที่เกิดแรงยก และพบว่ามีความเป็นไปได้ที่ไม่จำกัดของคำตอบจากทฤษฎีการไหลโพเทนเชียล (Potential flow) ขึ้นอยู่กับการเลือกกำลัง Γ ของวอร์เทคที่จะผนวกเข้ากับการไหลเอกรูป (Uniform flow) ผ่านจุดซ้อน (Doublet) (Katz & Plotkin, 2001) ตัวอย่างในรูป 3.22 เป็นการไหลผ่านทรงกระบอกกลมเมื่อค่า Γ ต่างกัน 4 ค่า กรณีอย่างเดียวกัน จะเกิดขึ้นกับการไหลผ่านแผนอากาศ สำหรับแผนอากาศที่กำหนดที่มุมปะทะอันหนึ่งอาจจะมีคำตอบของการไหลได้นับไม่ถ้วนเช่นกันขึ้นอยู่กับการเลือกค่า Γ ตัวอย่างเช่น ในรูป 4.13 แสดงการไหลผ่านแผนอากาศแบบเดียวกันที่มุมปะทะเดียวกัน แต่มีค่า Γ ต่างกัน 3 ค่า อาจทำให้เกิดความสงสัยขึ้นมา เพราะเราทราบอยู่แล้วว่าแผนอากาศที่มุมปะทะอันหนึ่งจะสร้างแรงยกขึ้นได้เพียงค่าหนึ่ง (ดูรูป 4.5)



(ก) $\Gamma = 0$ จุดชะงักด้านท้ายอยู่ด้านผิวบน

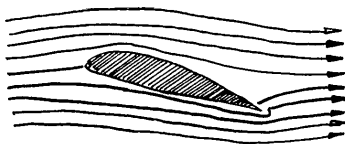
(ข) Γ มีค่ามากจุดชะงักด้านท้ายถูกดึงมาอยู่ด้านผิวล่าง

(ค) ค่า Γ พอดีทำให้จุดชะงักด้านท้ายมาอยู่ที่ชายหลังและการไหลละลายจากชายหลังไปอย่างราบเรียบสอดคล้องกับเงื่อนไขของคุดต้า

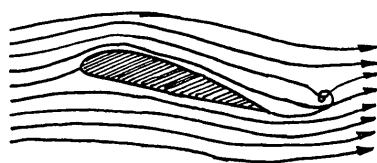
รูป 4.13 การไหลผ่านแผนอากาศสำหรับค่าการหมุนวนต่าง ๆ (Katz & Plotkin, 2001)

คำถามคือเราควรเลือกค่า Γ เท่าใดจึงจะเป็นค่าที่ถูกต้องจากค่า Γ ที่เป็นไปได้นับไม่ถ้วน เห็นได้ชัดว่าแนวทางในหัวข้อที่ผ่านมายังไม่เพียงพอที่จะใช้พิจารณาการไหลผ่านแพนอากาศได้อย่างสมบูรณ์ เรายังต้องการเงื่อนไขที่จะใช้กำหนดค่า Γ สำหรับแพนอากาศที่มุมปะทะ α

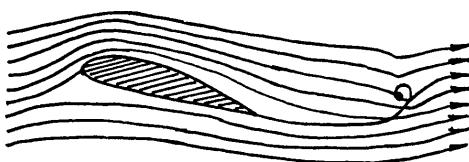
เงื่อนไขที่ต้องการจะได้อาจจากการพิจารณารูป 4.14 ซึ่งเป็นรูปวาดจากการทดลองการก่อตัวของ การไหลรอบแพนอากาศซึ่งถูกจัดให้เคลื่อนไหวโดยเริ่มจากสภาพอยู่นิ่ง ในรูป 4.14 ก การไหลกำลังจะเริ่มต้น รูปแบบการไหลเริ่มเกิดขึ้นรอบๆ แพนอากาศในตอนแรกสุดนี้กระแสอากาศจะพยายาม ม้วนตัวอ้อมชายหลังจากด้านล่างไปยังด้านบนเหมือนที่แสดงในรูป 4.13 ก อย่างไรก็ตาม การวิเคราะห์การไหล (โดยใช้วิธีการที่ซับซ้อนกว่าของเรา) แสดงให้เห็นว่าในทางทฤษฎีค่าความเร็ว ที่ชายหลังในกรณีนี้จะมีค่าเป็น ∞ สำหรับชายหลังที่เป็นมุมแหลม ดังนั้นลักษณะของการไหลอย่าง ในรูป 4.13 ก และรูป 4.14 ก จะเกิดขึ้นไม่ได้นานในธรรมชาติเมื่อการไหลจริงก่อตัวขึ้นรอบแพน อากาศ จุดชะงักบนผิวบนแพนอากาศ (จุด 2 ในรูป 4.13 ก) จะขยับลงไปหาชายหลัง รูป 4.14 ข แสดงขั้นตอนในช่วงนี้ ท้ายที่สุดหลังจากกระบวนการในช่วงเริ่มต้นหมดไปการไหลจะเข้าสู่สภาวะคงที่ ตามที่แสดงในรูป 4.14 ค รูปวาดแสดงให้เห็นการไหลที่ออกจากผิวบนและผิวล่างของแพนอากาศ ไปจากชายหลังอย่างราบเรียบ เหมือนกับที่แสดงในรูป 4.13 ค และเป็นตัวแทนของการไหลที่น่าจะ เป็นการไหลสภาวะคงตัวผ่านแพนอากาศ



(ก) การไหลในชั่วขณะแรกของการเคลื่อนที่



(ข) การไหลในชั่วขณะสั้น ๆ หลังจากเริ่มต้นแสดงการ เติบโตของวอร์เทคเริ่มต้น (Starting vortex)



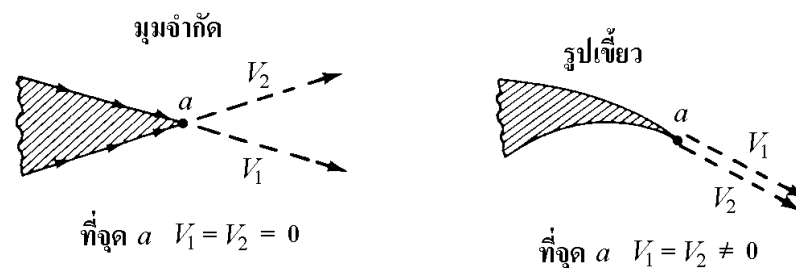
(ค) หลังจากเวลาผ่านไปเมื่อการก่อตัวของวอร์เทคเริ่มต้น และค่าการหมุนวนรอบแพนอากาศสมบูรณ์จนกระทั่งการ ไหลออกจากชายหลังอย่างราบเรียบ

รูป 4.14 พัฒนาการของรูปแบบการไหล แสดงโดยการทดลองรอบแพนอากาศ (Anderson, 2016)

รูป 4.13 และ 4.14 ทำให้เราแน่ใจได้ว่าการไหลผ่านแพนอากาศในสภาวะคงที่ ที่เกิดขึ้นได้ที มุมปะทะอันหนึ่ง ธรรมชาติจะยอมให้ค่าการหมุนวนรอบแพนอากาศเป็นค่าเฉพาะอันหนึ่ง (Γ_s ในรูป 4.13) เท่านั้นซึ่งจะมีผลให้เกิดการไหลที่ละจากชายหลังออกไปอย่างราบเรียบ ข้อสังเกตนี้ถูกกล่าวถึง

และนำมาใช้เป็นคนแรกโดยนักคณิตศาสตร์ชาวเยอรมัน “M. Wilhem Kutta” ดังนั้นจึงเรียกเงื่อนไขนี้ว่าเงื่อนไขของคัตต้า (Kutta condition)

เพื่อที่จะนำเงื่อนไขของคัตต้ามาใช้วิเคราะห์ทางทฤษฎี จำเป็นต้องกำหนดให้แน่ชัดถึงธรรมชาติของการไหลที่ชายหลังของแพนอากาศ ชายหลังของแพนอากาศอาจมีมุมจำกัดเป็นรูปชายธงเหมือนรูปทางซ้ายของรูป 4.15 หรือชายหลังอาจจะเป็นรูปเขี้ยวเหมือนทางขวาของรูป 4.15 รูปร่างทั้งสองแบบนี้มีลักษณะการไหลที่พิจารณาได้ต่างกันดังนี้ พิจารณาชายหลังที่มีมุมจำกัดในรูป 4.15 ให้ V_1 และ V_2 เป็นความเร็วของกระแสตามผิวบนและผิวล่างของแพนอากาศตามลำดับ เนื่องจากเงื่อนไขที่จำเป็น คือ ความเร็วต้องอยู่ในแนวสัมผัสผิว ถ้าให้ความเร็ว V_1 อยู่ในทิศทางสัมผัสกับผิวบนและ V_2 อยู่ในแนวสัมผัสกับผิวล่าง ดังนั้นที่ชายหลังของแพนอากาศถ้าความเร็ว V_1 และ V_2 ไม่เป็นศูนย์แล้วเราจะพบกับการชนกันที่จุด a ในรูปเป็นจุดในสนามการไหลที่มีความเร็ว 2 ค่า และสองทิศทางซึ่งเป็นไปไม่ได้ในความเป็นจริง และมีโอกาสเดียวสำหรับจุด a ที่จะมีความเร็วค่าเดียวคือความเร็ว V_1 และ V_2 ต้องเท่ากับศูนย์ หมายความว่าสำหรับชายหลังที่มีมุมจำกัดชายหลังจะเป็นจุดชะงัก (Stagnation point) และ $V_1 = V_2 = 0$ แต่สำหรับชายหลังรูปเขี้ยวในรูป 4.15 เนื่องจากผิวบนและผิวล่างที่มาบรรจบกันมีแนวสัมผัสขนานกัน ดังนั้น V_1 และ V_2 จะอยู่ในทิศทางเดียวกันที่จุด a และ V_1 กับ V_2 จะมีค่าไม่เท่ากับศูนย์ได้ แต่เนื่องจากค่าความดันที่จุด a p_a จะมีค่าได้เพียงค่าเดียว เมื่อนำสมการของเบอร์นูลีมาใช้กับจุดบนผิวด้านบนและด้านล่างก่อนถึงจุด a จะได้



รูป 4.15 รูปแบบชายหลังที่ต่างกันสองแบบและความสัมพันธ์กับเงื่อนไขของคัตต้า (Anderson, 2016)

$$p_a + \frac{1}{2}\rho_\infty V_1^2 = p_a + \frac{1}{2}\rho_\infty V_2^2$$

หรือ

$$V_1 = V_2$$

ดังนั้นสำหรับชายหลังรูปเขี้ยวความเร็วที่ละจากชายหลังจากผิวบนและผิวล่างของแพนอากาศ จะมีค่าจำกัด และมีขนาดและทิศทางเหมือนกัน เราอาจสรุปเงื่อนไขของคัตต้าได้ดังนี้

1. สำหรับแพนอากาศที่มีมุมปะทะอันหนึ่ง ค่า Γ รอบแพนอากาศจะต้องเป็นค่าที่ทำให้กระแสอากาศละจากชายหลังออกไปอย่างราบเรียบ
2. ถ้าชายหลังมีมุมจำกัด ชายหลังจะเป็นจุดชะงัก (Stagnation point)

3. ถ้าชายหลังเป็นรูปเขี้ยวความเร็วจากผิวบนและผิวล่างที่ละออกจากชายหลังจะมีขนาดเท่ากัน และมีทิศทางเดียวกัน

ถ้ากลับไปดูหัวข้อ 4.4 แนวคิดที่ใช้แผ่นวอร์เทคแทนผิวของแพนอากาศ หรือแทนเส้นโค้งเฉลี่ยกำลังต่อหน่วยความยาว $\gamma(s)$ ของแผ่นวอร์เทคจะสัมพันธ์กับความเร็วด้านบนและด้านล่าง ของแผ่น ดังนั้นจากเงื่อนไขของคุดต้า ที่ชายหลังของแพนอากาศ จากสมการ(4.8)

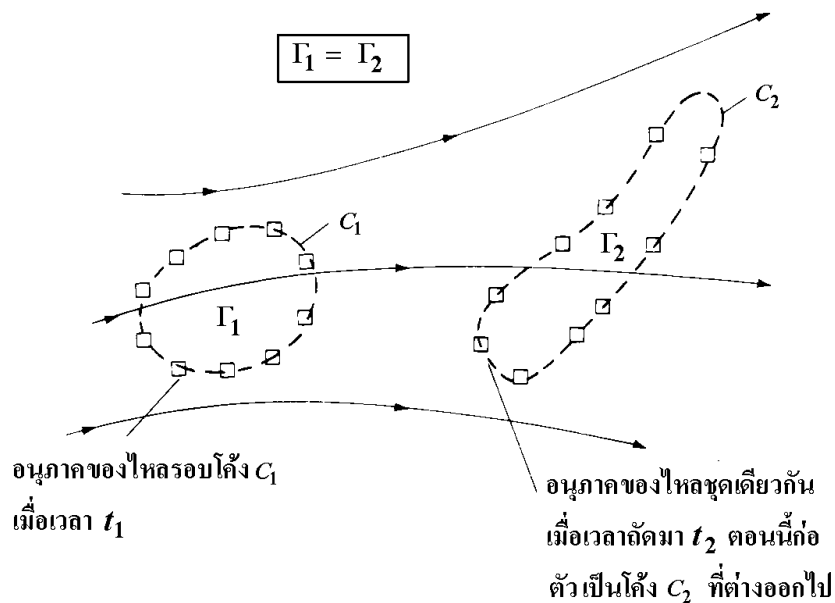
$$\gamma(\text{T.E.}) = \gamma(a) = V_1 - V_2$$

แต่ V_1 จะเท่ากับ V_2 ที่ชายหลังเสมอ ดังนั้นเงื่อนไขของคุดต้าในเทอมของกำลังของแผ่นวอร์เทคที่ชายหลัง จะเป็น

$$\gamma(\text{T.E.}) = 0 \quad (4.9)$$

4.6 ทฤษฎีการหมุนวนและวอร์เทคเริ่มต้นของเคลวิน (Kelvin's Circulation Theory & The Starting Vortex)

ก่อนจะเริ่มต้นการวิเคราะห์การไหลผ่านแพนอากาศ เราจะจบแนวคิดทั่วไปที่สัมพันธ์กับทฤษฎีแพนอากาศในหัวข้อนี้ จากหัวข้อ 4.5 เงื่อนไขของคุดต้ากำหนดว่าค่าการหมุนวนรอบแพนอากาศจะมีค่าที่พอดีทำให้การไหลละจากชายหลังไปอย่างราบเรียบ คำถามก็คือธรรมชาติสร้างการหมุนวนนี้ขึ้นมาได้อย่างไร การหมุนวนรอบแพนอากาศมีขึ้นมาได้เอง หรือ จะมีค่าแน่นอนคงที่ไม่เปลี่ยนแปลงในสนามการไหล ปัญหาเหล่านี้จะได้พิจารณากันในรายละเอียดต่อไปนี้



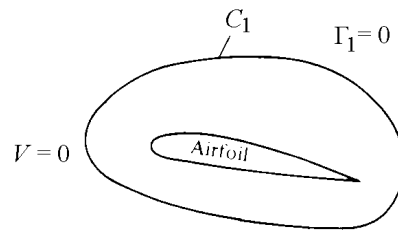
รูป 4.16 ทฤษฎีของเคลวิน (Anderson, 2016)

พิจารณาการไหลไร้ความหนืดไร้การอัดตัวในรูป 4.16 ไม่คติน้ำหนักของอากาศ เลือกโค้ง C_1 ใดๆ ที่บนโค้งประกอบด้วยอนุภาคของไหลที่ ณ เวลา t_1 อยู่บนตำแหน่งตามโค้ง จากนั้นนิยามของการหมุนวนรอบโค้ง C_1 จะได้ $\Gamma_1 = -\int_{C_1} \vec{V} \cdot d\vec{s}$ หลังจากเวลาผ่านไปอนุภาคของไหลบนโค้ง C_1 เดิมจะเคลื่อนที่มายู่ในตำแหน่งใหม่ และฟอร์มตัวอยู่บนโค้ง C_2 เมื่อเวลา t_2 ซึ่งมีค่าการหมุนวนรอบโค้ง $\Gamma_2 = -\int_{C_2} \vec{V} \cdot d\vec{s}$ จากเงื่อนไขของการไหลไร้ความหนืดไร้การอัดตัว อาจสรุปได้ว่า $\Gamma_1 = \Gamma_2$ ที่จริงแล้วเพราะเราติดตามชุดของอนุภาคของไหลชุดเดิมจาก C_1 มา C_2 อาจกล่าวได้ว่าการหมุนวนรอบโค้งปิดที่เกิดจากอนุภาคของไหลที่เรียงต่อกันชุดเดิมจะมีค่าคงที่เสมอขณะที่อนุภาคเคลื่อนที่ไปในสนาม ดังนั้นจากอัตราการเปลี่ยนแปลงของ Γ ของอนุภาคของไหล

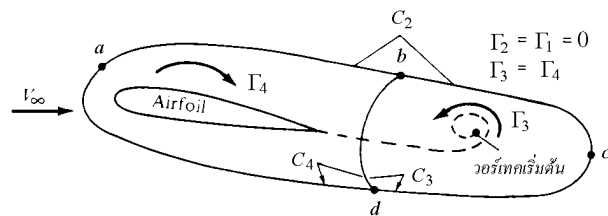
$$\frac{D\Gamma}{Dt} = 0 \quad (4.10)$$

นั่นคืออัตราการเปลี่ยนแปลงของการหมุนวนรอบโค้งปิดที่ประกอบด้วยอนุภาคของไหลจำนวนเดิมจะมีค่าเป็นศูนย์เสมอในการไหลที่ไม่มีความหนืดมาเกี่ยวข้อง สมการ (4.10) พร้อมกับข้อความรองรับทั้งหมดเรียกว่าทฤษฎีของเคลวิน

ทฤษฎีของเคลวินช่วยอธิบายการกำเนิดของการหมุนวนรอบแพนอากาศได้ดังนี้ พิจารณาแพนอากาศในของไหลที่อยู่นิ่งในรูป 4.17 ก เพราะ $V = 0$ ทุกแห่ง ดังนั้นค่าการหมุนวนรอบโค้ง C_1 จะมีค่าเป็นศูนย์ ต่อมาเริ่มทำให้เกิดการไหลผ่านแพนอากาศ ในตอนแรกการไหลจะพยายามม้วนอ้อมชายหลังขึ้นมาอย่างที่ได้กล่าวมาแล้ว ในลักษณะเช่นนี้ความเร็วที่ชายหลังทางทฤษฎีจะมีค่าเป็น ∞ หรือในความเป็นจริงจะมีค่าสูงมาก ผลก็คือในช่วงแรกหลังการไหลเริ่มต้นขึ้นบาง ๆ ที่บรรจุไว้ด้วยของไหลที่มีเกรเดียนต์ของความเร็วสูง (และแน่นอนมีวอร์ทิสิตี, Vorticity, สูง) จะเกิดขึ้นที่ชายหลัง ย่านที่มีค่าวอร์ทิสิตีสูงนี้จะยึดอยู่กับกลุ่มอนุภาคของไหล (Fluid element) ชุดหนึ่ง และจะถูกพัดทิ้งไปทางด้านหลังของการไหลพร้อมกับที่กลุ่มอนุภาคของไหลเคลื่อนที่ออกจากชายหลัง ในขณะที่เคลื่อนที่ไปทางด้านหลัง เนื่องจากแถบบาง ๆ ที่มีวอร์ทิสิตีสูงบรรจุอยู่ไม่มีความมั่นคง ดังนั้นมันจะพยายามม้วนขึ้นและก่อตัวคล้ายกับจุดวอร์เทคเราเรียกวอร์เทคที่เกิดขึ้นนี้ว่า “วอร์เทคเริ่มต้น” (Starting vortex) และแสดงให้เห็นในรูป 4.17 ข หลังจากการไหลรอบแพนอากาศเข้าสู่สภาวะคงที่ การไหลจะละจากชายหลังอย่างราบเรียบตามเงื่อนไขของคุตต้า เกรเดียนต์ของความเร็วที่ชายหลังจะหมดไปและจะไม่มีค่าวอร์ทิสิตีเกิดขึ้นที่ชายหลังอีก อย่างไรก็ตามวอร์เทคเริ่มต้นที่เกิดขึ้นในตอนแรกของการไหลและเคลื่อนตัวทิ้งไปทางด้านหลังจะคงอยู่ตลอดไป รูป 4.17 ข แสดงสนามการไหลในช่วงระยะเวลาหนึ่งหลังจากการไหลเริ่มต้นและการไหลรอบแพนอากาศเข้าสู่สภาวะคงที่ และวอร์เทคเริ่มต้นเคลื่อนตัวห่างไปทางท้ายลมอนุภาคของไหลที่ตอนแรกจัดตัวเป็นเส้นโค้ง C_1 ในรูป 4.17 ก ตอนนี้จะอัดตัวอยู่ตามโค้ง C_2 ซึ่งมีวงจรมุขในแนว abcd ในรูป 4.17 ข ดังนั้นจากทฤษฎีของเคลวินค่าการหมุนวนรอบโค้ง C_2 ที่ล้อมรอบทั้งแพนอากาศและ วอร์เทคเริ่มต้นไว้ภายในจะเหมือนกับรอบโค้ง C_1



(ก) ของไหลอยู่นิ่งเทียบกับแผนอากาศ



(ข) ภาพการไหลชั่วขณะหลังการเคลื่อนไหว

รูป 4.17 การเกิดวอร์เทกเริ่มต้นและผลลัพธ์ของการเกิดแรงยกบนแผนอากาศ (Anderson, 2016)

หรือเท่ากับศูนย์ นั่นคือ $\Gamma_1 = \Gamma_2 = 0$ ถ้าเราแบ่งโค้ง C_2 เป็นสองส่วน คือโค้งปิด C_4 และ C_3 ตามวงจร $abda$ และ $bcdb$ โค้ง C_3 ล้อมรอบวอร์เทกเริ่มต้น โค้ง C_4 ล้อมรอบแผนอากาศ จะเห็นว่า Γ_3 จะเป็นผลมาจากวอร์เทกเริ่มต้น และจากรูปจะเห็นว่า Γ_3 อยู่ในทิศทวนเข็มนาฬิกา หรือมีค่าเป็นลบ การหมุนวนรอบโค้ง C_4 ที่ล้อมรอบแผนอากาศเป็น Γ_4 และเพราะว่าส่วนโค้ง bd ร่วมกันระหว่าง C_3 และ C_4 ผลรวมของการหมุนวนรอบ C_3 และ C_4 จะเท่ากับรอบโค้ง C_2 $\Gamma_3 + \Gamma_4 = \Gamma_2$ แต่ $\Gamma_2 = 0$ ดังนั้น $\Gamma_4 = -\Gamma_3$ นั่นคือการหมุนวนรอบแผนอากาศจะเท่ากับและอยู่ในทิศทางตรงข้ามกับการหมุนวนรอบวอร์เทกเริ่มต้น

จากที่กล่าวมานำไปสู่ข้อสรุปและความสำคัญของหัวข้อนี้ คือ เมื่อการไหลผ่านแผนอากาศเริ่มต้นขึ้น ค่าเกรเดียนต์ความเร็วที่มากที่ชายหลังจะเป็นผลให้เกิดการก่อดวงของบริเวณที่เต็มไปด้วยวอร์ทิกซ์ ซึ่งจะค่อยๆ ม้วนตัวขึ้นไปทางด้านหลังจากชายหลัง และก่อดวงเป็นวอร์เทกเริ่มต้นซึ่งมีค่าการหมุนวนโดยรอบเป็นการหมุนทวนเข็มนาฬิกา ดังนั้นจากปฏิกิริยาที่เกิดขึ้นเท่ากันในทิศทางตรงข้ามก็จะเกิดการหมุนวนตามเข็มนาฬิกาขึ้นรอบแผนอากาศ เมื่อกระบวนการดำเนินต่อไป วอร์ทิกซ์จากชายหลังจะถูกป้อนเข้าสู่วอร์เทกเริ่มต้นอย่างคงที่ และทำให้มันมีกำลังเพิ่มขึ้น และมีการหมุนวนทวนเข็มนาฬิกาเพิ่มขึ้น ทำให้การหมุนวนรอบแผนอากาศเพิ่มขึ้นพร้อมกัน ดังให้การไหลที่ชายหลังเข้าสู่เงื่อนไขของคุดด้าและทำให้วอร์ทิกซ์ที่ทอดตัวไปด้านหลังอ่อนกำลังลงตามลำดับ จนในที่สุดวอร์เทกเริ่มต้นจะถูกสร้างขึ้นจนมีกำลังพอดีทำให้เกิดการหมุนวนในทิศทางตรงข้ามรอบแผนอากาศที่ทำให้การไหลจากชายหลังอย่างราบเรียบตามเงื่อนไขของคุดด้า เมื่อถึงตรงนี้วอร์ทิกซ์ที่ทอดไปทางด้านหลังจะมีกำลังเป็นศูนย์ และวอร์เทกเริ่มต้นจะไม่เพิ่มความแรงขึ้นอีก และการหมุนวนรอบแผนอากาศจะเข้าสู่สภาวะคงที่

4.7 ทฤษฎีแพนอากาศบาง : แพนอากาศสมมาตร (Classical Thin Airfoil Theory : The Symmetric Airfoil)

ในหัวข้อที่ผ่านมา ได้สำรวจคุณลักษณะของแพนอากาศจากผลการทดลองและแนวทางกับปรัชญาที่ใช้ร่วมกับทฤษฎีในการวิเคราะห์ ในหัวข้อนี้ จะเริ่มพิจารณาทางทฤษฎีสำหรับการไหลผ่านแพนอากาศบางที่สร้างแรงยก ในกรณีที่เกิดแรงยกบนแพนอากาศนั้นแรงยกจะเป็นผลมาจากสองส่วนคือ มุมปะทะและความโค้ง ในหัวข้อนี้เราจะพิจารณาแพนอากาศสมมาตรที่มีมุมปะทะ สำหรับแพนอากาศที่มีความโค้ง จะกล่าวถึงในหัวข้อต่อไป

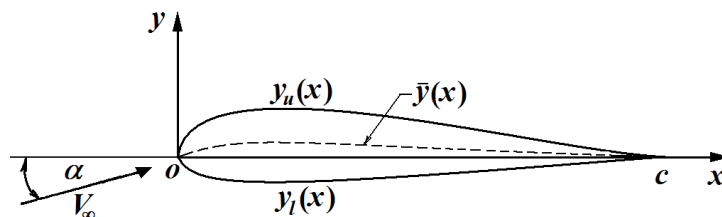
พิจารณาแพนอากาศใด ๆ ในรูป 4.18 ให้ผิวบนและผิวล่างของแพนอากาศกำหนดด้วยเส้นโค้ง $y_u(x)$ และ $y_l(x)$ ให้ c เป็นความยาวคอร์ดและกำหนดให้แกน x ทับแนวคอร์ดมีจุดกำเนิดอยู่ที่ ขาหน้า ให้ความเร็วกระแสอิสระ V_∞ ทำมุมปะทะ α กับคอร์ด ถ้า $\bar{y}(x)$ และ $T(x)$ เป็นเส้นโค้งเฉลี่ยและการแจกแจงความหนาของแพนอากาศ (Kuethe & Chow, 1997) ดังนั้น

$$T(x) = y_u(x) - y_l(x) \quad (4.11)$$

$$\bar{y}(x) = \frac{1}{2}(y_u(x) + y_l(x)) \quad (4.12)$$

หรือ
$$y_u(x) = \bar{y}(x) + \frac{1}{2}T(x) \quad (4.13a)$$

$$y_l(x) = \bar{y}(x) - \frac{1}{2}T(x) \quad (4.13b)$$



รูป 4.18 รูปร่างของแพนอากาศกำหนดโดยสมการเส้นโค้งผิวบนและผิวล่าง (Moran, 2010)

สำหรับการไหลไร้ความหนืดไร้การอัดตัวทิศทางของกระแสอากาศจะไหลในแนวสัมผัสกับผิวของแพนอากาศ เพราะฉะนั้น

ตามผิวบน $y = y_u \rightarrow \frac{v}{u} = \frac{dy_u}{dx} \quad (4.14a)$

ตามผิวล่าง $y = y_l \rightarrow \frac{v}{u} = \frac{dy_l}{dx} \quad (4.14b)$

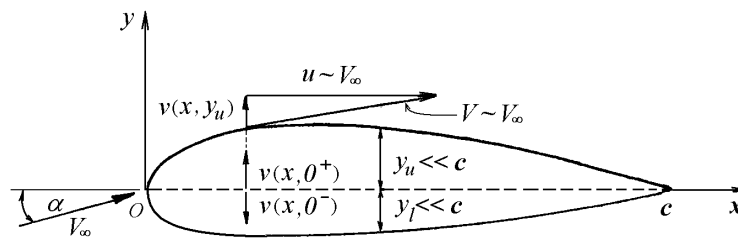
เมื่อ $\frac{dy_u}{dx}$ และ $\frac{dy_l}{dx}$ คือความชันของเส้นโค้งผิวแพนอากาศด้านบนและด้านล่าง u และ v คือส่วนของความเร็วขนานกับแกน x และแกน y สำหรับแพนอากาศบางที่มีมุมปะทะต่ำอาจประมาณค่าความเร็ว u และ v บนผิวของแพนอากาศได้ดังนี้

$$u \cong V_\infty \cos \alpha \cong V_\infty \quad (4.15)$$

$$v(x, y_u) \cong v(x, 0^+) \quad (4.16a)$$

$$v(x, y_l) \cong v(x, 0^-) \quad (4.16b)$$

ในสมการ (4.15) กรณีแผนอากาศบางทิศทางและขนาดของความเร็ว V จะเปลี่ยนแปลงไปจากความเร็ว V_∞ ไม่มากและมุมที่ความเร็ว V ทำกับแนวคอร์ตัน้อย (ยกเว้นบริเวณชายหน้า) จึงประมาณค่า u ด้วย V_∞ ได้ ในสมการ (4.16a) และ (4.16b) ตำแหน่งของจุดบนผิวแผนอากาศด้านบนและด้านล่างไม่ห่างจากคอร์ต ดังนั้นจึงอาจประมาณค่าความเร็ว v ตามผิวบนโดยใช้ค่า v บนแกน x ด้านบน ($y \rightarrow 0^+$) และประมาณค่าความเร็วตามผิวด้านล่างโดยใช้ค่า v ใต้แกน x ด้านล่าง ($y \rightarrow 0^-$) ในการคำนวณได้



รูป 4.19 การประมาณค่าความเร็วบนผิวแผนอากาศบาง (Moran, 2010)

แทนค่าจากสมการ (4.13a) และ (4.13b) กับความเร็ว u และ v โดยประมาณลงในสมการ (4.14) จะได้ว่า สำหรับแผนอากาศบางความเร็วโดยประมาณบนผิวในทิศทางตั้งฉากกับคอร์ตจะสัมพันธ์กับความโค้ง $\bar{y}$ และการแจกแจงความหนา $T(x)$ ตามสมการ

$$v(x, 0^+) = V_\infty \left(\frac{d\bar{y}}{dx} + \frac{1}{2} \frac{dT}{dx} \right) \quad (4.17a)$$

$$v(x, 0^-) = V_\infty \left(\frac{d\bar{y}}{dx} - \frac{1}{2} \frac{dT}{dx} \right) \quad (4.17b)$$

ทำนองเดียวกันค่าความเร็ว $u(x, y_u)$, $u(x, y_l)$ และสัมประสิทธิ์ความดัน $c_p(x, y_u)$, $c_p(x, y_l)$ ตามผิวบนและผิวด้านล่างของแผนอากาศก็สามารถประมาณค่าโดยใช้ค่าด้านบนและด้านล่างของแกน x (แนวคอร์ต) แทนได้เช่นเดียวกัน แต่ต้องระลึกไว้เสมอว่าถึงแม้จะคิดค่าบนแกน x เหมือนกันแต่ 0^+ แทนการเข้าสู่แกน x จากผิวด้านบน และ 0^- แทนการเข้าสู่แกน x จากผิวด้านล่าง ซึ่งไม่จำเป็นต้องมีค่าเหมือนกัน

ถ้าพิจารณากระแสอิสระที่ไหลผ่านแผนอากาศที่มุมปะทะอันหนึ่งที่ถูกต้องทำให้เบี่ยงเบนไปจากความเป็นการไหลเอกรูป (Uniform flow) ว่าเป็นผลมาจาก ความหนา และความโค้งของแผนอากาศ จะสะดวกที่จะพิจารณาสนามการไหลที่มีศักย์ความเร็ว (Velocity potential) ϕ ที่เป็นผลรวมของ ศักย์ความเร็วของการไหล 3 ส่วน คือ

$$\phi = \phi_{\infty} + \phi_T + \phi_C \quad (4.18)$$

โดยที่ ϕ_{∞} เป็น ศักย์ความเร็วของการไหลเอกรูปที่ ∞

ϕ_T เป็นศักย์ความเร็วที่ใช้แทนผลจากความหนาของแพนอากาศ

ϕ_C เป็นศักย์ความเร็วที่ใช้แทนผลจากความโค้งของแพนอากาศ

ความเร็ว u และ v ที่แต่ละจุดในสนามการไหลจะเป็นผลมาจากการเหนี่ยวนำของศักย์ความเร็ว ϕ ดังนั้นเรามองหาฟังก์ชัน ϕ ของการไหลที่เป็นการไหลไร้ความหนืดไร้การอัดตัว (ϕ ที่สอดคล้องกับสมการลาปลาซ $\nabla^2 \phi = 0$) มีความเร็วสม่ำเสมอ (Uniform) ที่ ∞ มีมุมปะทะ α และความเร็วที่ผิวแพนอากาศอยู่ในแนวสัมผัสผิว หรือมีความเร็วตามสมการ (4.17a) และ (4.17b) โดยประมาณ นั่นคือ

$$\nabla^2 \phi = \nabla^2 \phi_{\infty} + \nabla^2 \phi_T + \nabla^2 \phi_C = 0 \quad (4.19)$$

ให้ ϕ_{∞} เป็นศักย์ความเร็วของการไหลเอกรูปที่มุมปะทะ α

$$\phi_{\infty} = (V_{\infty} \cos \alpha) x + (V_{\infty} \sin \alpha) y$$

สำหรับมุมปะทะต่ำ ($< 20^\circ$) $\cos \alpha \cong 1$ และ $\sin \alpha \cong \alpha$ ดังนั้น

$$\phi_{\infty} = V_{\infty} x + V_{\infty} \alpha y \quad (4.20)$$

ϕ_{∞} ในสมการ (4.20) ให้ค่าความเร็วที่ ∞ เป็น V_{∞} ที่มุมปะทะ α และสอดคล้องกับสมการลาปลาซ ดังนั้นเพื่อให้เงื่อนไขของการไหลสอดคล้องกับที่กล่าวไว้แล้ว เราจึงมองหา ϕ_T และ ϕ_C ที่

1. เป็นศักย์ความเร็วที่ต้องสอดคล้องกับสมการลาปลาซ

$$\nabla^2 \phi_T = \nabla^2 \phi_C = 0$$

2. ความเร็ว $\vec{V}_T$ และ $\vec{V}_C$ ที่เกิดจาก ϕ_T และ ϕ_C จะต้องเป็นศูนย์ เมื่อห่างจากแพนอากาศออกไปสู่ ∞

3. ความเร็วตามแกน y , v_T และ v_C ที่เกิดจาก ϕ_T และ ϕ_C เมื่อรวมกับความเร็วตามแกน y , v_{∞} จาก ϕ_{∞} จะต้องให้ความเร็ว v ที่สอดคล้องกับสมการ (4.17) นั่นคือ

$$v_{\infty} + v_T(x, 0^+) + v_C(x, 0^+) = V_{\infty} \left(\frac{dy}{dx} + \frac{1}{2} \frac{dT}{dx} \right) \quad (4.21a)$$

$$v_{\infty} + v_T(x, 0^-) + v_C(x, 0^-) = V_{\infty} \left(\frac{dy}{dx} - \frac{1}{2} \frac{dT}{dx} \right) \quad (4.21b)$$

ในสมการ (4.21) ความเร็ว v ตามผิวบนและผิวล่างเนื่องจาก ϕ_{∞} , ϕ_T และ ϕ_C จะขึ้นอยู่กับความเร็วกระแสนิรยะ เทอมที่มาจากความโค้ง ($\frac{dy}{dx}$) และเทอมที่มาจากความหนา ($\frac{dT}{dx}$) เลือกให้ค่า v_T สัมพันธ์กับเทอม $\frac{dT}{dx}$ ในสมการ (4.21) นั่นคือ เลือก

$$v_T(x, 0^{\pm}) = \pm \frac{1}{2} V_{\infty} \frac{dT}{dx} \quad \text{ในช่วง } 0 < x < c \quad (4.22)$$

เมื่อแทนค่า $v_{\infty} = V_{\infty} \alpha$ และ v_T จากสมการ (4.22) ลงในสมการ (4.21) จะได้ $v_C(x, 0^{\pm})$ มีค่าเป็น

$$v_c(x, 0^\pm) = V_\infty \left(\frac{dy}{dx} - \alpha \right) \quad \text{ในช่วง } 0 < x < c \quad (4.23)$$

สังเกตว่าเราพิจารณาสมการ (4.22) และ (4.23) ในช่วง $0 < x < c$ คือจากซ้ายหน้าไปซ้ายหลัง เพราะเราพิจารณาเฉพาะความเร็วบนผิวแพนอากาศเป็นหลัก ข้อสังเกตอีกข้อหนึ่งคือ ความเร็ว v_T เนื่องจาก ϕ_T ที่ประมาณบนแกน x และได้แกน x จะมีค่าเท่ากันแต่มีทิศตรงข้ามกัน หรือความเร็ว v_T จะเปลี่ยนเป็นทิศตรงข้ามเมื่อข้ามแกน x แต่ความเร็ว v_c เนื่องจาก ϕ_c จะมีค่าเท่ากันทั้งบนแกน x และได้แกน x หรือความเร็วไม่เปลี่ยนเมื่อข้ามแกน x ดังนั้นเราพยายามหา ϕ_T และ ϕ_c ที่สอดคล้องกับเงื่อนไขที่กล่าวมาทั้ง 3 ข้อ และทำให้เกิดความเร็ว v ที่มีลักษณะตามสมการ (4.22) และ (4.23) ในช่วง $0 < x < c$

เงื่อนไขทั้งหมดที่จำเป็นสำหรับ ϕ_T จะสอดคล้องกับศักย์ความเร็วของเส้นซอร์ส (Line source) ที่มีการแจกแจงบนแกน x จาก 0 ถึง c ด้วยความหนาแน่น $q(x)$ สังเกตว่าเส้นซอร์สจะเหนี่ยวนำให้เกิดการไหลที่เป็นการไหลไร้การหมุนไร้การอัดตัว (Incompressible irrotational flow) หรือ $\nabla^2 \phi_s = 0$ เมื่อ ϕ_s คือศักย์ความเร็วของเส้นซอร์สที่มีการแจกแจงบนแกน x และความเร็วเนื่องจากซอร์สจะเป็นศูนย์เมื่อระยะห่างจากซอร์สไปยังจุดวัดความเร็วเข้าสู่ ∞

สำหรับเส้นซอร์สความหนาแน่น $q(t)$ ที่มีการแจกแจงบนแกน x จาก 0 ถึง c จะเหนี่ยวนำให้เกิดความเร็วตามสมการ (3.127) และ (3.128) จากบทที่ 3

$$u_s = \int_0^c \frac{q(t)}{2\pi} \frac{(x-t)}{(x-t)^2 + y^2} dt$$

$$v_s = \int_0^c \frac{q(t)}{2\pi} \frac{y}{(x-t)^2 + y^2} dt$$

การประมาณค่าทำได้บนแกน x ในช่วง 0 ถึง c ทำนองเดียวกับ สมการ (3.130) และ (3.133) คือ

$$v_s(x, 0^\pm) = \pm \frac{1}{2} q(x) \quad (4.24)$$

$$u_s(x, 0^\pm) = \frac{1}{2\pi} \int_0^c \frac{q(t)}{(x-t)} dt \quad (4.25)$$

จะเห็นว่าศักย์ความเร็วของเส้นซอร์สจะสอดคล้องกับเงื่อนไขของ ϕ_T ทุกประการ ดังนั้นอาจสรุปได้ว่า ϕ_T ที่หาอยู่คือศักย์ความเร็วของเส้นซอร์สที่มีการแจกแจงด้วยกำลังต่อหน่วยความยาว $q(x)$ จาก 0 ถึง c บนแกน x

เพราะฉะนั้น จากสมการ (4.22) และ (4.24)

$$v_s(x, 0^\pm) = \pm \frac{1}{2} V_\infty \frac{dT}{dx} = \frac{1}{2} q(x)$$

นั่นคือ

$$q(x) = V_\infty \frac{dT}{dx} \quad (4.26)$$

กำลังของซอร์สที่เป็นตัวแทนของการไหลผ่านความหนาของแพนอากาศจะได้จากสมการ (4.26) แทนสมการ (4.26) ลงในสมการ (4.25) จะได้

$$u_s(x, 0^\pm) = u_T(x, 0^\pm) = \frac{V_\infty}{2\pi} \int_0^c \frac{T'}{x-t} dt \quad (4.27)$$

เมื่อ $T' = \frac{dT}{dx}$ สังเกตว่าในสมการ (4.27) เส้นซอร์สที่มีการแจกแจงบนแกน x จะเหนี่ยวนำให้เกิดความเร็ว u ที่ไม่เปลี่ยนค่าเมื่อข้ามจากบนลงล่างผ่านแกน x นั่นคือเส้นซอร์สจะเหนี่ยวนำให้เกิดความเร็ว

$$u_T(x, 0^+) = u_T(x, 0^-) \quad (4.28)$$

แต่จะเหนี่ยวนำให้เกิดความเร็ว v ที่เปลี่ยนค่าจากบวกเป็นลบเมื่อข้ามจากบนลงล่างผ่านแกน x

$$v_T(x, 0^+) = -v_T(x, 0^-) \quad (4.29)$$

จากความเร็วส่วนที่เกิดจาก ϕ_T ในสมการ (4.28) และ (4.29) ทำให้เรากำหนดเงื่อนไขที่จะใช้พิจารณาหา ϕ_C ได้ดังต่อไปนี้ พิจารณาส่วนของความเร็วตามผิวบนและผิวบนและผิวล่างโดยประมาณที่เกิดจาก ϕ_∞ , ϕ_T และ ϕ_C

$$u(x, 0^+) = V_\infty + u_T(x, 0^+) + u_C(x, 0^+) \quad (4.30a)$$

$$u(x, 0^-) = V_\infty + u_T(x, 0^-) + u_C(x, 0^-) \quad (4.30b)$$

จากสมการ (4.28) $u_T(x, 0^+) = u_T(x, 0^-)$ ดังนั้นในสมการ (4.30) $u_C(x, 0^+)$ ต้องมีค่าไม่เท่ากับ $u_C(x, 0^-)$ ไม่เช่นนั้นเราจะได้สถานการณ์ที่การประมาณค่าความเร็ว u ขนานกับคอร์ดตามผิวบนและผิวล่างของแพนอากาศทุกจุดตามแนวคอร์ดเท่ากันเสมอ ซึ่งเป็นไปไม่ได้สำหรับแพนอากาศที่ไม่สมมาตร แต่จากสมการ (4.23)

$$v_C(x, 0^+) = v_C(x, 0^-) \quad (4.31)$$

ดังนั้นจึงต้องหา ϕ_C ที่สอดคล้องกับเงื่อนไขที่กล่าวมาและเหนี่ยวนำให้เกิดความเร็ว $u_C(x, 0^+) \neq u_C(x, 0^-)$ และ $v_C(x, 0^+) = v_C(x, 0^-)$ จะเห็นว่าเงื่อนไขที่กำหนด ϕ_C จะเหมือนกับเงื่อนไขที่กำหนด ϕ_T ทุกประการ เว้นแต่เงื่อนไขของความเร็ว u_C และ v_C ที่สลับกับเงื่อนไขของความเร็ว u_T และ v_T ซึ่งแสดงไว้ด้านล่าง คือ

ϕ_T	ϕ_C
$u_T(x, 0^+) = u_T(x, 0^-)$	$u_C(x, 0^+) \neq u_C(x, 0^-)$
$v_T(x, 0^+) \neq v_T(x, 0^-)$	$v_C(x, 0^+) = v_C(x, 0^-)$

เงื่อนไขนี้ทำให้เห็นว่า ϕ_C น่าจะเป็นศักย์ความเร็วของวอร์เทคที่มีการแจกแจงบนแกน x จาก 0 ถึง c ด้วยกำลังต่อหน่วยความยาว $\gamma(x)$ ลองพิจารณาวอร์เทคที่มีการแจกแจงบนแกน x จาก 0 ถึง c ความเร็วที่ถูกเหนี่ยวนำจากวอร์เทคจะเป็น

$$u_v = \int_0^c \frac{\gamma(t)}{2\pi} \frac{y}{(x-t)^2 - y^2} dt \quad (4.32)$$

$$v_v = - \int_0^c \frac{\gamma(t)}{2\pi} \frac{x-t}{(x-t)^2 - y^2} dt \quad (4.33)$$

สังเกตว่ารูปของการอินทิเกรตค่า u_v ในสมการ (4.32) จะตรงกับสมการ (3.128) สำหรับ v_s และรูปของการอินทิเกรตค่า v_v ในสมการ (4.33) จะตรงกับสมการ (3.127) สำหรับ u_s ดังนั้นผลลัพธ์ของการประมาณค่า u_v และ v_v บนแกน x จะเป็น

$$u_v(x, 0^\pm) = \pm \frac{1}{2} \gamma(x) \quad (4.34)$$

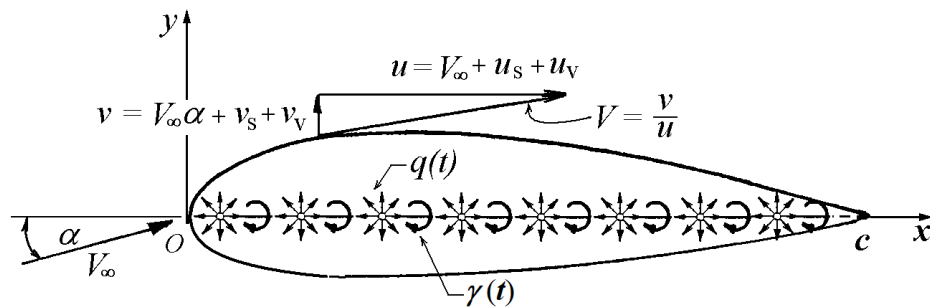
และ
$$v_v(x, 0^\pm) = \int_0^c \frac{\gamma(t)}{2\pi} \frac{dt}{(x-t)} \quad (4.35)$$

ตามรูปทางขวาของรูป 4.9

เราอาจสรุปอีกครั้งหนึ่งได้ว่า ϕ_c ที่มองหายุ่งจะเป็นศักย์ความเร็วของเส้นวอร์เทคที่มีการแจกแจงบนแกน x ด้วยกำลังต่อความยาว $\gamma(x)$ จาก 0 ถึง c เมื่อแทนค่า $v_c(x, 0^\pm)$ เท่ากับ $v_v(x, 0^\pm)$ ตามสมการ (4.25) ลงในสมการ (4.23) จะได้

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^c \frac{\gamma(t)}{(x-t)} dt = V_\infty \left(\alpha - \frac{dy}{dx} \right) \quad (4.36)$$

ถึงตรงนี้การไหลผ่านแพนอากาศที่มีความหนา ความโค้ง และมุมปะทะ ถูกจำลองด้วยการไหลเอกรูปที่มุมปะทะ α ผ่านเส้นซอร์สและเส้นวอร์เทคที่มีการแจกแจงบนแกน x จาก 0 ถึง c โดยที่ กำลังของซอร์สกำหนดโดยสมการ (4.26) และกำลังของวอร์เทคกำหนดโดยสมการ (4.36) ตามที่แสดงในรูป 4.20



รูป 4.20 การแทนแทนอากาศด้วยซอร์สและวอร์เทคบนแกน x (Moran, 2010)

สังเกตว่าเมื่อทราบความโค้งและมุมปะทะของแพนอากาศเราจะหาค่า $\gamma(x)$ ที่เหมาะสมได้จากสมการ (4.36) แต่ว่าการหาค่า $\gamma(x)$ ทำได้ยากกว่ามากเมื่อเทียบกับการหาค่า $q(x)$ จากสมการ (4.26) และหลังจากทราบค่า $q(x)$ และ $\gamma(x)$ แล้วจะคำนวณค่า $u(x, 0^\pm)$ และ $v(x, 0^\pm)$ ตามผิวบนและผิวล่างของแพนอากาศได้จากสมการ (4.24), (4.25), (4.34) และ (4.35) โดยส่วนความเร็ว u และ v จะเป็น

$$u = V_\infty + u_T + u_C \quad (4.37a)$$

$$\mathbf{v} = V_\infty \boldsymbol{\alpha} + \mathbf{v}_T + \mathbf{v}_C \quad (4.37b)$$

การคำนวณความดันรอบแพนอากาศหลังจากทราบความเร็วแล้วจะได้จากสมการเบอร์นูลลี

$$p + \frac{1}{2} \rho (u^2 + v^2) = p_\infty + \frac{1}{2} \rho V_\infty^2$$

ค่าความเร็วโดยประมาณที่ผิวได้จาก $u_T(x, 0^\pm)$, $v_T(x, 0^\pm)$, $u_C(x, 0^\pm)$ และ $v_C(x, 0^\pm)$ กับความเร็วกระแสอิสระ V_∞ แต่สำหรับแพนอากาศบาง

$$u_T, u_C, v_T, v_C \ll V_\infty$$

ดังนั้นประมาณค่าความดันรอบแพนอากาศได้จาก

$$p = p_\infty + \frac{1}{2} \rho V_\infty^2 - \frac{1}{2} \rho (V_\infty + u_T + u_C)^2 - \frac{1}{2} \rho (V_\infty \boldsymbol{\alpha} + \mathbf{v}_T + \mathbf{v}_C)^2$$

เทอมสุดท้ายทางขวาของสมการเป็นเทอมที่มีค่าน้อยเมื่อเทียบกับเทอมอื่นเมื่อยกกำลัง 2 จะมีค่าน้อยกว่าเทอมอื่นลงไปอีก ดังนั้น

$$p \cong p_\infty + \frac{1}{2} \rho V_\infty^2 - \frac{1}{2} \rho (V_\infty^2 + 2V_\infty(u_T + u_C) + (u_T + u_C)^2)$$

เช่นเดียวกันเทอมสุดท้ายในวงเล็บมีค่าน้อยกว่ามากเทียบกับเทอมอื่น เพราะฉะนั้นความดัน ณ จุดใดๆ จะมีค่าโดยประมาณเป็น

$$p \cong p_\infty - \rho V_\infty (u_T + u_C) \quad (4.38)$$

จากสมการ (4.38) ค่าความดันโดยประมาณตามผิวบนและผิวล่างของแพนอากาศจะได้จากการแทนค่า $u_T(x, 0^\pm)$ และ $u_C(x, 0^\pm)$ ลงในสมการ

$$\text{สำหรับผิวบน :} \quad p_u = p_\infty - \rho V_\infty [u_T(x, 0^+) + u_C(x, 0^+)] \quad (4.39a)$$

$$\text{สำหรับผิวล่าง :} \quad p_l = p_\infty - \rho V_\infty [u_T(x, 0^-) + u_C(x, 0^-)] \quad (4.39b)$$

หลังจากทราบค่า p_u และ p_l จะหาแรงลัพธ์ที่ทำบนแพนอากาศได้จาก

$$F'_x = \int_0^c \left(p_u \frac{dy_u}{dx} - p_l \frac{dy_l}{dx} \right) dx \quad (4.40)$$

$$F'_y = \int_0^c (p_l - p_u) dx \quad (4.41)$$

สมการทั้งสองมาจากบทที่ 1 หัวข้อ 1.6 แทนค่า p_u และ p_l จากสมการ (4.39) แล้วอินทิเกรตจะได้

$$\begin{aligned} F'_y &= \int_0^c \left\{ (p_\infty - \rho V_\infty [u_T(x, 0^-) + u_C(x, 0^-)]) - (p_\infty - \rho V_\infty [u_T(x, 0^+) + u_C(x, 0^+)]) \right\} dx \\ &= \int_0^c \rho V_\infty [u_T(x, 0^+) + u_C(x, 0^+) - u_T(x, 0^-) - u_C(x, 0^-)] dx \end{aligned}$$

แต่ $u_T(x, 0^+) = u_T(x, 0^-)$ และ $u_C(x, 0^\pm) = \pm \frac{1}{2} \gamma(x)$ ดังนั้น

$$F'_y = \int_0^c \rho V_\infty \gamma(x) dx = \rho V_\infty \int_0^c \gamma(x) dx \quad (4.42)$$

ในสมการ (4.42) $\int_0^c \gamma(x) dx$ คือผลรวมของกำลังวอร์เทคทั้งหมดที่กระจายอยู่บนแกน x จาก 0

ถึง c และมีค่าเท่ากับการหมุนวนรอบโค้งใดๆ ที่ล้อมรอบวอร์เทคทั้งหมดไว้ ถ้าให้ $\Gamma = \int_0^c \gamma(x) dx$ จะได้

$$F'_y = \rho V_\infty \Gamma \quad (4.43)$$

ส่วนแรง F'_x ได้จากการแทนค่า p_u และ p_l จากสมการ (4.39) ลงในสมการ (4.40)

$$\begin{aligned} F'_x &= \int_0^c \left\{ \left(p_\infty - \rho V_\infty [u_T(x, 0^+) + u_C(x, 0^+)] \right) \frac{dy_u}{dx} \right. \\ &\quad \left. - \left(p_\infty - \rho V_\infty [u_T(x, 0^-) + u_C(x, 0^-)] \right) \frac{dy_l}{dx} \right\} dx \\ &= \int_0^c \left(p_\infty \frac{dy_u}{dx} - p_\infty \frac{dy_l}{dx} \right) dx \\ &\quad - \rho V_\infty \int_0^c (u_T(x, 0^+) \frac{dy_u}{dx} + u_T(x, 0^-) \frac{dy_l}{dx}) dx \\ &\quad - \rho V_\infty \int_0^c (u_C(x, 0^+) \frac{dy_u}{dx} + u_C(x, 0^-) \frac{dy_l}{dx}) dx \end{aligned}$$

แต่จากด้านบน $u_T(x, 0^+) = u_T(x, 0^-)$ และ $u_C(x, 0^\pm) = \pm \frac{1}{2} \gamma(x)$ ดังนั้น

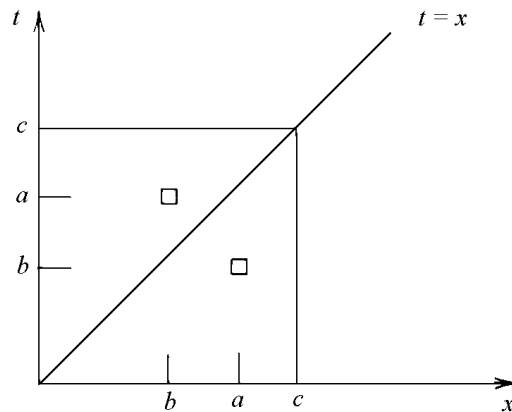
$$\begin{aligned} F'_x &= p_\infty \int_0^c \left(\frac{dy_u}{dx} - \frac{dy_l}{dx} \right) dx - \rho V_\infty \int_0^c u_T(x, 0^+) \left(\frac{dy_u}{dx} - \frac{dy_l}{dx} \right) dx \\ &\quad - \rho V_\infty \int_0^c u_C(x, 0^+) \left(\frac{dy_u}{dx} + \frac{dy_l}{dx} \right) dx \end{aligned}$$

แทนค่า $u_T(x, 0^+)$ ตามสมการ (4.27) และ $u_C(x, 0^+)$ ตามสมการ (4.34) และใช้ความสัมพันธ์ตามสมการ (4.13) จะได้

$$\begin{aligned} F'_x &= p_\infty (y_u - y_l) \Big|_0^c - \rho V_\infty \int_0^c \left[\frac{V_\infty}{2\pi} \int_0^c \frac{T'}{x-t} dt \right] T' dx \\ &\quad - \rho V_\infty \int_0^c \frac{\gamma(x)}{2} \cdot 2 \frac{d\bar{y}}{dx} dx \end{aligned} \quad (4.44)$$

เทอมแรกทางขวาของสมการ (4.44) มีค่าเป็นศูนย์ เพราะว่าที่ $x = 0$ และ $x = c$; $y_u = y_l$ สำหรับเทอมที่สองค่าอินทิเกรตอยู่ในพอร์ม

$$I \equiv \int_0^c \left[\int_0^c \frac{f(t)f(x)}{x-t} dt \right] dx \quad (4.45)$$



รูป 4.21 ค่าอินทิเกรตตามสมการ (4.45)

ซึ่งเป็นอินทิเกรตพื้นผิว (Surface integral) บนระนาบ $x - t$ ในบริเวณพื้นที่สี่เหลี่ยมจัตุรัสตามที่แสดงในรูป 4.21 ค่าของตัวอินทิเกรตเป็นสมมาตรข้ามแกน (Antisymmetric) ข้ามแกน $x = t$ ตัวอย่างเช่น ที่ตำแหน่ง $x = a$ และ $t = b$ ค่าตัวอินทิเกรตจะเป็น $\frac{f(b)f(a)}{a-b}$ พร้อมกันนั้นที่ตำแหน่ง $x = b$ และ $t = a$ ค่าตัวอินทิเกรตจะเป็น $\frac{f(a)f(b)}{b-a}$ ค่าอินทิเกรตที่ทั้งสองตำแหน่งจะเท่ากันแต่มีเครื่องหมายตรงกันข้ามจึงหักล้างกันหมดไป การอินทิเกรตตามสมการ (4.45) หรือเทอมที่สองของสมการ (4.44) จึงมีค่าเป็นศูนย์ ดังนั้นสมการ (4.44) จึงเหลือเป็น

$$F'_x = -\rho V_\infty \int_0^c \frac{\gamma(x)}{2} \cdot 2 \frac{dy}{dx} dx \quad (4.46)$$

แทนค่า $\frac{dy}{dx}$ จากสมการ (4.36) $\frac{dy}{dx} = \alpha - \frac{1}{2\pi V_\infty} \int_0^c \frac{\gamma(t)}{(x-t)} dt$ ลงในสมการ (4.46) จะได้

$$F'_x = \rho V_\infty \int_0^c \gamma(x) \left[\alpha - \frac{1}{2\pi V_\infty} \int_0^c \frac{\gamma(t)}{(x-t)} dt \right] dx \quad (4.47)$$

อินทิเกรตเทอมที่สองในวงเล็บปีกกาทางขวาของสมการ (4.47) อยู่ในฟอร์มของสมการ (4.45) เพราะฉะนั้นจะมีค่าเป็นศูนย์ สุดท้ายจะได้ F'_x เป็น

$$F'_x = -\rho V_\infty \alpha \int_0^c \gamma(x) dx$$

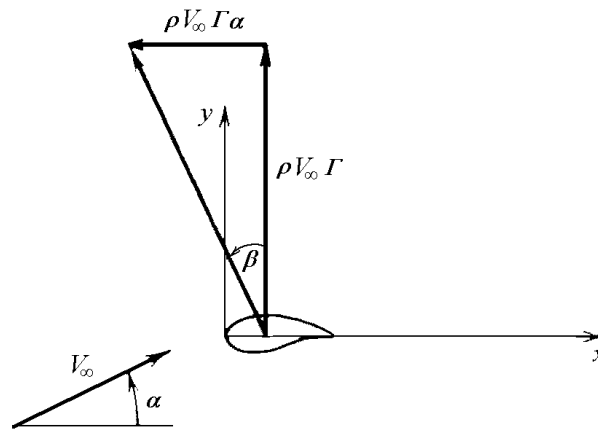
หรือ

$$F'_x = -\rho V_\infty \alpha \Gamma \quad (4.48)$$

สังเกตว่าในสมการ (4.48) F'_x มีค่าเป็นลบหรือมีทิศชี้ไปข้างหน้าตามแนวคอร์ด เมื่อรวมแรง F'_x และ F'_y จะได้แรงลัพธ์ที่กระทำกับแพนอากาศตามรูป 4.22 ทิศทางของแรงลัพธ์ทำมุม β กับแกน y โดยที่

$$\beta = \tan^{-1} \frac{\rho V_\infty \alpha \Gamma}{\rho V_\infty \Gamma} = \tan^{-1} \alpha$$

แต่มุม α มีค่าน้อย ดังนั้น $\tan^{-1} \alpha \cong \alpha$ นั่นคือมุม $\beta = \alpha$ หรือทิศทางของแรงลัพธ์จะอยู่ในแนวตั้งฉากกับ V_∞ หรืออยู่ในแนวของแรงยกทั้งหมด และแรงต้านจะมีค่าเป็นศูนย์เสมอ ซึ่งเป็นสิ่งที่เราคาดการณ์ไว้ก่อนแล้วเพราะการวิเคราะห์ของเราไม่ได้นำผลของแรงเสียดทานมาคิด ขนาดของแรงลัพธ์หรือแรงยกจะได้จาก



รูป 4.22 ทิศทางของแรงลัพธ์บนแพนอากาศที่มีการหมุนวน Γ

$$\begin{aligned} \bar{L}' &= \sqrt{F_x'^2 + F_y'^2} \\ &= \sqrt{(\rho V_\infty \Gamma \alpha)^2 + (\rho V_\infty \Gamma)^2} \\ &= \rho V_\infty \Gamma \sqrt{1 + \alpha^2} \end{aligned}$$

สำหรับ α มีค่าน้อย

$$\bar{L}' \cong \rho V_\infty \Gamma \quad (4.49)$$

เราได้ข้อสรุปที่น่าสนใจจากสมการ (4.49) คือ สำหรับแพนอากาศ แรงยกจะมีค่า $\rho V_\infty \Gamma$ หรือเขียนอยู่ในรูปเวกเตอร์ เป็น

$$\bar{L}' = \rho \vec{V}_\infty \times \vec{\Gamma} \quad (4.50)$$

เมื่อ $\vec{V}_\infty$ คือเวกเตอร์ของความเร็วกระแสอิสระ $\vec{\Gamma}$ คือเวกเตอร์ของการหมุนวนรอบแพนอากาศ มีทิศทางตั้งฉากกับหน้ากระดาน จะเห็นว่าไม่ว่ามุมปะทะจะเป็นเท่าใดก็ตามแรงยกที่ได้จะอยู่ในแนวตั้งฉากกับ V_∞ เสมอ และขนาดของแรงยกจะขึ้นอยู่กับค่าการหมุนวนรอบแพนอากาศตามสมการ (4.49) คงจำได้ว่าข้อสรุปนี้ได้มาครั้งหนึ่งแล้วในหัวข้อ 3.15 ในบทที่ 3 แต่ยังไม่ได้พิสูจน์ในกรณีของแพนอากาศ ดังนั้นการคำนวณที่แสดงผ่านมาจึงเป็นการพิสูจน์ทฤษฎีของคุตต้าและจูคอวสกี (Kutta-Joukowski) ในหัวข้อ 3.15 ได้

สำหรับโมเมนต์ก้มเงย (Pitching moment) รอบชายหน้าคำนวณได้จาก

$$M'_{LE} = - \int_0^c x(p_l - p_u) dx$$

แทนค่า p_u และ p_l จากสมการ (4.39) จะได้

$$M'_{LE} = -\rho V_\infty \int_0^c x \gamma(x) dx \quad (4.51)$$

และคำนวณตำแหน่งจุดศูนย์ความดัน c.p. (Center of pressure) ได้จาก

$$x_{c.p.} = -\frac{M'_{LE}}{L'} = \frac{\int_0^c x \gamma(x) dx}{\int_0^c \gamma(x) dx} \quad (4.52)$$

จากสมการ (4.49) และ (4.52) จะเห็นว่า แรงยกและโมเมนต์บนแพนอากาศจะขึ้นอยู่กับกำลังต่อหน่วยความยาว $\gamma(x)$ ของวอร์เทกที่แจกแจงบนคอร์ดจาก $x = 0$ ถึง c ต่อไปเราจะหาวิธีคำนวณ $\gamma(x)$ เพื่อนำไปหาค่าแรงยกและโมเมนต์

พิจารณาแพนอากาศสมมาตรที่มุมปะทะ α เนื่องจากแพนอากาศสมมาตรไม่มีความโค้ง ดังนั้น $\frac{dy}{dx}$ จะเท่ากับศูนย์ และสมการ (4.36) จะเขียนใหม่เป็น

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^c \frac{\gamma(t)}{(x-t)} dt = V_\infty \alpha \quad (4.53)$$

เนื่องจากเราพิจารณาตัวแปร x และ t อยู่ในช่วง $0 < x < c$ อินทิเกรตในสมการ (4.53) จะง่ายขึ้นถ้าเราเปลี่ยนรูปตัวแปรโดยใช้ความสัมพันธ์

$$x = \frac{c}{2}(1 - \cos \theta_0) \quad (4.54a)$$

ทำนองเดียวกันสำหรับตัวแปร t

$$t = \frac{c}{2}(1 - \cos \theta) \quad (4.54b)$$

จากสมการ (4.54b) จะได้

$$dt = \frac{c}{2} \sin \theta d\theta \quad (4.54c)$$

แทนสมการ (4.54) ลงในสมการ (4.53) และให้ $\gamma(t) \Rightarrow g(\theta)$

เขียนสมการ (4.53) ใหม่เป็น

$$\int_0^\pi \frac{g(\theta) \sin \theta}{\cos \theta - \cos \theta_0} d\theta = 2\pi V_\infty \alpha \quad (4.55)$$

ในสมการ (4.55) ไม่ทราบค่า $g(\theta)$ ซึ่งเป็นการแจกแจงของวอร์เทกตามแนวคอร์ดจาก 0 ถึง c จึงไม่อาจแก้สมการได้โดยตรง แต่ถ้าจำสูตรการอินทิเกรตของพัวส์ซอง (Poisson's Integral formular) ได้จากตัวอย่าง 3.12 ในบทที่ 3 ที่ว่า

$$\int_0^\pi \frac{\cos n\theta}{\cos \theta - \cos \theta_0} d\theta = \pi \frac{\sin n\theta_0}{\sin \theta_0} \quad (4.56)$$

ในสมการ (4.56) ถ้า $n = 1$ ค่าอินทิเกรตจะเป็น

$$\int_0^\pi \frac{\cos \theta}{\cos \theta - \cos \theta_0} d\theta = \pi \quad (4.56a)$$

และ ถ้า $n = 0$ ค่าอินทิเกรตจะเป็น

$$\int_0^\pi \frac{1}{\cos \theta - \cos \theta_0} d\theta = 0 \quad (4.56b)$$

ฉะนั้นถ้าเขียนสมการ (4.55) ใหม่เป็น

$$\frac{1}{2V_\infty \alpha} \int_0^\pi \frac{g(\theta) \sin \theta}{\cos \theta - \cos \theta_0} d\theta = \pi \quad (4.55a)$$

พิจารณาสมการ (4.56a) (4.56b) และ (4.55a) จะเห็นว่า $g(\theta)$ น่าจะอยู่ในรูป

$$\frac{1}{2V_\infty \alpha} g(\theta) \sin \theta = \cos \theta + k$$

หรือ

$$g(\theta) = \frac{k}{\sin \theta} + 2V_\infty \alpha \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \quad (4.57)$$

เมื่อ k เป็นค่าคงที่ใด ๆ สมการ (4.57) บอกลักษณะการแจกแจงของวอร์เทค $g(\theta)$ แต่เนื่องจากไม่ทราบค่า k มีค่าเท่าใดแน่ จึงยังไม่สามารถกำหนดค่า $g(\theta)$ ที่เป็นจริงได้ ลองนำ $g(\theta)$ ที่ได้จากสมการ (4.57) ไปคำนวณแรงยกจาก

$$\Gamma = \int_0^c \gamma(x) dx = \int_0^\pi g(\theta) \frac{c}{2} \sin \theta d\theta \quad (4.58)$$

เมื่อแทนตัวแปร x ด้วย θ และแทนค่า $g(\theta)$ จากสมการ (4.57) ได้

$$\Gamma = \int_0^\pi \left[k + 2V_\infty \alpha \cos \theta \right] \frac{c}{2} d\theta$$

นั่นคือ

$$\Gamma = \frac{kc\pi}{2} \quad (4.59)$$

แทนค่า Γ จากสมการ (4.59) ในสมการ (4.49) จะได้

$$L' = \rho V_\infty \Gamma = \rho V_\infty \frac{kc\pi}{2}$$

หมายความว่า L' มีค่าได้ไม่จำกัดขึ้นอยู่กับว่าเราจะใช้ค่า k เป็นเท่าใด ซึ่งขัดกับความจริงซึ่งเราทราบดีว่าที่มุมปะทะอันหนึ่งแผนอากาศจะสร้างแรงยกที่แน่นอนค่าหนึ่งเสมอ และแรงยกนี้จะควบคู่กับการหมุนวนค่าหนึ่งรอบแผนอากาศ ซึ่งจากหัวข้อ 4.5 ในรูป 4.13 คือค่าที่พอดีทำให้กระแสไหลจากชายหลังไปอย่างราบเรียบ ค่า k ที่ให้ค่า Γ มากเกินไปหรือน้อยเกินไปในสมการ (4.59) จะควบคู่กับการไหลที่กระแสจากผิวล่างอ้อมชายหลังขึ้นไปผิวบน หรือกระแสจากผิวบนไหลย้อนอ้อมชายหลังลงมาด้านล่าง ซึ่งเป็นไปไม่ได้ในธรรมชาติทั้งสองกรณี ดังนั้นค่า Γ ที่ถูกต้องจะต้องเป็นไปตามเงื่อนไขของคุตต้า คือ

$$\gamma_c = 0 \quad (4.9)$$

หรือเมื่อแปลงจาก $\gamma(x)$ ไปเป็น $g(\theta)$ คือ

$$g(\pi) = 0 \quad (4.60)$$

แทนสมการ (4.60) ในสมการ (4.57)

$$\begin{aligned} g(\theta) &= \frac{k + 2V_\infty \alpha \cos \theta}{\sin \theta} \\ g(\pi) &= \frac{k + 2V_\infty \alpha \cos(\pi)}{\sin(\pi)} = 0 \end{aligned} \quad (4.61)$$

ในสมการ (4.61) $\sin(\pi) = 0$ ดังนั้นค่าสมการจะเป็นศูนย์ก็ต่อเมื่อเศษเป็นศูนย์ด้วย นั่นคือ

$$k + 2V_\infty \alpha \cos \theta = 0$$

หรือ

$$k = -2V_\infty \alpha$$

เพราะฉะนั้น $g(\theta)$ จะเป็น

$$g(\theta) = -2V_\infty \alpha \frac{1 + \cos \theta}{\sin \theta} \quad (4.62)$$

แทนค่า $k = -2V_\infty \alpha$ ที่ได้ในสมการ (4.59) จะได้

$$\Gamma = -\pi \alpha c V_\infty \quad (4.63)$$

นำไปแทนในสมการ(4.49) จะได้แรงยกต่อหน่วยความยาวปีก

$$L' = \rho V_\infty^2 c \pi \alpha \quad (4.64)$$

นำไปคำนวณค่าสัมประสิทธิ์แรงยกจาก

$$c_l = \frac{L'}{\frac{1}{2} \rho V_\infty^2 S}$$

เมื่อ $S = c(1)$ แทนสมการ (4.64) ในสมการ c_l จะได้

$$c_l = \frac{\rho V_\infty^2 c \pi \alpha}{\frac{1}{2} \rho V_\infty^2 c(1)}$$

จะได้

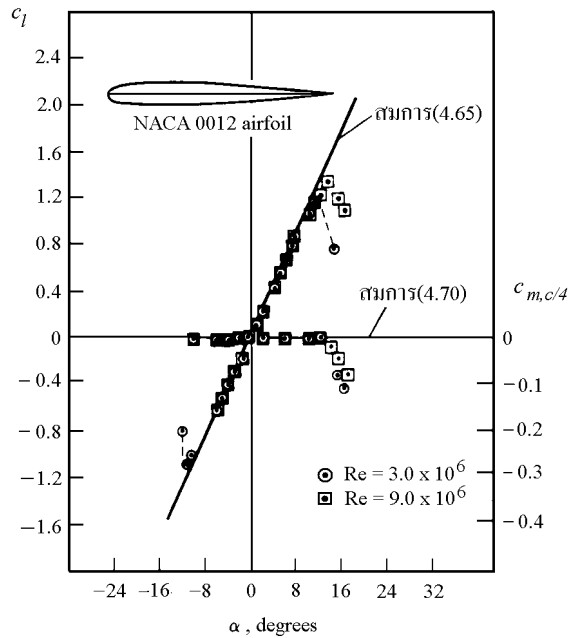
$$c_l = 2\pi \alpha \quad (4.65)$$

และได้ค่าความชันของโค้งแรงยก (Lift curve slope)

$$c_{l_\alpha} = \frac{dc_l}{d\alpha} = 2\pi \quad (4.66)$$

สมการ (4.65) และ (4.66) เป็นผลลัพธ์สำคัญที่แสดงค่าทางทฤษฎีว่า สัมประสิทธิ์แรงยกจะเพิ่มขึ้นเป็นเส้นตรงกับมุมปะทะ นอกจากนี้สมการยังบอกอีกว่าค่าความชันของโค้งแรงยก (Lift slope) ทางทฤษฎีมีค่าเท่ากับ $2\pi \text{ rad}^{-1}$ หรือประมาณ 0.11 degree^{-1} รูป 4.23 เป็นผลการทดลองของ

แพนอากาศ NACA 0012 ซึ่งเป็นแพนอากาศสมมาตร สังเกตว่าทฤษฎีทำนายสัมประสิทธิ์แรงยกที่เกิดขึ้นได้ถูกต้องในช่วงมุมปะทะกว้าง



รูป 4.23 เปรียบเทียบผลการทดลองกับทฤษฎีของสัมประสิทธิ์แรงยกและสัมประสิทธิ์โมเมนต์ของแพนอากาศ NACA 0012 (Anderson, 2016)

สำหรับค่าโมเมนต์รอบขายหน้าคำนวณได้จากสมการ (4.51)

$$M'_{LE} = -\rho V_\infty \int_0^c x \gamma(x) dx$$

เมื่อแทนตัวแปร x ด้วย θ [$x = \frac{c}{2}(1 - \cos \theta)$] จะได้

$$M'_{LE} = -\rho V_\infty \int_0^\pi \frac{c}{2}(1 - \cos \theta) g(\theta) \frac{c}{2} \sin \theta d\theta$$

แทน $g(\theta)$ จากสมการ (4.62) จะได้

$$\begin{aligned} M'_{LE} &= -\rho V_\infty \int_0^\pi \frac{c}{2}(1 - \cos \theta) 2V_\infty \alpha \frac{1 + \cos \theta}{\sin \theta} \frac{c}{2} \sin \theta d\theta \\ &= -\frac{1}{2} \rho V_\infty^2 c^2 \alpha \int_0^\pi (1 - \cos^2 \theta) d\theta \\ &= -\frac{1}{2} \rho V_\infty^2 c^2 \alpha \left\{ \int_0^\pi d\theta - \int_0^\pi \cos^2 \theta d\theta \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -\frac{1}{2}\rho V_\infty^2 c^2 \alpha \left[\theta - \frac{1}{2} \left(\theta - \frac{\sin 2\theta}{2} \right) \right]_0^\pi \\
&= -\frac{1}{2}\rho V_\infty^2 c^2 \alpha \left(\pi - \frac{\pi}{2} \right) \\
M'_{LE} &= -\frac{\pi}{4} \rho V_\infty^2 c^2 \alpha \tag{4.67}
\end{aligned}$$

ในรูปสัมประสิทธิ์โมเมนต์ เมื่อ $S = c$ (1) จะได้

$$\begin{aligned}
c_{m_{LE}} &= \frac{M'_{LE}}{\frac{1}{2}\rho V_\infty^2 c^2} = \frac{-\frac{\pi}{4}\rho V_\infty^2 c^2}{\frac{1}{2}\rho V_\infty^2 c^2} \\
&= -\frac{\pi\alpha}{2} \tag{4.68}
\end{aligned}$$

แต่จากสมการ (4.65) $c_l = 2\pi\alpha \Rightarrow \pi\alpha = \frac{c_l}{2}$

เพราะฉะนั้น $c_{m_{LE}} = -\frac{c_l}{4}$ (4.69)

หาโมเมนต์รอบตำแหน่ง $\frac{1}{4}$ คอร์ดจาก

$$c_{m_{c/4}} = c_{m_{LE}} + \frac{c_l}{4}$$

เมื่อแทนค่าจากสมการ (4.69) จะได้

$$c_{m_{c/4}} = -\frac{c_l}{4} + \frac{c_l}{4} = 0 \tag{4.70}$$

สมการ (4.70) แสดงว่าโมเมนต์รอบตำแหน่ง $1/4$ คอร์ดของแผนอากาศสมมาตรมีค่าเป็นศูนย์ ดังนั้นตำแหน่ง $1/4$ คอร์ดจึงเป็นตำแหน่งของจุดศูนย์ความดัน (c.p.) นอกจากนี้เนื่องจากโมเมนต์ที่ $1/4$ คอร์ดมีค่าคงที่ไม่เปลี่ยนแปลงไปกับมุมปะทะ ดังนั้นตำแหน่ง $1/4$ คอร์ดจึงเป็นตำแหน่งของจุดศูนย์อากาศพลศาสตร์ (a.c., aerodynamic center) ด้วย ดังนั้นในทางทฤษฎีตำแหน่ง $1/4$ คอร์ดเป็นทั้งตำแหน่งจุดศูนย์ความดันและจุดศูนย์อากาศพลศาสตร์สำหรับแผนอากาศสมมาตร

ผลการทดลองในรูป 4.23 ยืนยันผลการคำนวณของสมการ (4.70) สังเกตว่าผลการทดลองแสดงค่าสัมประสิทธิ์โมเมนต์ $c_{m_{c/4}}$ คงที่ในย่านมุมปะทะกว้าง แสดงให้เห็นว่าจุด a.c. อยู่ที่ $1/4$ คอร์ด (หรือใกล้เคียง) จริง

คุณลักษณะเฉพาะตัวของแผนอากาศสมมาตรทางทฤษฎีสรุปได้ดังนี้

1. $c_l = 2\pi\alpha$
2. ค่าความชันโค้งแรงยก $\frac{dc_l}{d\alpha} = 2\pi$
3. ตำแหน่งจุดศูนย์ความดัน (c.p.) และจุดศูนย์อากาศพลศาสตร์ (a.c.) อยู่ที่ $1/4$ คอร์ด

4.8 แพนอากาศบางที่มีความโค้ง (Cambered Thin Airfoil)

ทฤษฎีแพนอากาศบางในหัวข้อ 4.7 อาจนำมาใช้กับแพนอากาศที่มีความโค้งได้เช่นเดียวกับแพนอากาศสมมาตร (Moran, 2010) กำลังของวอร์เทกซ์ $\gamma(x)$ ที่แทนแพนอากาศยังคงได้จากสมการ (4.36)

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^c \frac{\gamma(t)}{(x-t)} dt = V_\infty \left(\alpha - \frac{dy}{dx} \right) \quad (4.36)$$

แต่ค่า $\frac{dy}{dx}$ ที่ไม่เป็นศูนย์ของแพนอากาศที่มีความโค้งทำให้การวิเคราะห์ยากกว่าในกรณีของแพนอากาศสมมาตร ทำการวิเคราะห์ด้วยขั้นตอนอย่างเดียวกับแพนอากาศสมมาตร ก่อนอื่นแปลงตัวแปร x และ t ไปเป็น θ_0 และ θ โดยใช้ความสัมพันธ์ตามสมการ (4.54) จะได้

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^\pi \frac{g(\theta) \sin \theta}{\cos \theta - \cos \theta_0} d\theta = V_\infty (\alpha - s(\theta_0)) \quad (4.71)$$

เมื่อ $s(\theta_0)$ ในสมการ (4.71) คือ $\frac{dy}{dx}$ ที่เปลี่ยนตัวแปรจาก x เป็น θ ในที่นี้เราพยายามจะหาค่า $g(\theta)$ จากสมการ (4.71) โดยต้องไม่ลืมว่าเรามองหา $g(\theta)$ ที่มีเงื่อนไข $g(\pi) = 0$ ดังนั้นลองพิจารณา $g(\theta)$ ในพารามิเทริกฟอร์ม (Parametric form)

$$g(\theta) = 2V_\infty \left(A_0 \frac{1 + \cos \theta}{\sin \theta} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin n\theta \right) \quad (4.72)$$

สังเกตว่า $g(\theta)$ ในฟอร์มนี้ประกอบด้วยเทอมแรกที่คล้ายกับสมการ (4.62) ของแพนอากาศสมมาตร กับอนุกรมฟูเรียร์ซาย (Fourier sine series) ที่มีสัมประสิทธิ์ A_n ซึ่งจะพบต่อไปว่า A_n จะเป็นสัมประสิทธิ์ที่ขึ้นกับความโค้ง และ A_0 จะเป็นสัมประสิทธิ์ที่ขึ้นกับมุมปะทะและความโค้งของแพนอากาศ สังเกตอีกอย่างหนึ่งว่าในกรณีที่ $\theta = \pi$, $g(\theta)$ ตามฟอร์มของสมการ (4.72) จะเป็นศูนย์โดยอัตโนมัติ

ค่าสัมประสิทธิ์ A_0 และ A_n ($n = 1, 2, 3, \dots$) ในสมการ (4.72) จะต้องมีค่าเฉพาะที่แน่นอน เพื่อให้หาค่า $g(\theta)$ หรือ $\gamma(x)$ ที่สอดคล้องกับการเกิดแรงยก แทน $g(\theta)$ กลับลงไปสมการ (4.71) จะได้

$$\alpha - s(\theta_0) = \frac{1}{\pi} \left\{ \int_0^\pi \frac{A_0 (1 + \cos \theta)}{\cos \theta - \cos \theta_0} d\theta + \int_0^\pi \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_n \sin n\theta \sin \theta}{\cos \theta - \cos \theta_0} d\theta \right\} \quad (4.73)$$

ใช้ความสัมพันธ์ตามสูตรอินทิเกรทของพัวซอง (Poisson's Integral formula) ตามสมการ (4.56a) จะอินทิเกรทเทอมแรกทางขวาของสมการ (4.73) ได้เป็น

$$\int_0^\pi \frac{A_0 (1 + \cos \theta)}{\cos \theta - \cos \theta_0} d\theta = A_0 \pi$$

สำหรับเทอมที่สองทางขวาของสมการ เทอมในเครื่องหมาย Σ หาค่าได้โดยใช้ความสัมพันธ์ตรีโกณมิติ

$$\sin n\theta \sin \theta = \frac{1}{2} \cos(n-1)\theta - \frac{1}{2} \cos(n+1)\theta \quad (4.74)$$

ดังนั้น

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi} \frac{\sin n\theta \sin \theta}{\cos \theta - \cos \theta_0} d\theta &= \frac{1}{2} \int_0^{\pi} \frac{\cos(n-1)\theta - \cos(n+1)\theta}{\cos \theta - \cos \theta_0} d\theta \\ &= \frac{\pi \sin(n-1)\theta_0}{2 \sin \theta_0} - \frac{\pi \sin(n+1)\theta_0}{2 \sin \theta_0} \\ &= -\pi \cos n\theta_0\end{aligned}\quad (4.75)$$

นั่นคือ

$$\int_0^{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_n \sin n\theta \sin \theta}{\cos \theta - \cos \theta_0} d\theta = \sum_{n=1,2,3,\dots} -A_n \pi \cos n\theta_0$$

แทนกลับไปในสมการ (4.73) จะได้

$$\alpha - s(\theta_0) = A_0 - \sum_{n=1,2,3,\dots} A_n \cos n\theta_0 \quad (4.76)$$

สัมประสิทธิ์ A_0 และ A_n มีวิธีหาค่าได้แบบเดียวกับการหาค่าสัมประสิทธิ์ของอนุกรมฟูรีเยร์ โดยคูณสมการ (4.76) ตลอดด้วย $\cos m\theta_0$ เมื่อ $m = 1, 2, 3, \dots$ แล้วอินทิเกรตจาก 0 ถึง π ดังนี้

$$\int_0^{\pi} [\alpha - s(\theta_0)] \cos m\theta_0 d\theta_0 = \int_0^{\pi} A_0 \cos m\theta_0 d\theta_0 - \int_0^{\pi} \sum_{n=1,2,\dots} A_n \cos n\theta_0 \cos m\theta_0 d\theta_0 \quad (4.77)$$

ใช้ความสัมพันธ์

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi} \cos n\theta_0 \cos m\theta_0 d\theta_0 &= 0 \quad \text{ถ้า } m \neq n \\ &= \frac{\pi}{2} \quad \text{ถ้า } m = n \neq 0 \\ &= \pi \quad \text{ถ้า } m = n = 0\end{aligned}$$

นั่นคือค่าอินทิเกรตในเทอมสุดท้ายของสมการ (4.77) จะเป็นศูนย์ยกเว้นเทอมที่ $m = n$

ดังนั้นจากสมการ (4.77) ถ้า $m = 0$ จะได้ค่า

$$\int_0^{\pi} [\alpha - s(\theta_0)] \cos(0) d\theta_0 = \int_0^{\pi} A_0 d\theta_0$$

อินทิเกรตได้

$$\pi\alpha - \int_0^{\pi} s(\theta_0) d\theta_0 = A_0 \pi$$

หรือจะได้

$$A_0 = \alpha - \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} s(\theta_0) d\theta_0 \quad (4.78)$$

สำหรับ $m = 1, 2, 3, 4, \dots$ สมการ (4.77) อินทิเกรตได้

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi} [\alpha - s(\theta_0)] \cos m\theta_0 d\theta_0 &= \int_0^{\pi} A_0 \cos m\theta_0 d\theta_0 - \int_0^{\pi} \sum_{n=1,2,3,\dots} A_n \cos n\theta_0 \cos m\theta_0 d\theta_0 \\ \int_0^{\pi} [\alpha - s(\theta_0)] \cos m\theta_0 d\theta_0 &= -\frac{\pi}{2} A_m\end{aligned}$$

ดังนั้นสัมประสิทธิ์ A_n จะมีค่า
$$A_n = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi s(\theta_0) \cos n\theta_0 d\theta_0 \quad (4.79)$$

อย่างที่กล่าวแล้วว่า A_0, A_n เป็นสัมประสิทธิ์ที่มีค่าขึ้นอยู่กับมุมปะทะและความโค้งของแพนอากาศ และจะเปลี่ยนค่าไปตามตัวแปรทั้งสอง ลองคำนวณหาค่าในรูปทั่วไปของสัมประสิทธิ์แรงและโมเมนต์ของแพนอากาศอย่างเดียวกับที่ทำกับแพนอากาศสมมาตรจากสมการ (4.58)

$$\Gamma = \int_0^c \gamma(x) dx = \int_0^\pi \frac{c}{2} g(\theta_0) \sin \theta_0 d\theta_0$$

แทนค่า $g(\theta)$ จากสมการ (4.72) จะได้

$$\begin{aligned} \Gamma &= \frac{c}{2} \int_0^\pi 2V_\infty \left[A_0 (1 + \cos \theta) + \sum_{n=1,2,3..} A_n \sin n\theta \sin \theta \right] d\theta \\ &= cV_\infty \left[\int_0^\pi A_0 (1 + \cos \theta) d\theta + \sum_{n=1,2,3..} \int_0^\pi A_n \sin n\theta \sin \theta d\theta \right] \\ &= cV_\infty \left(A_0 \pi + A_1 \frac{\pi}{2} \right) \end{aligned}$$

เพราะฉะนั้นค่าแรงยกต่อหน่วยความยาวปีกจะเป็น

$$L' = \rho V_\infty \Gamma = \rho V_\infty^2 c \left(A_0 \pi + A_1 \frac{\pi}{2} \right) \quad (4.80)$$

และคำนวณสัมประสิทธิ์แรงยกได้จาก

$$c_l = \frac{L'}{\frac{1}{2} \rho V_\infty^2 c(1)} = \pi (2A_0 + A_1) \quad (4.81)$$

ถ้าแทนค่า A_0 และ A_1 จากสมการ (4.78) และ (4.79) ลงในสมการ (4.81) จะได้

$$c_l = 2\pi \left(\alpha - \frac{1}{\pi} \int_0^\pi s(\theta) (\cos \theta - 1) d\theta \right) \quad (4.82)$$

และค่าความชันของโค้งแรงยกจะมีค่า

$$c_l = \frac{dc_l}{d\alpha} = 2\pi \quad (4.83)$$

ผลลัพธ์ที่ได้มีความสำคัญยิ่ง ขอให้สังเกตว่าค่าความชันของโค้งแรงยกของแพนอากาศที่มีความโค้งจะมีค่าเท่ากับของแพนอากาศสมมาตรคือ 2π ซึ่งเป็นผลมาจากทฤษฎีแพนอากาศบางที่ให้ค่า $\frac{dc_l}{d\alpha} = 2\pi$ สำหรับแพนอากาศรูปทรงใดๆ ก็ตาม อย่างไรก็ตาม ค่า c_l ที่แสดงจะต่างกันระหว่างแพนอากาศสมมาตรและแพนอากาศที่มีความโค้ง ซึ่งความแตกต่างจะอยู่ที่เทอมอินทิเกรตในสมการ (4.82) ค่าอินทิเกรตเทอมนี้มีความสำคัญมาก ถ้าเรากลับไปพิจารณาโค้งแรงยกในรูป 4.4 ซึ่งแสดงตัวอย่างโค้งแรงยกของแพนอากาศต่างๆ ไป มุมปะทะที่แรงยกมีค่าเป็นศูนย์ $\alpha_{L=0}$ จะมีค่าเป็นลบเล็กน้อย เมื่อพิจารณาจากโค้งแรงยกเราอาจจะเขียนสมการของ c_l ได้เป็น

$$c_l = \frac{dc_l}{d\alpha}(\alpha - \alpha_{L=0}) \quad (4.84)$$

แทนค่าความชัน 2π ลงในสมการจะได้

$$c_l = 2\pi(\alpha - \alpha_{L=0}) \quad (4.85)$$

เทียบกับสมการ (4.82) จะเห็นว่าค่าอินทิเกรตในสมการคือค่าลบของ $\alpha_{L=0}$ นั่นเอง หรือ

$$\alpha_{L=0} = -\frac{1}{\pi} \int_0^\pi s(\theta)(\cos\theta - 1)d\theta \quad (4.86)$$

สมการ (4.86) แสดงให้เห็นว่าทฤษฎีแพนอากาศบางเปิดทางที่จะใช้ทำนายมุมปะทะที่แรงยกเป็นศูนย์ของแพนอากาศ และคงเห็นจากสมการแล้วว่าค่า $\alpha_{L=0}$ จะเป็นศูนย์สำหรับแพนอากาศสมมาตร และจะมีค่าเป็นลบมากขึ้นตามความโค้งที่เพิ่มขึ้น

สำหรับโมเมนต์รอบชายหน้าได้จากการแทน $g(\theta)$ จากสมการ (4.72) ลงในสมการ (4.51)

$$M'_{LE} = -\rho V_\infty \int_0^c x \gamma(x) dx$$

เมื่อแทนตัวแปร x ด้วย θ [$x = \frac{c}{2}(1 - \cos\theta)$] จะได้

$$M'_{LE} = -\rho V_\infty \int_0^c \frac{c}{2}(1 - \cos\theta) g(\theta) \frac{c}{2} \sin\theta d\theta$$

แทน $g(\theta)$ จากสมการ (4.72) จะได้

$$\begin{aligned} M'_{LE} &= -\rho V_\infty \int_0^c \frac{c}{2}(1 - \cos\theta) 2V_\infty \left(A_0 \frac{1 + \cos\theta}{\sin\theta} + \sum_{n=1,2,3..} A_n \sin n\theta \right) \frac{c}{2} \sin\theta d\theta \\ &= -\rho V_\infty^2 \frac{c^2}{2} \int_0^\pi (1 - \cos\theta) \left(A_0 (1 + \cos\theta) + \sum_{n=1,2,3..} A_n \sin n\theta \sin\theta \right) d\theta \\ &= -\rho V_\infty^2 \frac{c^2}{2} \left[\int_0^\pi A_0 (1 - \cos^2\theta) d\theta + \int_0^\pi \sum_{n=1,2,3..} A_n \sin n\theta \sin\theta d\theta \right. \\ &\quad \left. - \int_0^\pi \sum_{n=1,2,3..} A_n \sin n\theta \sin\theta \cos\theta d\theta \right] \end{aligned}$$

สำหรับการอินทิเกรตจะทิ้งไว้ให้ทำเป็นแบบฝึกหัด แต่ผลลัพธ์ที่ได้จะเป็น

$$M'_{LE} = -\frac{\rho V_\infty^2 c^2}{2} \left[A_0 \frac{\pi}{2} + A_1 \frac{\pi}{2} - A_2 \frac{\pi}{4} \right] \quad (4.87)$$

และจะได้สัมประสิทธิ์โมเมนต์รอบชายหน้า $c_{m_{LE}}$ จาก

$$\begin{aligned} c_{m_{LE}} &= -\frac{M'_{LE}}{\frac{1}{2} \rho V_\infty^2 c^2} = -\frac{\rho V_\infty^2 c^2}{2} \left[A_0 \frac{\pi}{2} + A_1 \frac{\pi}{2} - A_2 \frac{\pi}{4} \right] / \frac{1}{2} \rho V_\infty^2 c^2 \\ c_{m_{LE}} &= -\frac{\pi}{2} \left[A_0 + A_1 - \frac{A_2}{2} \right] \quad (4.88) \end{aligned}$$

แต่จากสมการ (4.81) $c_l = \pi(2A_0 + A_1)$ นำไปแทนในสมการ (4.88) จะได้

$$c_{mLE} = -\left[\frac{c_l}{4} + \frac{\pi}{4}(A_1 - A_2)\right] \quad (4.89)$$

ถ้าพิจารณาสัมประสิทธิ์โมเมนต์ที่ 1/4 คอร์ดจาก

$$c_{m_{c/4}} = c_{mLE} + \frac{c_l}{4}$$

เมื่อแทนค่าจาก (4.89) จะได้

$$c_{m_{c/4}} = -\frac{\pi}{4}(A_1 - A_2) \quad (4.90)$$

ต่างจากแผนอากาศสมมาตรที่สัมประสิทธิ์โมเมนต์ที่ 1/4 คอร์ดเป็นศูนย์ สมการ (4.90) แสดงให้เห็นว่า $c_{m_{c/4}}$ ของแผนอากาศที่มีความโค้งจะมีค่าอันหนึ่ง ดังนั้นตำแหน่ง 1/4 คอร์ด จึงไม่ใช่ตำแหน่งของจุดศูนย์ความดันของแผนอากาศที่มีความโค้ง แต่ขอให้สังเกตว่าสัมประสิทธิ์ A_1 และ A_2 จะขึ้นอยู่กับความโค้งของแผนอากาศตามสมการ (4.79) แต่จะไม่ขึ้นกับมุมปะทะ นั่นคือค่า $c_{m_{c/4}}$ จะไม่ขึ้นกับมุมปะทะ และตำแหน่ง 1/4 คอร์ดของแผนอากาศที่มีความโค้งจะเป็นตำแหน่งทางทฤษฎีของจุดศูนย์อากาศพลศาสตร์ และค่าของ $c_{m_{c/4}}$ จะกำหนดโดยสมการ (4.90) ส่วนตำแหน่งจุดศูนย์ความดันอาจหาได้จากสมการ (1.37)

$$x_{c.p.} = -\frac{M'_{LE}}{L'} = -\frac{c_{mLE} \cdot c}{c_l}$$

เมื่อแทนค่า c_l และ c_{mLE} ลงในสมการจะได้

$$x_{c.p.} = \frac{c}{4} \left[1 + \frac{\pi}{c_l}(A_1 - A_2) \right] \quad (4.91)$$

สมการ (4.91) แสดงว่าตำแหน่งของจุด c.p. ของแผนอากาศที่มีความโค้งจะเปลี่ยนแปลงไปตามค่าสัมประสิทธิ์แรงยก ดังนั้นเมื่อมุมปะทะของแผนอากาศเปลี่ยนตำแหน่งของจุด c.p. จะเปลี่ยนด้วย จริงๆ แล้วในขณะที่ค่าแรงยกเข้าใกล้ศูนย์ตำแหน่งของจุด c.p. จะเคลื่อนไปสู่ ∞ หรือห่างจากแผนอากาศออกไป ด้วยเหตุผลนี้เองที่การใช้ตำแหน่งของจุด c.p. กำหนดตำแหน่งของแรงยก(หรือแรงลัพท์) ทำได้ไม่สะดวก และการใช้ตำแหน่งของจุด a.c. สำหรับระบบของแรงจึงถูกนำมาใช้ทั่วไป

ตัวอย่าง 4.1 พิจารณาแผนอากาศที่มีสมการของเส้นโค้งเฉลี่ย (Camber line) เป็นรูปพาราโบลา

$$\bar{y} = 4y_m \left[\frac{x}{c} - \left(\frac{x}{c} \right)^2 \right]$$

เมื่อ y_m เป็นความโค้งสูงสุด ซึ่งอยู่ที่ตำแหน่งครึ่งคอร์ด

วิธีทำ ค่าความชันของเส้นโค้งเฉลี่ย คือ

$$\frac{d\bar{y}}{dx} = 4 \frac{y_m}{c} \left(1 - 2 \frac{x}{c} \right)$$

เปลี่ยนตัวแปร x ด้วย θ [$x = \frac{c}{2}(1 - \cos \theta)$] จะได้

$$s(\theta) = 4 \frac{y_m}{c} \cos \theta$$

จากสมการ (4.78)

$$\begin{aligned} A_0 &= \alpha - \frac{1}{\pi} \int_0^\pi s(\theta) d\theta \\ &= \alpha - \frac{1}{\pi} \int_0^\pi 4 \frac{y_m}{c} \cos \theta d\theta \\ &= \alpha \end{aligned}$$

จากสมการ (4.79)

$$\begin{aligned} A_n &= \frac{2}{\pi} \int_0^\pi s(\theta) \cos n\theta d\theta \\ A_1 &= \frac{2}{\pi} \int_0^\pi s(\theta) \cos \theta d\theta \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^\pi 4 \frac{y_m}{c} \cos^2 \theta d\theta \\ &= 4 \frac{y_m}{c} \\ A_2 &= \frac{2}{\pi} \int_0^\pi s(\theta) \cos 2\theta d\theta \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^\pi 4 \frac{y_m}{c} \cos \theta \cos 2\theta d\theta \\ &= 0 \end{aligned}$$

ดังนั้นจากสมการ (4.81)

$$c_l = \pi [2A_0 + A_1] = \pi \left(2\alpha + 4 \frac{y_m}{c} \right)$$

จากสมการ (4.88)

$$\begin{aligned} c_{mLE} &= -\frac{\pi}{2} \left(A_0 + A_1 - \frac{A_2}{2} \right) \\ &= -\frac{\pi}{2} \left(\alpha + 4 \frac{y_m}{c} \right) \end{aligned}$$

จากสมการ (4.90)

$$\begin{aligned} c_{m_{a.c.}} &= c_{m_{c/4}} = -\frac{\pi}{4} (A_1 + A_2) \\ &= -\pi \frac{y_m}{c} \end{aligned}$$

จากสมการ (4.91)

$$\begin{aligned} x_{c.p.} &= \frac{c}{4} \left[1 + \frac{\pi}{c_l} (A_1 - A_2) \right] \\ x_{c.p.} &= \frac{c}{4} + \frac{y_m}{\left(2\alpha + 4 \frac{y_m}{c} \right)} \end{aligned}$$

และจากสมการ (4.86)

$$\begin{aligned}\alpha_{L=0} &= -\frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} s(\theta)(\cos \theta - 1) d\theta \\ &= -\frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} 4 \frac{y_m}{c} (\cos^2 \theta - \cos \theta) d\theta \\ &= -2 \frac{y_m}{c}\end{aligned}$$

ทั้งหมดคือคุณลักษณะที่อาจทำนายได้ทางทฤษฎี สังเกตว่าสมการบอกตำแหน่ง c.p. อยู่ที่กึ่งกลางคอร์ดที่มุมปะทะศูนย์ และขยับเข้าหาตำแหน่ง a.c. เมื่อมุมปะทะ (หรือ c_l) เพิ่มขึ้น

ตัวอย่าง 4.2 พิจารณา แผนอากาศ NACA 23012 ที่มีสมการของเส้นโก่งเฉลี่ย (Camber line)

$$\frac{\bar{y}}{c} = 2.6595 \left[\left(\frac{x}{c} \right)^3 - 0.6075 \left(\frac{x}{c} \right)^2 + 0.1147 \left(\frac{x}{c} \right) \right] \text{ สำหรับ } 0 \leq \frac{x}{c} \leq 0.2025$$

และ $\frac{\bar{y}}{c} = 0.02208 \left(1 - \frac{x}{c} \right) \text{ สำหรับ } 0.2025 \leq \frac{x}{c} \leq 1.0$

จงคำนวณ ก) มุมปะทะที่แรงยกเป็นศูนย์

ข) สัมประสิทธิ์แรงยก เมื่อ $\alpha = 4^\circ$

ค) สัมประสิทธิ์โมเมนต์ที่ตำแหน่ง 1/4 คอร์ด และ

ง) ตำแหน่งของจุดศูนย์ความดันเมื่อมุมปะทะ 4°

วิธีทำ จากสมการของเส้นโก่งเฉลี่ยจะได้ความชันของเส้นโก่งเฉลี่ย

$$\frac{d\bar{y}}{dx} = 2.6595 \left[3 \left(\frac{x}{c} \right)^2 - 1.215 \left(\frac{x}{c} \right) + 0.1147 \right] \text{ สำหรับ } 0 \leq \frac{x}{c} \leq 0.2025$$

และ $\frac{d\bar{y}}{dx} = -0.02208 \text{ สำหรับ } 0.2025 \leq \frac{x}{c} \leq 1.0$

แปลงตัวแปร x เป็น θ โดยใช้ความสัมพันธ์ $[x = \frac{c}{2}(1 - \cos \theta)]$ จะได้

$$\begin{aligned}s(\theta) &= 2.6595 \left[\frac{3}{4} (1 - \cos \theta)^2 - 0.6075 (1 - \cos \theta) + 0.1147 \right] \\ &= 2.6595 [0.75 (1 - 2 \cos \theta + \cos^2 \theta) - 0.6075 (1 - \cos \theta) + 0.1147] \\ &= 0.6840 - 2.3736 \cos \theta + 1.9946 \cos^2 \theta \text{ สำหรับ } 0 \leq \theta \leq 0.9335 \text{ rad}\end{aligned}$$

และ $s(\theta) = -0.02208 \text{ สำหรับ } 0.9335 \text{ rad} \leq \theta \leq \pi$

ก) มุมปะทะที่แรงยกเป็นศูนย์

จากสมการ (4.86) $\alpha_{L=0} = -\frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} s(\theta)(\cos \theta - 1) d\theta$

$$\alpha_{L=0} = -\frac{1}{\pi} \int_0^{0.9335} (-6840 + 3.0576 \cos \theta - 4.3686 \cos^2 \theta + 1.995 \cos^3 \theta) d\theta$$

$$-\frac{1}{\pi} - \frac{1}{\pi} \int_{0.9335}^{\pi} (0.02208 - 0.02208 \cos \theta) d\theta \quad (1)$$

เพื่อความสะดวกจากตารางของการอินทิเกรตได้

$$\int \cos \theta d\theta = \sin \theta$$

$$\int \cos^2 \theta d\theta = \frac{1}{2} \sin \theta \cos \theta + \frac{1}{2} \theta$$

$$\int \cos^3 \theta d\theta = \frac{1}{3} \sin \theta (\cos^2 \theta + 2)$$

$$\int \cos^4 \theta d\theta = \frac{1}{4} \cos^3 \theta \sin \theta + \frac{3}{8} (\sin \theta \cos \theta + \theta)$$

ดังนั้นสมการ (1) อินทิเกรตได้เป็น

$$\begin{aligned} \alpha_{L=0} = & -\frac{1}{\pi} [-2.8683\theta + 3.0576 \sin \theta - 2.1843 \sin \theta \cos \theta \\ & + 0.665 \sin \theta (\cos^2 \theta + 2)] \Big|_0^{0.9335} - \frac{1}{\pi} (0.02208\theta - 0.02208 \sin \theta) \Big|_{0.9335}^{\pi} \end{aligned}$$

คำนวณได้

$$\alpha_{L=0} = -\frac{1}{\pi} (-0.0065 + 0.0665) = -0.0191 \text{ rad}$$

หรือ

$$\alpha_{L=0} = -1.09^\circ$$

ข) หาค่า c_l ที่ $\alpha = 4^\circ = 0.0698 \text{ rad}$

$$\begin{aligned} \text{จากสมการ (4.85)} \quad c_l &= 2\pi(\alpha - \alpha_{L=0}) \\ &= 2\pi(0.0698 - (-0.0191)) = 0.559 \end{aligned}$$

ค) ค่าของ $c_{m_{c/4}}$ ได้จากสมการ (4.90)

$$\text{จากสมการ (4.79)} \quad A_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} s(\theta) \cos n\theta d\theta$$

เพราะฉะนั้น

$$A_1 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} s(\theta) \cos \theta d\theta$$

$$\begin{aligned} A_1 &= \frac{2}{\pi} \int_0^{0.9335} (0.6840 \cos \theta - 2.3736 \cos^2 \theta + 1.995 \cos^3 \theta) d\theta \\ &\quad + \frac{2}{\pi} \int_{0.9335}^{\pi} (-0.02208 \cos \theta) d\theta \\ &= \frac{2}{\pi} [0.6840 \sin \theta - 1.1868 \sin \theta \cos \theta - 1.1868 \theta \\ &\quad + 0.665 \sin \theta (\cos^2 \theta + 2)] \Big|_0^{0.9335} + \frac{2}{\pi} (-0.02208 \sin \theta) \Big|_{0.9335}^{\pi} \\ &= \frac{2}{\pi} (0.1322 + 0.0177) = 0.0954 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A_2 &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} s(\theta) \cos 2\theta d\theta = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} s(\theta) (2 \cos^2 \theta - 1) d\theta \\
&= \frac{2}{\pi} \int_0^{0.9335} (-0.6840 + 2.3736 \cos \theta - 0.627 \cos^2 \theta - 4.747 \cos^3 \theta \\
&\quad + 3.99 \cos^4 \theta) d\theta + \frac{2}{\pi} \int_{0.9335}^{\pi} (0.02208 - 0.0446 \cos^2 \theta) d\theta \\
&= \frac{2}{\pi} \left\{ -0.6840\theta + 2.3736 \sin \theta - 0.627 \left(\frac{1}{2} \right) (\sin \theta \cos \theta + \theta) \right. \\
&\quad \left. - 4.747 \left(\frac{1}{3} \right) \sin \theta (\cos^2 \theta + 2) \right. \\
&\quad \left. + 3.99 \left[\frac{1}{4} \cos^3 \theta \sin \theta + \frac{3}{8} (\sin \theta \cos \theta + \theta) \right] \right\} \Big|_0^{0.9335} \\
&\quad + \frac{2}{\pi} \left[0.02208\theta - 0.0446 \left(\frac{1}{2} \right) (\sin \theta \cos \theta + \theta) \right] \Big|_{0.9335}^{\pi} \\
&= (0.11384 + 0.01056) = 0.0792
\end{aligned}$$

จากสมการ (4.90)

$$\begin{aligned}
c_{m_{c/4}} &= -\frac{\pi}{4} (A_1 - A_2) \\
&= -\frac{\pi}{4} (0.0954 - 0.0792) \\
c_{m_{c/4}} &= -0.0127
\end{aligned}$$

ง) หาดำแหน่งจุดศูนย์กลางความดันที่มุมปะทะ 4° จากสมการ (4.91)

$$\begin{aligned}
x_{c.p.} &= \frac{c}{4} \left[1 + \frac{\pi}{c_l} (A_1 - A_2) \right] \\
\text{ดังนั้น} \quad \frac{x_{c.p.}}{c} &= \frac{c}{4} \left[1 + \frac{\pi}{0.559} (0.0954 - 0.0792) \right] \\
&= 0.273
\end{aligned}$$

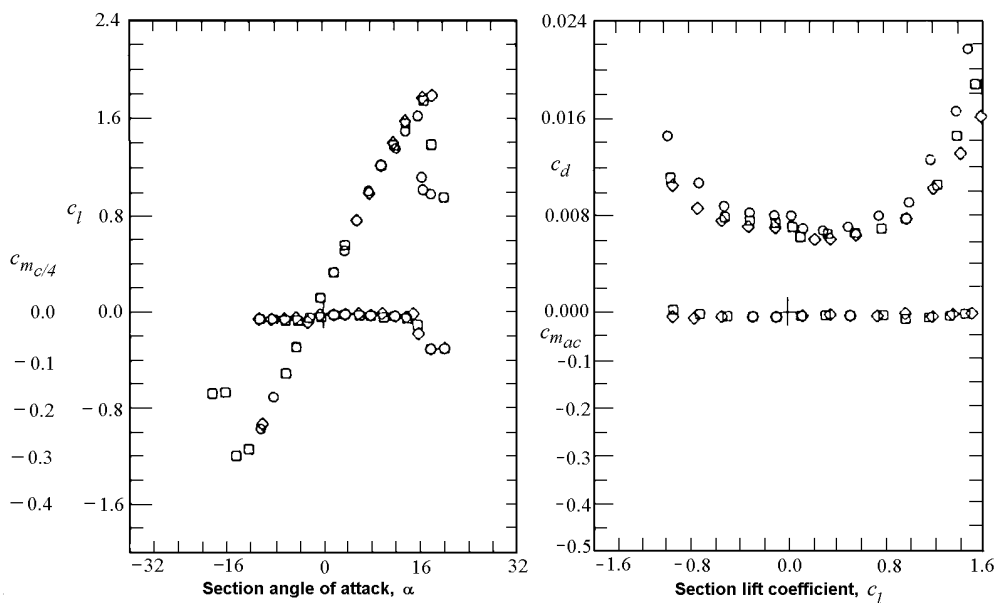
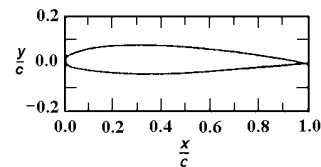
ข้อมูลของ NACA 23012 จากการทดลองแสดงในรูป 4.24 ซึ่งนำมาสรุปเทียบกับผลการคำนวณได้ตามตาราง สังเกตว่าผลที่ได้จากทฤษฎีแพนอากาศบาง สำหรับแพนอากาศที่มีความโค้งสอดคล้องกันดีกับผลการทดลอง เช่นเดียวกันกับผลที่ได้ของแพนอากาศสมมาตรในรูป 4.23 เพราะฉะนั้น ความพยายามที่ได้ทุ่มเทลงไปในการวิเคราะห์ในหัวข้อนี้ถือว่าคุ้มค่ากับการลงทุน นอกจากนี้ผลลัพธ์ที่ได้ยังแสดงให้เห็น ด้วยว่าทฤษฎีแพนอากาศบางที่ได้รับการพัฒนาขึ้นมาถือเป็นผลงานชิ้นโบว์แดงในทฤษฎีอากาศพลศาสตร์ในต้นศตวรรษที่ 20

ตารางเปรียบเทียบผลจากการคำนวณและจากการทดลองของ NACA23012

	คำนวณ	การทดลอง
$\alpha_{L=0}$	-1.09	-1.1
c_l (ที่ 4°)	0.559	0.55
$c_{m_{c/4}}$	-0.0127	-0.01

NACA 23012 Airfoil Section

ข้อมูลจาก "Theory of Wing Sections", Abbott and Von Doenhoff
 Re_c : $\circ$ 3.0×10^6 $\square$ 6.0×10^6 $\diamond$ 8.8×10^6



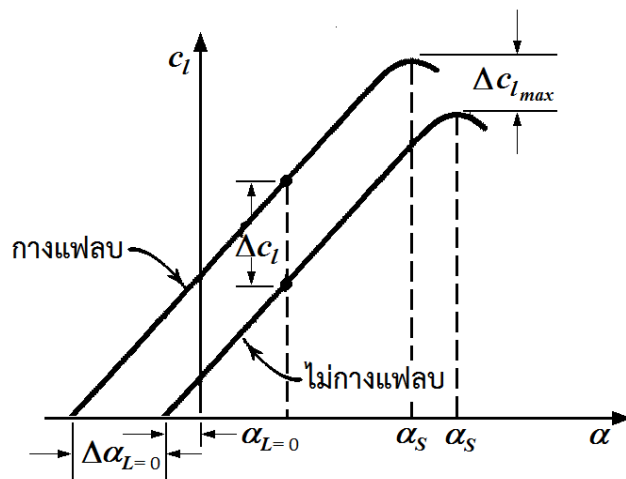
รูป 4.24 สัมประสิทธิ์แรงยกและโมเมนต์ของแพนอากาศ NACA 23012 จากการทดลอง (Moran, 2010)

4.9 แพนอากาศที่ติดตั้งแฟลป (The Flapped Airfoil)

ในสมการ (4.86) ซึ่งกำหนดค่า $\alpha_{L=0}$ ของแพนอากาศ เทอม $(\cos\theta - 1)$ จะมีค่าเป็นศูนย์ที่ชายหน้า เมื่อ $\theta = 0$ และมีค่ามากที่สุดที่ชายหลังเมื่อ $\theta = \pi$ ดังนั้นส่วนของความโค้งในช่วงท้ายคอร์ดจะมีอิทธิพลต่อค่า $\alpha_{L=0}$ มากกว่าช่วงด้านหน้า ด้วยเหตุนี้เองที่อุปกรณ์อย่างเช่น แฟลป (Flap) หรือ ปีกเล็กแก้อียง (Aileron) ซึ่งใช้เพิ่มแรงยกจะติดตั้งไว้ส่วนหลังของปีก เมื่อส่วนท้ายของแพนอากาศทำมุมหักลงจากแนวเดิมจะทำให้ความโค้งของแพนอากาศในส่วนปลายเป็นบวกเพิ่มขึ้นเป็นผลให้ค่า

$\alpha_{L=0}$ เป็นลบมากขึ้น และค่าแรงยกที่มุมปะทะนั้นของแพนอากาศมีค่าเพิ่มขึ้นด้วย ผลที่เกิดขึ้นแสดงเป็นกราฟในรูป 4.25 โค้งแรงยกถูกทำให้ขยับไปทางซ้ายเนื่องจากค่า $\alpha_{L=0}$ เป็นลบมากขึ้นและให้ค่าสัมประสิทธิ์ที่เพิ่มขึ้นของแรงยกที่มุมปะทะอันหนึ่งมีค่า Δc_l หรือในทางกลับกัน ถ้าส่วนปลายของแพนอากาศกระดกขึ้น โค้งแรงยกจะเลื่อนมาทางขวาและแรงยกที่มุมปะทะจะลดลง

ความสำเร็จของแฟลปในการเป็นอุปกรณ์เพิ่มแรงยก (High lift device) นั้นขึ้นอยู่กับความจริงที่ถึงแม้ว่ามุมปะทะที่ให้ค่า $c_{l_{max}}$ จะลดลงเนื่องจากการใช้แฟลป (แพนอากาศเข้าสู่อาการร่วงหล่นที่มุมปะทะลดลง) แต่ก็ไม่มากจนจะไปหักล้างค่า c_l ที่เพิ่มขึ้นโดยรวมทั้งหมดได้ ค่า $\Delta c_{l_{max}}$ ที่เพิ่มขึ้นจากการใช้แฟลปได้แสดงไว้ในรูป 4.25 เช่นกัน

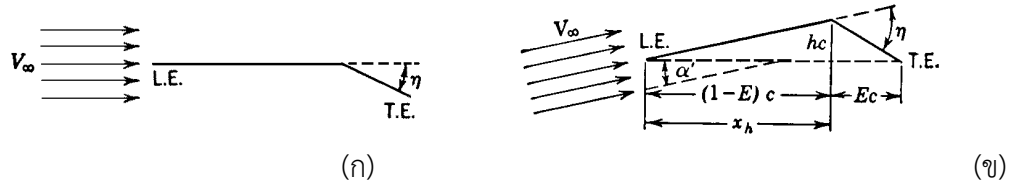


รูป 4.25 ผลของการกางแฟลปที่เกิดกับโค้งแรงยก (Anderson, 2016)

อิทธิพลของการเปิดแฟลปเป็นมุมน้อยๆ ที่มีต่อคุณสมบัติของแพนอากาศอาจทำนายได้โดยใช้ทฤษฎีแพนอากาศบาง (Glauert, 1924, 1927) เนื่องจากมุมทั้งหมดที่เกี่ยวข้องมีค่าน้อย จึงเป็นการเพียงพอที่จะคำนวณคุณสมบัติของแพนอากาศสมมาตรเมื่อเปิดแฟลปที่มุมปะทะศูนย์ แล้วนำค่าที่ได้ไปบวกกับคุณสมบัติของแพนอากาศที่มีความโค้งที่มุมปะทะใดๆ เส้นโก่งเฉลี่ย (Camber line) ของแพนอากาศสมมาตรที่มีแฟลปเปิดเป็นมุม η ที่มุมปะทะศูนย์แสดงในรูป 4.26 ก ถ้าลากเส้นต่อระหว่างชายหน้าและชายหลัง และจัดให้เป็นแนวคอร์ดใหม่ที่สร้างขึ้นมา ปัญหาจะลดลงเป็นการไหลผ่านแพนอากาศที่มีความโค้งที่มุมปะทะ α' ตามรูป 4.26 ข ให้ E เป็นสัดส่วนความยาวคอร์ดของแฟลปต่อความยาวคอร์ด hc เป็นระยะที่แสดงในรูป 4.26 ข ความชันของเส้นโก่งเฉลี่ยจากชายหน้าไปถึงจุดหมุนของแฟลปจะเป็น $\frac{h}{(1-E)}$ และจากจุดหมุนถึงชายหลังจะเป็น $-\frac{h}{E}$ ดังนั้นคำนวณคุณสมบัติของแฟลปได้จากสมการ (4.78) และ (4.79)

$$A_0 = \alpha' - \frac{1}{\pi} \int_0^\pi s(\theta) d\theta$$

$$A_n = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi s(\theta) \cos n\theta d\theta$$



รูป 4.26 การกำหนดความโค้งของแพนอากาศที่เปิดแฟลป (Anderson, 2016)

หลังจากการอินทิเกรต ซึ่งแบ่งเป็นสองช่วงจากชายหน้าถึงจุดหมุน ($0 \leq \theta \leq \theta_h$) และจากจุดหมุนถึงชายหลัง ($\theta_h \leq \theta \leq \pi$) A_0 จะเป็น

$$A_0 = \alpha' - \frac{1}{\pi} \left(\frac{h}{1-E} \theta \right) \Big|_0^{\theta_h} - \frac{1}{\pi} \left(-\frac{h}{E} \theta \right) \Big|_{\theta_h}^{\pi}$$

หลังจากแทนค่าขีดจำกัดของการอินทิเกรต และใช้ความสัมพันธ์

$$\frac{h}{1-E} + \frac{h}{E} = \eta$$

แต่ $\frac{h}{1-E} = \alpha'$ เพราะฉะนั้น $\alpha' + \frac{h}{E} = \eta$

ค่าของ A_0 จะเป็น
$$A_0 = \frac{\eta(\pi - \theta_h)}{\pi} \quad (4.92)$$

ทำนองเดียวกัน
$$\begin{aligned} A_n &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\theta_h} \frac{h}{1+E} \cos n\theta d\theta + \frac{2}{\pi} \int_{\theta_h}^{\pi} -\frac{h}{E} \cos n\theta d\theta \\ &= \frac{2}{n\pi} \left(\frac{h}{1-E} \sin n\theta \right) \Big|_0^{\theta_h} - \frac{2}{n\pi} \left(\frac{h}{E} \sin n\theta \right) \Big|_{\theta_h}^{\pi} \\ &= \frac{2}{n\pi} \sin n\theta_h \left(\frac{h}{1-E} + \frac{h}{E} \right) \\ A_n &= \frac{2 \sin n\theta_h}{n\pi} \eta \end{aligned} \quad (4.93)$$

ผลที่ได้เมื่อนำไปแทนค่าในสมการ (4.81) และ (4.90) จะให้ค่าส่วนที่เพิ่มขึ้นของสัมประสิทธิ์ ΔC_l และ $\Delta C_{m_{a.c.}}$ เนื่องจากการเปิดแฟลป ดังนั้น จะได้

$$\Delta C_l = \pi (2A_0 + A_1)$$

$$\Delta C_{m_{a.c.}} = \frac{\pi}{4} (A_2 - A_1)$$

หรือเมื่อแทนค่าจากสมการ (4.92) และ (4.93)

$$\Delta C_l = [2(\pi - \theta_h) + 2 \sin \theta_h] \eta \quad (4.94)$$

$$\Delta c_{m_{a.c.}} = \left[\frac{1}{2} \sin \theta_h (\cos \theta_h - 1) \right] \eta \quad (4.95)$$

ส่วนเพิ่มของ c_l และ $c_{m_{a.c.}}$ แปรผันโดยตรงกับมุมกวางแฟลป η โดยที่ขนาดจะขึ้นอยู่กับ θ_h ซึ่งสัมพันธ์กับระยะ x_h ของจุดหมุนแฟลปตามสมการ

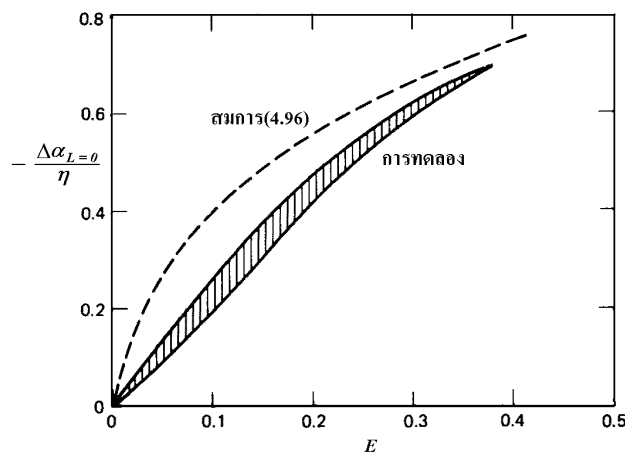
$$x_h = \frac{c}{2} (1 - \cos \theta_h)$$

$$\Delta \alpha_{L=0} = \frac{\Delta c_l}{2\pi} = -[(\pi - \theta_h) + \sin \theta_h] \frac{\eta}{\pi} \quad (4.96)$$

ผลที่ได้แสดงว่า ค่าที่เพิ่มขึ้นของ c_l , $c_{m_{a.c.}}$ และ $\alpha_{L=0}$ แปรผันโดยตรงกับมุมกวางแฟลปและขนาดเป็นฟังก์ชันของ θ_h ซึ่งสัมพันธ์กับระยะ x_h ตามที่กล่าวแล้ว ดังนั้นค่าของ θ_h จะอยู่ระหว่าง $0 \leq \theta_h \leq \pi$ เทียบกับ $0 \leq \frac{x_h}{c} \leq \pi$ และสัดส่วนความยาวคอर्डของแฟลปจะคำนวณได้ตาม

$$\text{สมการ } E = 1 - \frac{x_h}{c}$$

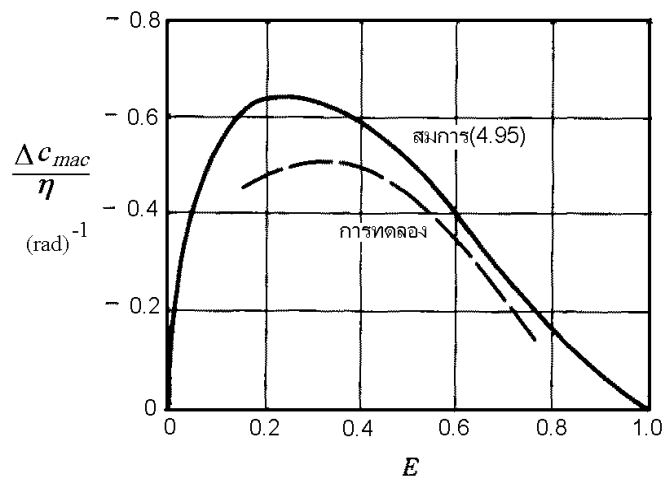
เมื่อนำค่าทางทฤษฎีของ $-\frac{\Delta \alpha_{L=0}}{\eta}$ ที่ใช้ความยาวคอर्डของแฟลป E จาก 0 ถึง 50 % คอร์ดมาเปรียบเทียบกับผลการทดลองในรูป 4.27 แถบที่แรเงาในรูปเป็นผลการทดลองที่รวบรวมจากแผนอากาศรูปทรงต่างๆ 21 แบบ และมีค่าความหนาสูงสุดถึง $0.21 c$ ที่ใกล้ $E = 0$ ความสอดคล้องของทฤษฎีและผลการทดลองไม่ตึงแต่จะสอดคล้องกันมากขึ้นเรื่อย ๆ จนกระทั่งค่า $E = 0.4$ เมื่อค่าทางทฤษฎีสูงกว่าผลการทดลองทั่วไปเพียง 7 % การที่ผลการทดลองต่างกับทฤษฎีมากที่ค่า E ใกล้ 0 เป็นเพราะชั้นขีดผิวที่ก่อตัวมาตั้งแต่ชายหน้าเมื่อถึงชายหลังจะมีความหนาได้ถึง 2 – 3 % ของคอर्ड ดังนั้นสำหรับแฟลปที่ความยาวคอर्डต่ำเกินไปได้ที่แฟลปทั้งหมดจะจมอยู่ในชั้นขีดผิวที่เป็นย่านที่อากาศมีความเร็วต่ำลงเนื่องจากแรงเสียดทาน จนกระทั่งความสามารถในการตอบสนองต่อการกวางแฟลปต่ำกว่าที่ควรจะเป็นทางทฤษฎี



รูป 4.27 ผลการทดลองเทียบกับทฤษฎีถึงผลของความยาวคอर्डแฟลป, E (Anderson, 2016)

ที่มีต่อ $\frac{\Delta\alpha_{L=0}}{\eta}$ สำหรับมุมกวางแฟลป 0° ถึง 10°

รูป 4.28 แสดงกราฟของสมการ (4.95) พล็อตให้เห็นผลของการกวางแฟลปที่เกิดกับ $c_{m_{a.c.}}$ การใช้แฟลปจะเพิ่มค่าสัมประสิทธิ์โมเมนต์ที่เป็นลบรอบจุด a.c. พิจารณาจากสมการ (4.82) และ (4.86) มุมกวางแฟลปที่เป็นบวก (หมุนตามเข็มนาฬิกา) มีผลเช่นเดียวกับที่เกิดกับ $\alpha_{L=0}$ และ $c_{m_{a.c.}}$ เมื่อค่าความโค้งเพิ่มขึ้นหรือตำแหน่งของความโค้งสูงสุดขยับไปทางชายหลัง มุมกวางแฟลปที่เป็นลบ (หมุนทวนเข็มนาฬิกา) แนนอนว่าให้ผลตรงข้ามกัน ผลการทดลองเช่นเดียวกับรูป 4.27 ในรูป 4.28 แสดงให้เห็นว่าความสอดคล้องกับทฤษฎีเพิ่มขึ้นเมื่อค่า E เพิ่มขึ้นเช่นเดียวกับรูป 4.27 สำหรับรูป 4.27 ผลการทดลองจำกัดอยู่เฉพาะมุมแฟลประหว่าง $0 \leq \eta \leq 20^\circ$ สำหรับ $\Delta c_{m_{a.c.}}$



รูป 4.28 ผลของความยาวคอร์ดแฟลป, E , ที่มีต่อ $\frac{\Delta c_{m_{a.c.}}}{\eta}$ (Anderson, 2016)

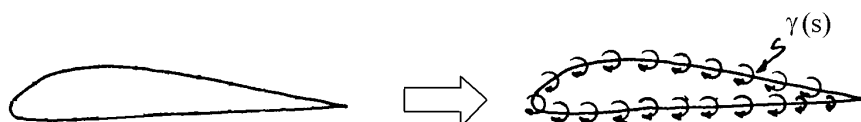
4.10 แพนอากาศที่มีความหนาและความโค้ง : วิธีแพนแนล

(Airfoil of Arbitrary Thickness & Camber : Panel Method)

ในหัวข้อที่ผ่านมาการใช้ทฤษฎีแพนอากาศบางทำนายคุณสมบัติของแพนอากาศให้ผลเป็นที่น่าสนใจ และที่สำคัญคือทฤษฎีให้คำตอบที่อยู่ในรูปคำตอบทั่วไป (Closed form) สามารถนำไปใช้กับแพนอากาศรูปใดก็ได้ แต่มีข้อจำกัดที่จะใช้กับแพนอากาศที่บางและความโค้งน้อยๆ เท่านั้น ดังนั้นในกรณีที่ต้องพิจารณาคุณสมบัติของแพนอากาศที่มีความหนา มีมุมปะทะสูง มีส่วนประกอบเพิ่มแรงยก เช่น แฟลป (Flap) และ สล็อต (Slot) หลายชั้น หรือแม้แต่กับรูปทรงที่ห่างไกลจากแพนอากาศ เช่น รอยนตล์ ลำตัวอากาศยาน จะเห็นว่าทฤษฎีแพนอากาศบางไม่เหมาะสมเมื่อต้องพิจารณาแรงทางอากาศพลศาสตร์ (ในที่นี้คือความดัน) บนรูปทรงเหล่านี้ และจำเป็นต้องใช้การพิจารณาเชิงตัวเลข อย่างเช่น วิธีซอร์สแพนแนล (Source panel method) ในหัวข้อ 3.18 ของบทที่ 3 แทน

วิธีแพนเนล (Panel method) ที่จะอธิบายในหัวข้อนี้เปรียบได้กับวิธีซอร์สแพนเนลในหัวข้อ 3.18 ในทางแนวคิด แต่วิธีซอร์สแพนเนลใช้ได้เฉพาะกับกรณีของแพนอากาศที่ไม่เกิดแรงยก สำหรับกรณีที่เกิดแรงยก การไหลจะต้องมีค่าการหมุนรอบแพนอากาศที่สัมพันธ์กับแรงยก แต่การที่ซอร์สไม่เหนี่ยวนำให้เกิดการหมุนขึ้นในการไหล ดังนั้นจึงจำเป็นต้องเพิ่มการหมุนซึ่งขนาดถูกกำหนดด้วยเงื่อนไขของคุดต้าเข้ากับการไหล คงจำได้ว่าซอร์ส และวอร์เทคเป็นซิงกูลาริตี้ (Singularity) ที่มีคุณสมบัติแบบเดียวกัน ต่างกันเฉพาะที่วอร์เทคจะเหนี่ยวนำให้เกิดการหมุนรอบตัวมีค่าเท่ากับกำลังของตัววอร์เทคเอง ดังนั้นเราได้แนวคิดที่จะใช้วอร์เทคแทนผิวแพนอากาศหรือวัตถุในรูปแบบเดียวกับที่ได้อธิบายในหัวข้อ 3.18 สำหรับซอร์สแพนเนล เพราะว่าวอร์เทคเหนี่ยวนำให้เกิดการหมุนขึ้นในการไหลรอบตัวมันเองจึงน่าจะใช่วอร์เทคแพนเนลแทนผิวหรือประกอบการแทนผิวด้วยวิธีดังที่จะได้กล่าวต่อไปได้

แนวคิดที่จะแทนผิววัตถุด้วยแผ่นซอร์ส (Source sheet) หรือแผ่นวอร์เทค (Vortex sheet) หรือทั้งคู่ ที่มีกำลังพอดีทำให้ผิววัตถุเป็นเส้นกระแสของการไหลจะเป็นเช่นเดียวกับหัวข้อ 3.18 ที่เรามองหาคือกำลัง $\gamma(s)$ และ $q(s)$ ของแผ่นวอร์เทคและแผ่นซอร์สที่เหมาะสมพอดีทำให้ทิศทางความเร็วอยู่ในแนวสัมผัสกับผิวพอดี เนื่องจากในทางคณิตศาสตร์เราไม่สามารถหารูปแบบของฟังก์ชัน $\gamma(s)$ ที่เป็นคำตอบจริง (Exact solution) ได้ คำตอบที่เราต้องการจึงต้องใช้เทคนิคการคำนวณเชิงตัวเลข ซึ่งมีชื่อเรียกกันทั่วไปว่า “วิธีแพนเนล (Panel Method)” (J. Moran, 2010)



รูป 4.29 การแทนผิววัตถุด้วยแผ่นวอร์เทค (Vortex sheet) (Hess & Smith, 1967)

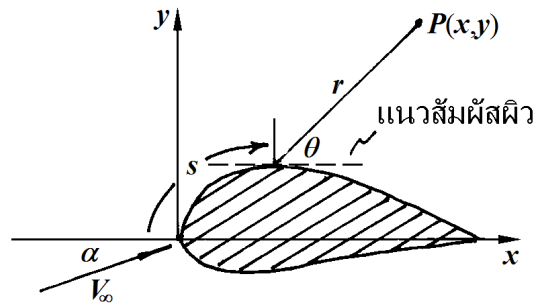
เนื่องจากเราสามารถแทนผิวแพนอากาศด้วยซิงกูลาริตี้ (Singularity) ในลักษณะต่างๆ ได้หลายแบบ ในหัวข้อนี้เราจะลองพิจารณาแทนผิวแพนอากาศด้วยแผ่นซอร์สร่วมกับแผ่นวอร์เทค ซึ่งง่ายและเป็นวิธีดั้งเดิมที่ใช้พัฒนาเทคนิคนี้²

พิจารณาการไหลผ่านแพนอากาศใดๆ ที่มีมุมปะทะ α ให้ s เป็นพิกัดที่วัดไปตามผิวแพนอากาศ ถ้าแทนผิวแพนอากาศด้วยแผ่นวอร์เทคกำลัง $\gamma(s)$ และแผ่นซอร์สกำลัง $q(s)$ ที่เรียงไปตามผิวแพนอากาศ ในลักษณะนี้ศักย์ความเร็ว (Velocity potential) ของการไหล ϕ จะเป็น

² Hess and Smith “calculation of Potential flow about arbitrary bodies”, in Progress in Aeronautical Sciences, Vol. 8, D. Kunchman (ed.) Pergamon Press, N.Y., 1967

$$\phi = \phi_\infty + \phi_s + \phi_v \quad (4.97)$$

เมื่อ ϕ_∞ เป็นศักย์ความเร็ว ของ การไหลเอกรูป (uniform flow)
 ϕ_s เป็นศักย์ความเร็ว ของ แผ่นซอร์ส
 ϕ_v เป็นศักย์ความเร็ว ของ แผ่นวอร์เทค



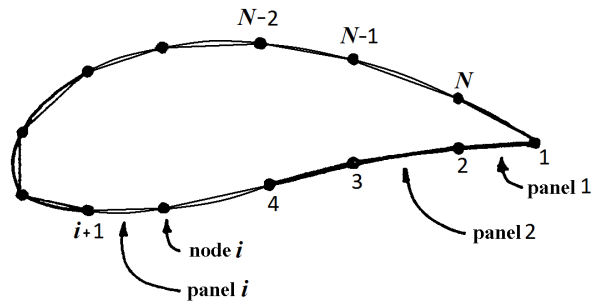
รูป 4.30 พิกัดที่ใช้ในการแทนผิวด้วยแผ่นวอร์เทคหรือแผ่นซอร์ส (Hess & Smith, 1967)

ที่จุด $P(x, y)$ ใดๆ ศักย์ความเร็วเนื่องจาก ϕ ในสมการ (4.97) จะเป็น

$$\phi(x, y) = V_\infty (x \cos \alpha + y \sin \alpha) + \int \frac{q(s)}{2\pi} \ln r ds - \int \frac{\gamma(s)}{2\pi} \theta ds \quad (4.98)$$

เมื่อ r เป็นระยะจากส่วนสั้นๆ ds บนผิวถึงจุด P และ θ เป็นมุมวัดจากแนวสัมผัสผิวกับ ds ถึง r

ϕ ในสมการ(4.98) จะสอดคล้องสมการลาปลาซ และให้ความเร็วที่ ∞ เป็น V_∞ ถ้ากำลังต่อหน่วยความยาวของ $q(s)$ และ $\gamma(s)$ พอดีทำให้ทิศทางความเร็วอยู่ในแนวสัมผัสผิวพอดี และมีค่าการหมุนวนตามเงื่อนไขของคุตต้า จะให้ลักษณะการไหลที่ต้องการ แต่คงเห็นจากสมการแล้วว่าการอินทิเกรตสมการทำได้ยากโดยเฉพาะเมื่อไม่ทราบค่า $q(s)$ และ $\gamma(s)$ ยกเว้นเมื่อ $q(s)$ และ $\gamma(s)$ เรียงอยู่บนเส้นตรง ดังนั้นเช่นเดียวกับวิธีซอร์สแพแนลโดยการประมาณผิวของแพนอากาศด้วยรูปหลายเหลี่ยม (Polygon) ที่มีด้านเป็นเส้นตรงเรียงต่อกันไปรอบรูปแพนอากาศตามที่แสดงในรูป 4.31 ถ้าแทนผิวแพนอากาศโดยเลือกตำแหน่งบนผิว N ตำแหน่งเริ่มจากชายหลังวนตามเข็มนาฬิกาไปรอบแพนอากาศ เรียกตำแหน่งตามผิวนี้น่าปุมหรือโหนด (node) เส้นตรงที่ลากต่อจากโหนดหนึ่งไปอีกโหนดหนึ่งเรียงไปตามลำดับจะเป็นรูปหลายเหลี่ยมที่ใช้แทนแพนอากาศเดิม (ซึ่งเป็นที่มาของชื่อวิธีแพแนล) ให้เส้นตรงที่โยงระหว่างโหนดที่เรียงกันตามรูปวางเรียงไว้ด้วยซอร์สและวอร์เทค ในกรณีนี้ให้ s_j เป็นระยะบนแพแนล j วัดจากโหนด j ไปยังโหนด $j + 1$ สมการ (4.98) จะเป็น



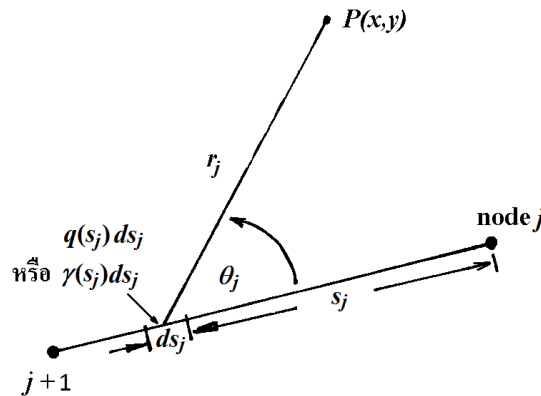
รูป 4.31 การแทนผิวแพนอากาศด้วยแพแนล (Hess & Smith, 1967)

$$\phi(x, y) = V_\infty (x \cos \alpha + y \sin \alpha) + \sum_{j=1}^N \int_{\text{panel } j} \left[\frac{q(s_j)}{2\pi} \ln r_j - \frac{\gamma(s_j)}{2\pi} \theta_j \right] ds_j \quad (4.99)$$

เมื่อ r_j และ θ_j เป็นรัศมีและมุมจากจุดใดๆ (x, y) บนแพแนล j ไปยังจุด $P(x, y)$

สมมติให้กำลังของซอร์ส q มีค่าคงที่บนแต่ละแพแนล แต่เปลี่ยนค่าได้จากแพแนลหนึ่งไปยังอีกแพแนลหนึ่ง และให้กำลังของวอร์เทกมีค่าคงที่เท่ากันบนทุกแพแนล เพราะฉะนั้น

$$\begin{aligned} q(s_j) &= q_j \quad \text{สำหรับ } j = 1, 2, \dots, N \\ \gamma(s_j) &= \gamma \end{aligned}$$



รูป 4.32 การกำหนดค่า r_j และ θ_j (Hess & Smith, 1967)

ตัวแปรที่ต้องมีการกำหนดค่าในตอนนี้เป็นกำลังของซอร์สบนแต่ละแพแนล $q_1, q_2, \dots, q_N$ และกำลังของวอร์เทก γ จะเห็นว่าไม่ว่าค่า q_j และ γ จะเป็นเท่าใดสมการ (4.99) จะสอดคล้องกับเงื่อนไขที่ความเร็วต้องเท่ากับ V_∞ ที่ไกลจากแพนอากาศออกไป และการไหลเป็นการไหลไร้การอัดตัวไร้การหมุน (Incompressible irrotational flow) เสมอ แต่ยังไม่สอดคล้องกับเงื่อนไขที่ผิวที่ความเร็วต้องอยู่ในแนวสัมผัสผิวรอบผิวแพนอากาศ และเงื่อนไขของคุดด้าที่กำหนดค่าการหมุนวนรอบแพนอากาศ ดังนั้นต้องกำหนดค่า q_j และ γ ด้วยการพิจารณาความเร็วในแนวสัมผัสผิวที่จุดอ้างอิงบนแต่ละแพแนล และพิจารณาเงื่อนไขของคุดด้าในลักษณะใดลักษณะหนึ่ง

เนื่องจากตำแหน่งกึ่งกลางของแต่ละแพแนลเป็นตำแหน่งที่สะดวกและเหมาะสม เราจึงเลือกให้จุดนี้เป็นจุดอ้างอิงเรียกว่า “จุดกำกับ” (Control point) ของแต่ละแพแนล และพิจารณาให้ความเร็ว

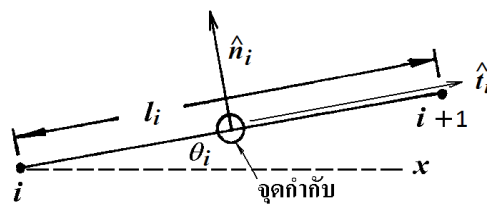
ที่เหนี่ยวนำจากซอร์สและวอร์เทคทั้งหมดที่จุดนี้เมื่อรวมความเร็วกระแสอิสระแล้วอยู่ในทิศทางขนานกับแพแนล (ซึ่งตอนนี้แทนผิวแพนอากาศ) พอดี สำหรับเงื่อนไขของคุดต่ำจากสมการ (4.9) $\gamma(TE) = 0$ เนื่องจากเราสมมติให้ γ มีค่าคงที่ค่าหนึ่งบนทุกแพแนลการกำหนดให้ γ มีค่าเป็นศูนย์ที่ชายหลังจึงทำไม่ได้จริงๆ แต่ถ้าสำรวจให้ละเอียด จากหัวข้อ 4.5 จะพบว่าเงื่อนไขนี้มาจากการที่ความเร็วกระแสตามผิวบนและผิวล่างที่มาบรรจบกันที่ชายหลังจะมีความเร็วเท่ากันตรงชายหลังพอดี เพราะฉะนั้นถ้าแพแนลแรก และแพแนลสุดท้ายที่แทนผิวมีขนาดใกล้เคียงกัน เมื่อเพิ่มจำนวนแพแนลขึ้น และขนาดของแพแนลลดลง จุดกำกับของแพแนลแรกและแพแนลสุดท้ายจะมีตำแหน่งใกล้เคียงกันและขยับเข้าใกล้ชายหลัง ดังนั้นจึงอาจแทนเงื่อนไขของคุดต่ำโดยกำหนดให้ความเร็วที่จุดกำกับบนแพแนลแรกมีขนาดเท่ากับความเร็วที่จุดกำกับบนแพแนลสุดท้าย

จะเห็นว่าปัญหาของเรามีตัวไม่ทราบค่า $N + 1$ ตัว มีสมการที่พิจารณาจากความเร็วที่จุดกำกับ N สมการ และจากเงื่อนไขของคุดต่ำ 1 สมการ ดังนั้นเรามีระบบที่สามารถแก้สมการทางพีชคณิตได้ เพื่อที่จะจัดตั้งสมการทั้ง $N + 1$ สมการ เราต้องกำหนดความสัมพันธ์ในรูปทั่วไปซึ่งทำได้ดังนี้ กำหนดให้แพแนล i เป็นแพแนลที่อยู่ระหว่างโหนด i และ $i + 1$ และเอียงทำมุมกับแกน x เป็นมุม θ_i ตามที่แสดงในรูป 4.33 ดังนั้น

$$\sin \theta_i = \frac{y_{i+1} - y_i}{l_i} \quad ; \quad \cos \theta_i = \frac{x_{i+1} - x_i}{l_i} \quad (4.100)$$

เมื่อ l_i คือความยาวของแพแนล i

$$l_i = \sqrt{(x_{i+1} - x_i)^2 + (y_{i+1} - y_i)^2} \quad (4.101)$$



รูป 4.33 ค่าที่กำหนดบนแพแนล i (Hess & Smith, 1967)

ให้ $\hat{n}_i$ และ $\hat{t}_i$ เป็นหน่วยเวกเตอร์ที่ตั้งฉากและขนานกับแพแนล i ให้ $\hat{n}_i$ ชี้ออกจากผิวแพนอากาศในลักษณะที่ถ้าหันหน้าจากโหนด i ไปทางโหนด $i + 1$ แพนอากาศจะอยู่ทางขวามือ และ $\hat{n}_i$ มีทิศพุ่งออกจากแพนอากาศไปทางซ้าย และ $\hat{t}_i$ ชี้จากโหนด i ไปโหนด $i + 1$ ดังนั้น

$$\hat{n}_i = -\sin \theta_i \hat{i} + \cos \theta_i \hat{j} \quad (4.102a)$$

$$\hat{t}_i = \cos \theta_i \hat{i} + \sin \theta_i \hat{j} \quad (4.102b)$$

(อย่าลืม $\hat{i}$ และ $\hat{j}$ เป็นหน่วยเวกเตอร์ตามแกน x และ y ส่วน i และ j ใช้แทนตัวเลขบอกตำแหน่งแพแนล)

ให้พิกัดของจุดกึ่งกลางของแพแนล i เป็น $(\bar{x}_i, \bar{y}_i)$ เพราะฉะนั้น

$$\bar{x}_i = \frac{x_i + x_{i+1}}{2} \quad (4.103a)$$

$$\bar{y}_i = \frac{y_i + y_{i+1}}{2} \quad (4.103b)$$

เมื่อ (x_i, y_i) เป็นพิกัดของโหนด i และ (x_{i+1}, y_{i+1}) เป็นพิกัดของโหนด $i + 1$

ให้ส่วนของความเร็วตามแกน x และ y ที่จุด $(\bar{x}_i, \bar{y}_i)$ แทนด้วย

$$u_i = u(\bar{x}_i, \bar{y}_i)$$

$$v_i = v(\bar{x}_i, \bar{y}_i)$$

จะเขียนเงื่อนไขของความเร็วที่สัมผัสกับผิวบนแต่ละแพแนลได้เป็น

$$\vec{V}_i \cdot \hat{n}_i = 0 \quad \text{สำหรับ } i = 1, 2, \dots, N$$

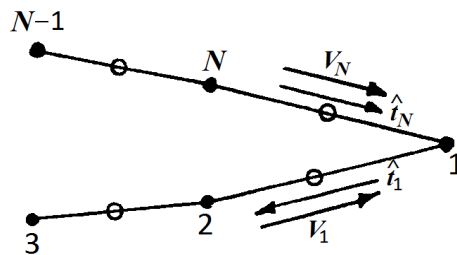
$$\text{หรือ} \quad -u_i \sin \theta_i + v_i \cos \theta_i = 0 \quad \text{สำหรับ } i = 1, 2, \dots, N \quad (4.104)$$

และเงื่อนไขของคุดต้าที่กำหนดให้ขนาดความเร็วบนแพแนล 1 และ แพแนล N เท่ากัน

$$\vec{V}_1 \cdot \hat{t}_1 = -\vec{V}_N \cdot \hat{t}_N$$

$$\text{หรือ} \quad u_1 \cos \theta_1 + v_1 \sin \theta_1 = -u_N \cos \theta_N - v_N \sin \theta_N \quad (4.105)$$

เครื่องหมายลบทางขวาของสมการ (4.105) มาจากการกำหนดทิศทางของ $\hat{t}_i$ ทำให้ $\hat{t}_1$ มีทิศชี้ออกจากชายหลังสวนกับ $\vec{V}_1$ และ $\hat{t}_N$ มีทิศชี้เข้าหาชายหลังไปทางเดียวกับ $\vec{V}_N$ ตามรูป 4.34



รูป 4.34 เงื่อนไขของคุดต้าที่กำหนดความเร็วบนแพแนล 1 และ N (Hess & Smith, 1967)

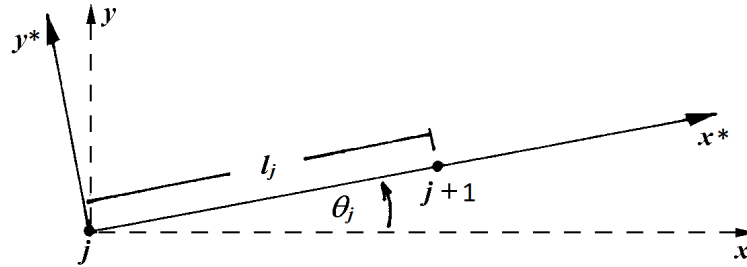
ขนาดของความเร็ว u_i และ v_i ที่จุดกึ่งกลางแพแนล i ประกอบขึ้นจากส่วนของความเร็วจากกระแสอิสระกับความเร็วจากรอร์สและวอร์เทคบนแต่ละแพแนลรวมกัน เนื่องจากความเร็วที่เกิดจากจอร์สและวอร์เทคบนแต่ละแพแนลจะเป็นสัดส่วนกับกำลังของจอร์สและวอร์เทคบนแพแนล นั้น ๆ เพราะฉะนั้นจะเขียนได้ว่า

$$u_i = V_\infty \cos \alpha + \sum_{j=1}^N q_j u_{sij} + \gamma \sum_{j=1}^N u_{vij} \quad (4.106a)$$

$$v_i = V_\infty \sin \alpha + \sum_{j=1}^N q_j v_{sij} + \gamma \sum_{j=1}^N v_{vij} \quad (4.106b)$$

เมื่อ u_{sij} เป็นส่วนความเร็วตามแกน x เนื่องจากจอร์สที่มีกำลัง 1 หน่วย บนแพแนล j ที่จุดกึ่งกลางแพแนล i และทำนองเดียวกันสำหรับ v_{sij} u_{vij} และ v_{vij}

การประมาณค่า u_{sij} v_{sij} u_{vij} และ v_{vij} ทำให้สะดวกกว่าในแกนพิกัดที่ขนานและตั้งฉากกับแพแนล $x^* y^*$ ตามที่แสดงในรูป 4.35



รูป 4.35 แกนพิกัด $x^* y^*$ ตั้งฉากกับแพแนล j (Hess & Smith, 1967)

จากรูป 4.35 ความสัมพันธ์ของส่วนความเร็วตามแกน $x y$ กับส่วนความเร็วตามแกน $x^* y^*$ จะเป็น

$$u = u^* \cos \theta_j - v^* \sin \theta_j \quad (4.107a)$$

$$v = u^* \sin \theta_j + v^* \cos \theta_j \quad (4.107b)$$

จะเห็นว่าเมื่อกำหนดแนวของ (u^*, v^*) ได้แล้ว ส่วนของความเร็วที่จุด (x_i, y_i) ใด ๆ เนื่องจากซอร์สกำลัง 1 หน่วยบนแพแนล j จะเขียนได้เป็น [จากสมการ (3.127) และ (3.128)]

$$u_{sij}^* = \frac{1}{2\pi} \int_0^{l_j} \frac{x^* - t}{(x^* - t)^2 + y^{*2}} dt \quad (4.108a)$$

$$v_{sij}^* = \frac{1}{2\pi} \int_0^{l_j} \frac{y^*}{(x^* - t)^2 + y^{*2}} dt \quad (4.108b)$$

เมื่อ (x^*, y^*) เป็นพิกัดของจุด (x_i, y_i) ที่วัดในพิกัดตามรูป 4.35 ค่าของการอินทิเกรตในสมการจะเป็น

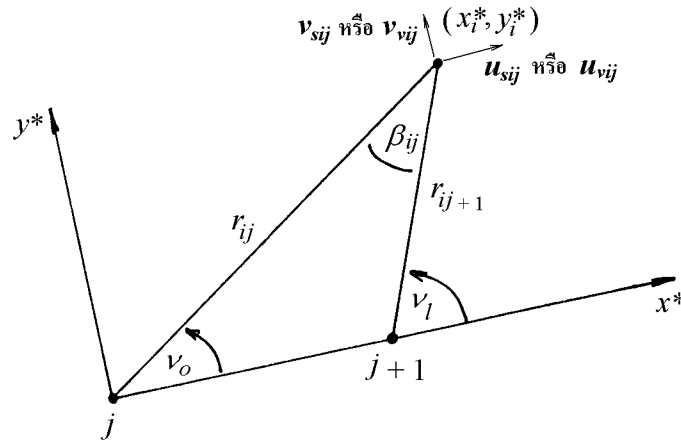
$$u_{sij}^* = -\frac{1}{2\pi} \ln \left[(x^* - t)^2 + y^{*2} \right]^{\frac{1}{2}} \bigg|_{t=0}^{t=l_j} \quad (4.109a)$$

$$v_{sij}^* = \frac{1}{2\pi} \tan^{-1} \frac{y^*}{x^* - t} \bigg|_{t=0}^{t=l_j} \quad (4.109b)$$

ได้เคยแสดงไว้ในบทที่ 3 แล้วว่า ผลการอินทิเกรตในสมการ (4.109a) และ (4.109b) แสดงเป็นรูปเรขาคณิตซึ่งแปลงกลับไปใช้พิกัด xy ได้ตามที่แสดงในรูป 4.36 คือ

$$u_{sij}^* = -\frac{1}{2\pi} \ln \frac{r_{ij+1}^*}{r_{ij}^*} \quad (4.110a)$$

$$v_{sij}^* = \frac{v_l - v_o}{2\pi} = \frac{\beta_{ij}}{2\pi} \quad (4.110b)$$



รูป 4.36 รูปเรขาคณิตของผลการอินทิเกรตในสมการ (4.110) และ (4.112)

อย่างที่แสดงในรูป 4.36 r_{ij} เป็นระยะจากโหนด j ไปถึงจุดกึ่งกลางแพแนล i r_{ij+1} เป็นระยะจากโหนด $j+1$ ไปถึงจุดกึ่งกลางแพแนล i จะเห็นว่า u_{sij} จะคำนวณได้จากตำแหน่งของจุด $(\bar{x}_i, \bar{y}_i)$ (x_i, y_i) และ (x_{j+1}, y_{j+1}) นั่นเอง สำหรับ β_{ij} จะเป็นมุมที่จุด $(\bar{x}_i, \bar{y}_i)$ ที่วัดระหว่าง r_{ij} และ r_{ij+1} จากสมการ (4.110a) และ (4.110b) จะเห็นว่าในกรณีพิเศษของความเร็วที่จุดกึ่งกลางแพแนล i เนื่องจากซอร์สบนแพแนล i เอง $u_{sii}^* = 0$ แต่ค่าของความเร็วในแนวขนานกับ y^* v_{sii}^* จะขึ้นกับการพิจารณาจุดกึ่งกลาง $(\bar{x}_i, \bar{y}_i)$ กระทำจากทางด้านไหนของแพแนล จากรูป 4.36 ถ้าพิจารณาจุด $P(x^*, y^*)$ เข้าหาจุดกึ่งกลาง $(\bar{x}_i, \bar{y}_i)$ ของแพแนล i จากทางด้านนอกของแพแนล (ด้านที่หันออกจากผิว หรือ $y^* \rightarrow 0^+$ สำหรับ $0 < x < l_i$) จะได้ $\beta_{ij} \rightarrow \pi$ แต่ในทางตรงข้าม ถ้าจุด $P(x^*, y^*)$ เข้าหาจุดกึ่งกลาง $(\bar{x}_i, \bar{y}_i)$ ของแพแนลจากทางอีกด้าน β_{ij} จะมีค่าเป็นลบ และมีค่า $\rightarrow -\pi$ เพราะว่าการพิจารณาการไหล สนใจการไหลที่เกิดขึ้นทางด้านนอกของวัตถุ ดังนั้นจึงพิจารณาเฉพาะจุด $P(x^*, y^*)$ ด้านนอกแพแนล นั่นคือ $\beta_{ij} = \pi$ และวัดค่า β_{ij} ได้

$$\begin{aligned} \beta_{ij} &= \pi \quad \text{เมื่อ } i = j \\ &= \tan^{-1} \frac{(\bar{y}_i - y_{j+1})(\bar{x}_i - x_j) - (\bar{x}_i - x_{j+1})(\bar{y}_i - y_j)}{(\bar{x}_i - x_{j+1})(\bar{x}_i - x_j) + (\bar{y}_i - y_{j+1})(\bar{y}_i - y_j)} \quad \text{เมื่อ } i \neq j \end{aligned} \quad (4.111)$$

ในทำนองเดียวกันความเร็วที่ถูกเหนี่ยวนำจากวอร์เทกซ์กำลัง 1 หน่วย บนแพแนล j ที่จุดกึ่งกลางแพแนล i ก็ประมาณค่าได้ง่ายโดยพิจารณาจากสมการ (4.32) และ (4.33) และเทียบกับสมการ (4.108) รวมกับผลการอินทิเกรตจากสมการ (4.110) ดังนี้

$$u_{vij}^* = -\frac{1}{2\pi} \int_0^{l_j} \frac{y^*}{(x^* - t)^2 + y^{*2}} dt = \frac{\beta_{ij}}{2\pi} \quad (4.112a)$$

$$v_{vij}^* = -\frac{1}{2\pi} \int_0^{l_j} \frac{x^* - t}{(x^* - t)^2 + y^{*2}} dt = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{r_{ij+1}}{r_{ij}} \quad (4.112b)$$

เงื่อนไขของความเร็วในแนวสัมผัสตามสมการ (4.105) จะเขียนได้ในฟอร์ม

$$\sum_{j=1}^N A_{ij} q_j + A_{i+1N} \gamma = b_i \quad (4.113)$$

เมื่อ $A_{ij} = -u_{sij} \sin \theta_i + v_{sij} \cos \theta_i$

$$= -u_{sij}^* (\cos \theta_j \sin \theta_i - \sin \theta_j \cos \theta_i) + v_{sij}^* (\sin \theta_j \sin \theta_i - \cos \theta_j \cos \theta_i) \quad (4.114)$$

แทนค่า u_{sij}^* และ v_{sij}^* จากสมการ (4.110a) และ (4.110b)

ดังนั้น $2\pi A_{ij} = \sin(\theta_i - \theta_j) \ln \frac{r_{ij+1}}{r_{ij}} + \cos(\theta_i - \theta_j) \beta_{ij}$ (4.115)

ทำนองเดียวกัน $2\pi A_{iN+1} = \sum_{j=1}^N \cos(\theta_i - \theta_j) \ln \frac{r_{ij+1}}{r_{ij}} - \sin(\theta_i - \theta_j) \beta_{ij}$ (4.116)

และ $b_i = V_\infty \sin(\theta_i - \alpha)$ (4.117)

ส่วนเงื่อนไขของจุดตัดตามสมการ (4.105) จะเขียนได้ในฟอร์ม

$$\sum_{j=1}^N A_{N+1,j} q_j + A_{N+1,N+1} \gamma = b_{N+1} \quad (4.118)$$

หลังจากจัดการอย่างเดียวกัน จะพบว่า

ดังนั้น $2\pi A_{N+1,j} = \sum_{k=1}^N \sum_{j=1}^N \sin(\theta_k - \theta_j) \beta_{kj} - \cos(\theta_k - \theta_j) \ln \frac{r_{kj+1}}{r_{kj}}$ (4.119)

$$2\pi A_{N+1,N+1} = \sum_{k=1}^N \sum_{j=1}^N \sin(\theta_k - \theta_j) \ln \frac{r_{kj+1}}{r_{kj}} - \cos(\theta_k - \theta_j) \beta_{kj} \quad (4.120)$$

และ $b_{N+1} = -V_\infty \cos(\theta_j - \alpha) - V_\infty \cos(\theta_N - \alpha)$ (4.121)

สมการ (4.113) และ (4.118) จะรวมเป็นชุดสมการพีชคณิต $N + 1$ สมการ $N + 1$ ตัวไม่ทราบค่า $q_1, q_2 \dots q_N$ และ γ ซึ่งเมื่อแก้แล้วสามารถนำค่า q_j และ γ ที่ได้ไปคำนวณหาความเร็วบนแต่ละแพแนลที่จุดกึ่งกลางได้จาก

$$V_{t,i} = V_\infty \cos(\theta_j - \alpha) + \sum_{j=1}^N \frac{q_j}{2\pi} \left[\sin(\theta_i - \theta_j) \beta_{ij} - \cos(\theta_i - \theta_j) \ln \frac{r_{ij+1}}{r_{ij}} \right] + \frac{\gamma}{2\pi} \sum_{j=1}^N \left[\sin(\theta_i - \theta_j) \ln \frac{r_{ij+1}}{r_{ij}} + \cos(\theta_i - \theta_j) \beta_{ij} \right] \quad (4.122)$$

ซึ่งพิสูจน์ได้จากการจัดการกับสมการ (4.103), (4.106), (4.107), (4.110) และ (4.112) เพราะว่า $V_{n,i} = 0$ สัมประสิทธิ์ความดันที่ $(\bar{x}_i, \bar{y}_i)$ จะคำนวณได้เป็น

$$c_p(\bar{x}_i, \bar{y}_i) = 1 - 1 - \frac{V_{t,i}^2}{V_\infty^2} \quad (4.123)$$

ส่วนค่าแรงยกและโมเมนต์จะได้รับการสมมติให้ c_p มีค่าคงที่บนแพแนลแล้วรวมแรงที่เกิดขึ้นแต่ละแพแนลเข้าด้วยกัน

4.11 โปรแกรมคอมพิวเตอร์

การคำนวณหาค่า c_p รอบผิวแพนอากาศ โดยใช้เทคนิคตามวิธีแพนแนลเห็นได้ชัดว่าจะได้คำตอบที่สมเหตุสมผลก็ต่อเมื่อจำนวนแพนแนลที่ใช้แทนผิวแพนอากาศมีจำนวนมากพอที่จะสร้างรูปหลายเหลี่ยมที่ใกล้เคียงรูปร่างเดิมของแพนอากาศ นั่นคือปัญหาจะต้องเกี่ยวข้องกับการแก้ชุดสมการพีชคณิต $N+1$ สมการ ที่มีจำนวน $N+1$ ตัวแปร ปัญหาทั่วไปจะใช้จำนวนแพนแนลมากกว่า 20 แพนแนลขึ้นไป เท่ากับเราจะต้องแก้ปัญหา 20 สมการ 20 ตัวแปรไม่ทราบค่าเป็นอย่างน้อย ดังนั้นการใช้โปรแกรมคอมพิวเตอร์เพื่อแก้ปัญหา สามารถเขียนขึ้นตามขั้นตอนการคำนวณในสมการต่างๆ ที่ผ่านมาและอาศัยโปรแกรมแก้ชุดสมการพีชคณิตที่หาได้ในตำราการคำนวณเชิงตัวเลขทั่วไป แก้สมการหาค่า q_i และ γ เมื่อได้แล้วก็สามารถนำไปคำนวณหาความเร็วบนแต่ละแพนแนลและ c_p ได้ (Moran, 2010)

ดังนั้นอาจกำหนดขั้นตอนโปรแกรมได้กว้าง ๆ ตามนี้

- กำหนดตำแหน่งของโหนด (x_i, y_i) บนผิวแพนอากาศ โดยให้โหนดที่ 1 เริ่มจากชายหลังของแพนอากาศวนตามเข็มนาฬิกาไปตามผิวจนกลับมาบรรจบที่ชายหลังตามตัวอย่างในรูป 4.31 ตามปกติถึงจะไม่มีข้อจำกัดในการกำหนดจำนวนโหนดหรือแพนแนล แต่สำหรับแพนอากาศเรามักจะกำหนดให้จำนวนโหนดและจำนวนแพนแนล ตามผิวบนและผิวล่างมีจำนวนเท่ากัน ซึ่งจะทำให้เงื่อนไขของจุดดำที่กำหนดจากความเร็วบนแพนแนลที่ 1 และแพนแนลสุดท้ายตามสมการ (4.105) ได้จากความเร็วที่จุดดำกับที่มีระยะห่างจากชายหลังใกล้เคียงกัน นอกจากนี้การกำหนดจำนวนแพนแนลควรจะต้องพิจารณาว่าผิวแพนอากาศมีความโค้งมาก และควรกำหนดให้แพนแนลแรก และ แพนแนลสุดท้ายสั้นเพื่อให้จุดดำกับบนแพนแนลทั้งสองใกล้อยู่ชายหลังมากที่สุด

- จากพิกัดของโหนดในข้อที่ 1 คำนวณตำแหน่งของจุดดำกับ $(\bar{x}_i, \bar{y}_i)$ และมุม θ_i ของแพนแนลที่ทำกับแกน x จากสมการ (4.100) และ (4.103) สำหรับ $i = 1, 2, \dots, N$

- คำนวณระยะ r_{ij} และมุม β_{ij} ระหว่างโหนดบนแพนแนล j กับจุดดำกับบนแพนแนล i จาก $r_{ij} = \sqrt{(\bar{x}_i - x_j)^2 + (\bar{y}_i - y_j)^2}$ และเงื่อนไขตามสมการ (4.111)

- คำนวณสัมประสิทธิ์ A_{ij} ตามสมการ (4.115) สำหรับ $i = 1, 2, \dots, N$ และ $j = 1, 2, \dots, N$

- คำนวณสัมประสิทธิ์ $A_{i,N+1}$ ตามสมการ (4.116) สำหรับ $i = 1, 2, \dots, N$

- คำนวณสัมประสิทธิ์ $A_{N+1,j}$ ตามสมการ (4.119) สำหรับ $j = 1, 2, \dots, N$

- คำนวณสัมประสิทธิ์ $A_{N+1,N+1}$ ตามสมการ (4.120)

- คำนวณ b_i และ b_{N+1} ตามสมการ (4.117) และ (4.121)

- การคำนวณในข้อ 2 ถึง 8 ใช้เพียงพิกัดของโหนด (x_j, y_j) เท่านั้น และจะได้ชุดสมการที่เขียนในรูปเมตริกซ์ เป็น

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & \dots & A_{1,N+1} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} & \dots & A_{2,N+1} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} & \dots & A_{3,N+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{N1} & A_{N2} & A_{N3} & \dots & A_{N,N+1} \\ A_{N+1,1} & A_{N+1,2} & A_{N+1,3} & \dots & A_{N+1,N+1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ \vdots \\ q_N \\ \gamma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_N \\ b_{N+1} \end{bmatrix}$$

10. แก้ชุดสมการในข้อ 9 โดยใช้วิธีเชิงตัวเลขแบบใดแบบหนึ่ง เช่น การใช้เมทริกซ์อินเวอร์ส (inverse matrix) ใช้กฎของเครเมอร์ (Cramer's rule) หรือใช้วิธีของเกาส์ (Gauss elimination) ฯลฯ จะได้ค่า $q_1, q_2, q_3, \dots, q_N$ และ γ

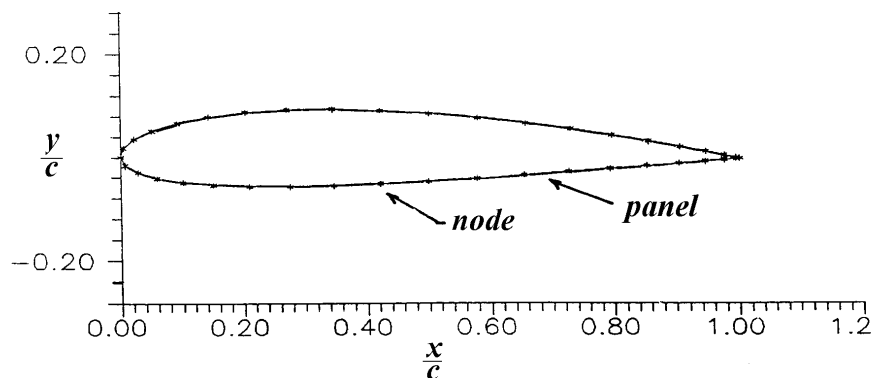
11. ค่า q_i และ γ ที่คำนวณได้ นำไปใช้ในสมการ (4.122) เพื่อหาค่า V_{ti} สำหรับ $i = 1, 2, \dots, N$

12. คำนวณ c_p บนแต่ละแพแนลตามสมการ (4.123) c_p ที่คำนวณได้จะถูกกำหนดให้มีค่าคงที่บนแต่ละแพแนล หรือคงที่บนผิวแพนอากาศในช่วงที่ถูกแทนด้วยแพแนลนั้น

13. การแจกแจงความดันบนผิวแพนอากาศจะได้รับการแจกแจง c_p ที่คำนวณได้ และสามารถนำไปคำนวณหาค่าสัมประสิทธิ์แรงยกและสัมประสิทธิ์โมเมนต์ได้ตามวิธีการในหัวข้อ 1.3 ผลลัพธ์ที่ได้จะเป็นส่วนที่เกิดจากความดันเท่านั้น และไม่มีแรงเสียดทานเข้ามาเกี่ยวข้อง

ขั้นตอนต่าง ๆ ที่กล่าวมานำมาแสดงเป็นตัวอย่างได้ตามนี้ ในรูป 4.37 แพนอากาศรูป NACA 2415 ถูกแทนโดยแพแนลที่เกิดจากการกำหนดโหนด 40 โหนดบนผิวแพนอากาศ แล้วแทนผิวด้วยเส้นตรง (แพแนล) ที่เชื่อมระหว่างโหนดที่อยู่ติดกันจำนวน 38 แพแนล

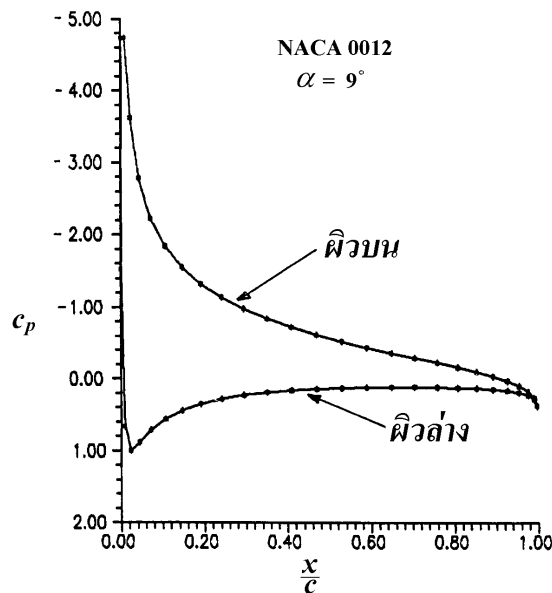
สังเกตว่ารูปแพนอากาศในรูป 4.37 ไม่มีส่วนที่เป็นเส้นโค้งเลย แต่เป็นเส้นตรง



รูป 4.37 รูปแพนอากาศ NACA 2415 แทนด้วยแพแนลจำนวน 38 แพแนล (Moran, 2010)

เป็นช่วงๆ ที่เรียงกันไป จะเห็นชัดว่าจำนวนโหนดเพียง 40 โหนด สามารถจะสร้างเส้นรอบรูปที่มีรูปร่างใกล้เคียงกับแพนอากาศที่กำหนดได้เป็นอย่างดี สังเกตด้วยว่าจำนวนโหนดจะถี่ในบริเวณขาหน้าและขาหลัง ซึ่งเป็นไปตามเหตุผลที่ได้กล่าวมาแล้ว การเพิ่มจำนวนโหนดหรือจำนวนแพแนลขึ้นจะทำให้ได้รายละเอียดของแพนอากาศเพิ่มขึ้นไปอีก จำนวนแพแนลที่ใช้ไม่มีกฎเกณฑ์บังคับ

ตายตัวขึ้นอยู่กับผู้แก้ปัญหาจะเห็นความเหมาะสมที่จุดใด เพราะจำนวนแพนเนลที่น้อยเกินไปจะให้รายละเอียดของการคำนวณไม่สมจริง และจำนวนแพนเนลที่มากก็ไม่จำเป็นว่าจะให้รายละเอียดของการคำนวณเพิ่มขึ้นตามจำนวนแพนเนลเสมอไป ในบางกรณีจำนวนแพนเนลที่มากกว่าค่าหนึ่งขึ้นไป อาจจะทำให้คำตอบมีลักษณะไม่ลู่เข้าสู่คำตอบที่ควรก็ได้ (เป็น divergence)



รูป

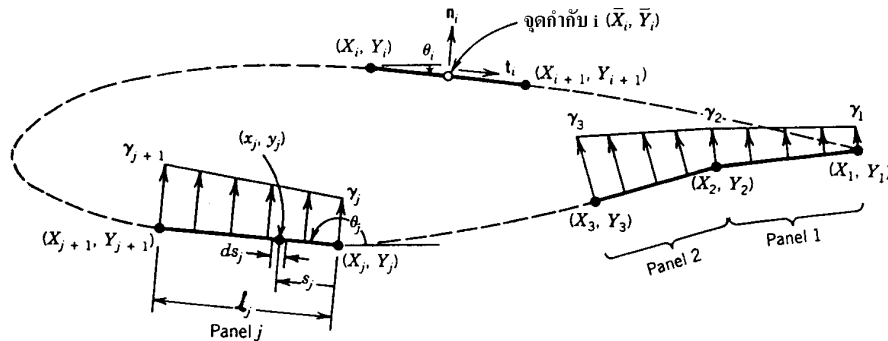
4.38 การแจกแจงความดันรอบแพนอากาศ NACA 0012 ที่มุมปะทะ 9°

คำนวณโดยวิธีแพนเนล ใช้จำนวนแพนเนล 50 แพนเนล (Moran, 2010)

การคำนวณโดยใช้จำนวนแพนเนล 50 แพนเนลกับแพนอากาศรูป NACA 0012 ที่มุมปะทะ 9° ได้ผลลัพธ์ตามที่แสดงในรูป 4.38 สังเกตว่าถึงแม้จะได้ค่า C_p บนผิวแพนอากาศ ตามผิวบน 26 จุด และผิวล่าง 26 จุด เท่านั้น แต่รายละเอียดที่ได้ก็เพียงพอจะแสดงลักษณะสำคัญของการแจกแจงความดันรอบแพนอากาศ ขอให้สังเกตค่า C_p ที่เท่ากับ 1 บริเวณชายหน้าผิวด้านล่าง ซึ่งแสดงจุดชะงัก (Stagnation) ด้านหน้า แต่ที่ชายหลังค่า C_p จะมีค่าประมาณ 0.4 ซึ่งต่ำกว่า 1 ซึ่งควรจะเป็นค่าทางทฤษฎีถ้าชายหลังเป็นจุดชะงัก (Stagnation) ทั้งนี้เนื่องมาจากการแทนเงื่อนไขของคุดต้าโดยใช้ความเร็วของกระแสบนแพนเนลแรกและแพนเนลสุดท้ายเป็นตัวกำหนด

วิธีแพนเนล ที่ได้อธิบายผ่านมามีได้เป็นเพียงแนวทางเดียวที่จะใช้พิจารณาปัญหาได้ อีกแนวทางหนึ่งที่พัฒนามาจากวิธีแพนเนลเรียกว่าวิธีวอร์เทกแพนเนล (Vortex panel method) ซึ่งเป็นแนวทางการคำนวณที่ใช้กันอยู่ในปัจจุบัน แนวคิดของวิธีนี้เหมือนกับวิธีแพนเนลทุกประการ เพียงแต่ซิงกูลาริตี (Singularity) ที่จะเรียงไปบนแต่ละแพนเนลจะมีเพียงวอร์เทกเท่านั้น ถ้าพิจารณาให้กำลังของวอร์เทกที่แจกแจงอยู่บนแต่ละแพนเนล เปลี่ยนแปลงในลักษณะตามที่แสดงให้เห็นในรูป 4.39 ให้ความหนาแน่นของวอร์เทกบนแต่ละแพนเนลเปลี่ยนแปลงเชิงเส้นตรงจากปลายข้างหนึ่งไปยังปลาย

อีกข้างหนึ่ง โดยที่ค่า γ มีค่าต่อเนื่องกันไปจากแพนเนลหนึ่งไปยังอีกแพนเนลหนึ่ง ในทำนองนี้เงื่อนไขของคุดต้า สามารถที่จะนำมาแทนในการคำนวณได้โดยง่าย และเรายังพบว่าการคำนวณเชิงตัวเลขจะมีเสถียรภาพมาก นอกจากในกรณีของแพนอากาศที่มีผิวโค้งเว้าเข้าบริเวณปลายหลังที่ต้องถูกแทนที่ด้วยแพนจำนวนมาก



รูป 4.39 การแจกแจง γ บนแต่ละแพนเนลในลักษณะเปลี่ยนแปลงเป็นเส้นตรงจาก
โหนดไปโหนด (2nd order vortex panel method) (Moran, 2010)

เมื่อพิจารณาในลักษณะนี้ ถ้าแพนอากาศอยู่ในกระแสอิสระความเร็ว V_∞ ที่มุมปะทะ α ศักย์ความเร็ว (Velocity potential) ที่จุดกำกับ (x_i, y_i) บนแพนเนล i จะเป็น

$$\phi(x_i, y_i) = V_\infty(x_i \cos \alpha + y_i \sin \alpha) - \sum_{j=1}^N \int_j \frac{\gamma(s_j)}{2\pi} \tan^{-1} \frac{(y_i - y_j)}{(x_i - x_j)} ds_j \quad (4.124)$$

เมื่อ

$$\gamma(s_j) = \gamma_j \left(\gamma_{j+1} - \gamma_j \right) \frac{s_j}{l_j} \quad (4.125)$$

เงื่อนไขที่ใช้กำหนดกำลัง γ_j ในสมการ (4.125) ก็จะเป็นเช่นเดียวกับที่ผ่านมา คือ กำลัง γ_j บนแต่ละแพนเนลต้องพอดีทำให้ความเร็วที่จุดกำกับบนแต่ละแพนเนลอยู่ในทิศทางขนานกับแพนเนล หรือส่วนของความเร็วตั้งฉากกับแพนเนลจะมีค่าเป็นศูนย์

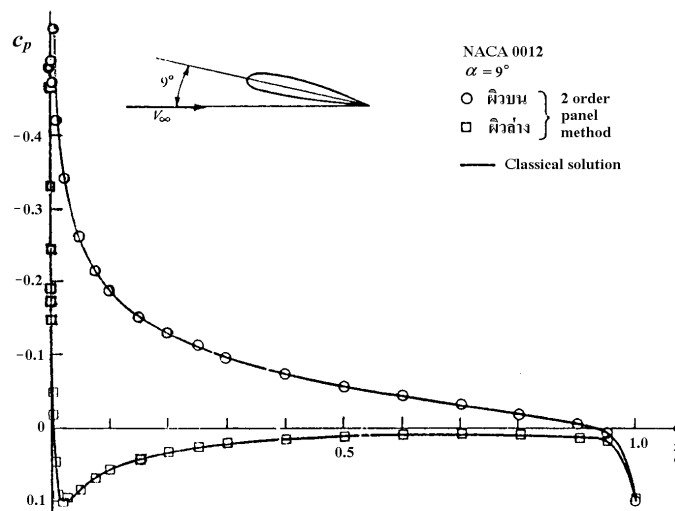
$$\frac{\partial}{\partial n_i} \phi(x_i, y_i) = 0 \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (4.126)$$

เมื่อ $\phi = \phi(x, y)$ มีค่าตามสมการ (4.124) ส่วนเงื่อนไขของคุดต้าจะได้จากการกำหนดกำลังของวอร์เทกบนโหนดที่ 1 เป็น

$$\gamma_1 + \gamma_{N+1} = 0 \quad (4.127)$$

จะเห็นว่าเงื่อนไขเหล่านี้จะสร้างชุดสมการ N สมการ N ตัวไม่ทราบค่า ซึ่งการแก้สมการจะให้กำลังที่เปลี่ยนแปลงจากโหนดหนึ่งไปยังอีกโหนดหนึ่ง และสามารถนำไปคำนวณหาการแจกแจงความดันรอบแพนอากาศ ตามขั้นตอนเดียวกับที่กล่าวผ่านมาแล้ว

ตัวอย่างการคำนวณการแจกแจงความดันรอบแพนอากาศ NACA 0012 ที่มุมปะทะ 9° โดยวิธีวอร์เทคแพนเนลตามที่แสดงในรูป 4.40 การคำนวณใช้จำนวนแพนเนล 50 แพนเนล ขอให้เปรียบเทียบรูป 4.40 กับรูป 4.38 ผลลัพธ์ของการคำนวณแสดงรายละเอียดของการคำนวณสอดคล้องไปในการทำนองเดียวกัน และสอดคล้องกับค่าทางทฤษฎีที่อาจคำนวณได้โดยวิธี “Conformal mapping” (เส้นทึบในรูป 4.40) ความแตกต่างของแนวทางทั้งสองปรากฏขึ้นที่บริเวณชายหลังของแพนอากาศ ในรูป 4.40 ค่า c_p ที่ชายหลังมีค่าเท่ากับ 1 ซึ่งแสดงว่าเป็นจุดชะงัก (Stagnation) ต่างจากผลลัพธ์ในรูป 4.38 ซึ่งเป็นผลมาจากลักษณะการแทนเงื่อนไขของจุดตัดที่ต่างกันนั่นเอง



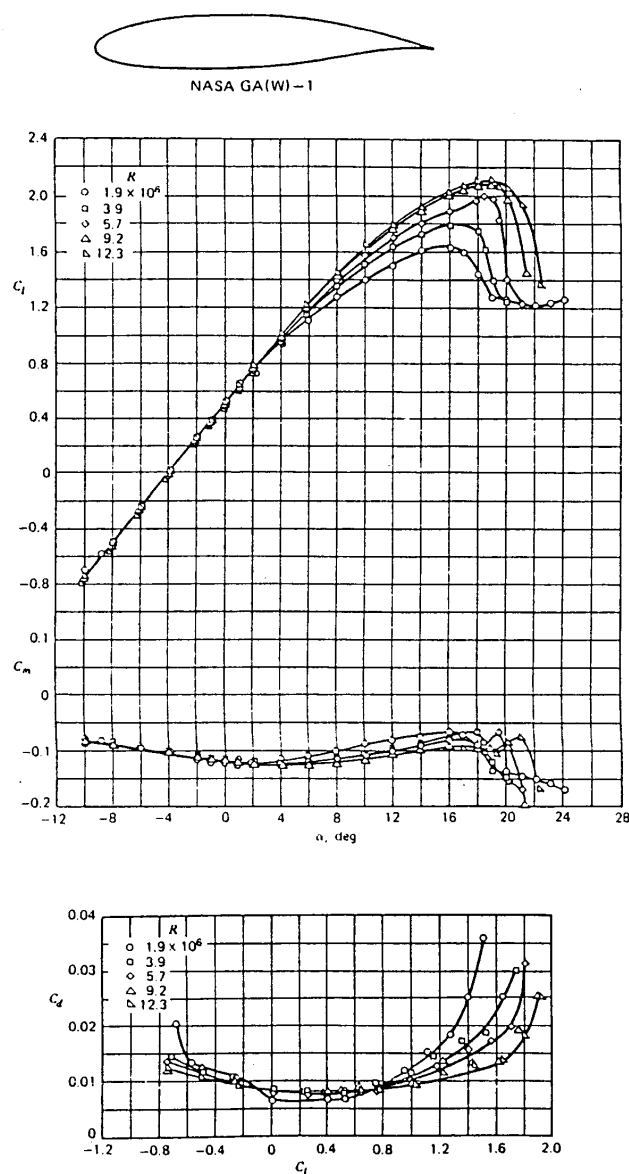
รูป 4.40 การแจกแจงความดันรอบแพนอากาศ NACA 0012 ที่มุมปะทะ 9° คำนวณด้วยวิธีวอร์เทคแพนเนล (Vortex panel [2nd order]) ใช้จำนวนแพนเนล 50 แพนเนล

ตัวอย่างโปรแกรมที่ใช้เทคนิคของวิธีแพนเนลโดยใช้แนวทางต่างๆ อาจค้นคว้าได้จากหนังสือ “An Introduction to Theoretical and Computational Aerodynamics” (Moran, 2010) และตำราอื่นๆ ที่เกี่ยวข้อง

4.12 แพนอากาศสำหรับความเร็วต่ำสมัยใหม่ (Modern Low-Speed Airfoil)

วิธีแพนเนลในหัวข้อ 4.10 ทำให้การออกแบบแพนอากาศสำหรับความเร็วต่ำ (Low-speed Airfoil) ได้รับการพัฒนาจนมีสมรรถนะสูงขึ้นอย่างมาก คงจำได้ว่าแพนอากาศตระกูล NACA เลขสี่ตัว เลขห้าตัว และรวมไปถึงอนุกรม-6 มีพื้นฐานอยู่บนผลการทดลองของแพนอากาศที่มีรูปร่างต่างๆ ในอุโมงค์ลม คุณลักษณะทางอากาศพลศาสตร์ของแพนอากาศเป็นผลโดยตรงจากรูปร่างของแพนอากาศ การที่จะได้ลักษณะทางอากาศพลศาสตร์อย่างที่ต้องการ (ได้แรงยกสูงและมีแรงต้านต่ำ) ควรจะได้รับการปรับปรุงรูปร่างของแพนอากาศนั่นเอง สำหรับแพนอากาศทุกๆ ไปสิ่งนี้จะได้รับการเปลี่ยนรัศมีความโค้งของชายหน้า เปลี่ยนความโค้ง การใช้แฟลป หรืออื่นๆ และที่สำคัญคือ

การเปลี่ยนแปลงการแจกแจงความดันที่เกิดขึ้นรอบแพนอากาศ ในลักษณะนี้การออกแบบแพนอากาศในปัจจุบันจึงใช้วิธีการอย่างเช่น วิธีแฟแนล ในหัวข้อ 4.10 ร่วมกับการพิจารณาการไหลในชั้นขีดผิว (ซึ่งจะได้กล่าวถึงต่อไป) เพื่อให้ได้รูปทรงของแพนอากาศที่จะให้การแจกแจงความดันที่เป็นไปตามที่เราต้องการ (และทำให้เกิดแรงยกตามที่ออกแบบ) หลังจากนั้นจึงนำรูปทรงแพนอากาศ ที่ออกแบบไว้ไปทดลองในอุโมงค์ลมเพื่อตรวจสอบคุณสมบัติที่แท้จริงในรายละเอียดอีกครั้งหนึ่ง โดยใช้วิธีการนี้ NASA ประสบความสำเร็จในการออกแบบแพนอากาศสำหรับความเร็วต่ำที่มีประสิทธิภาพเหนือกว่าแพนอากาศในตระกูลก่อนหน้า มีชื่อว่า “General Aviation (Whitcomb) -1” [GA(W)-1] ซึ่งต่อมาได้รับสัญลักษณ์ LS (1)-0417 รูปร่างของแพนอากาศชนิดนี้ แสดงในรูป 4.41 สังเกตว่าลักษณะสำคัญของ



รูป 4.41 ข้อมูลสมรรถนะของแพนอากาศ [GA(W)-1] (Anderson, 2016)

แพนอากาศ GA(W)-1 ที่เห็นชัดคือมีรัศมีความโค้งที่ขายน้ามากกว่าแพนอากาศ NACA (ประมาณ $0.08c$ เทียบกับ $0.02c$) เพื่อที่จะลดค่าของความดันต่ำสุดที่เป็นยอดแหลม (peak pressure ดูรูป 4.38 และ 4.40 ประกอบ) ที่เกิดขึ้นบริเวณปลายจมูก (nose) ของแพนอากาศ ซึ่งจะเป็นผลให้สามารถหลีกเลี่ยงหรืออย่างน้อยก็ถ่วงการเกิดการแยกตัวของชั้นขีดผิวที่ขายน้าออกไป อีกลักษณะหนึ่งที่สำคัญคือผิวล่างบริเวณขายหลังจะเว้าเป็นรูปโค้ง ซึ่งจะเพิ่มค่าความโก่ง (camber) ของแพนอากาศในส่วนนั้น และทำให้เกิดแรงทางอากาศพลศาสตร์เพิ่มขึ้นที่บริเวณขายหลัง การออกแบบลักษณะพิเศษทั้งสองช่วยให้การแยกตัวของชั้นขีดผิวบนผิวด้านบนจะเกิดขึ้นที่มุมปะทะสูงกว่าปกติ ผลก็คือค่าสัมประสิทธิ์แรงยกสูงสุดจะมีค่าสูงกว่าแพนอากาศ NACA ค่าสัมประสิทธิ์แรงยก แรงต้าน และโมเมนต์จากผลการทดลองแสดงไว้เช่นกันในรูป 4.41 สังเกตว่าถ้าเทียบกับแพนอากาศ NACA 2412 (รูป 4.5 และ รูป 4.6) ค่า $c_{l_{max}}$ ของ GA(W)-1 จะมีค่าสูงกว่ามาก (John J. Bertin, 2025)

ที่น่าสนใจอีกอย่างหนึ่งก็คือ GA(W)-1 มีความหนาสูงสุด 17 % คอร์ด และมีค่าสัมประสิทธิ์แรงยกแผนแบบ (design lift coefficient) 0.4 โดยใช้เส้นความโก่ง (camber line) แบบเดียวกัน NASA ได้เพิ่มแพนอากาศให้อยู่ในตระกูลแพนอากาศความเร็วต่ำที่มีความหนาต่างกันคือ LS(1)-0409 และ LS(1)-0413 ซึ่งคุณสมบัติเมื่อเปรียบเทียบกับแพนอากาศ NACA มาตรฐานที่มีความหนาเดียวกันแล้วมีลักษณะสำคัญคือ

1. ค่า $c_{l_{max}}$ จะมีค่าสูงกว่าประมาณ 30 %

2. ค่าสัดส่วนแรงยกต่อแรงต้านที่ $c_l = 1$ จะเพิ่มขึ้นประมาณ 50 % $c_l = 1$ โดยทั่วไปเป็นค่าสัมประสิทธิ์แรงยกในการบินไต่ระดับสำหรับอากาศยานทั่วไปในการบินปกติ การที่สัดส่วน L/D เพิ่มขึ้นจะช่วยเพิ่มสมรรถนะการไต่ขึ้นอย่างมาก

มีเรื่องน่าสนใจที่ควรตั้งข้อสังเกตสำหรับรูปร่างของแพนอากาศในรูป 4.41 คล้ายคลึงกันมากกับรูปร่างของแพนอากาศที่ใช้กับยานความเร็วสูงใกล้ความเร็วเสียงที่เรียก “แพนอากาศย่านใกล้จุดวิกฤติยิ่ง”(supercritical airfoil) ซึ่งออกแบบให้สามารถลดแรงต้านที่เกิดจากคลื่นกระแทก (wave drag) เนื่องจากการบินใกล้ $M = 1$ โดยวิศวกรของ NASA “ริชาร์ด วิทคอมบ์” (Richard Whitcomb) ในปี 1965 จริงๆ แล้วแพนอากาศ LS(1)-0417 ได้รับอิทธิพลของการออกแบบมาจากการวิจัย Supercritical airfoil นั้นเอง

4.13 การไหลผ่านแพนอากาศในกรณีตามความเป็นจริง

(The flow over an airfoil the real case)

ที่ผ่านมาการศึกษาการไหลแบบไร้ความหนืดไร้การอัดตัว (Inviscid incompressible flow) ผ่านแพนอากาศเมื่อนำไปเปรียบเทียบกับผลการทดลองในย่านความเร็วต่ำของการไหลผ่าน

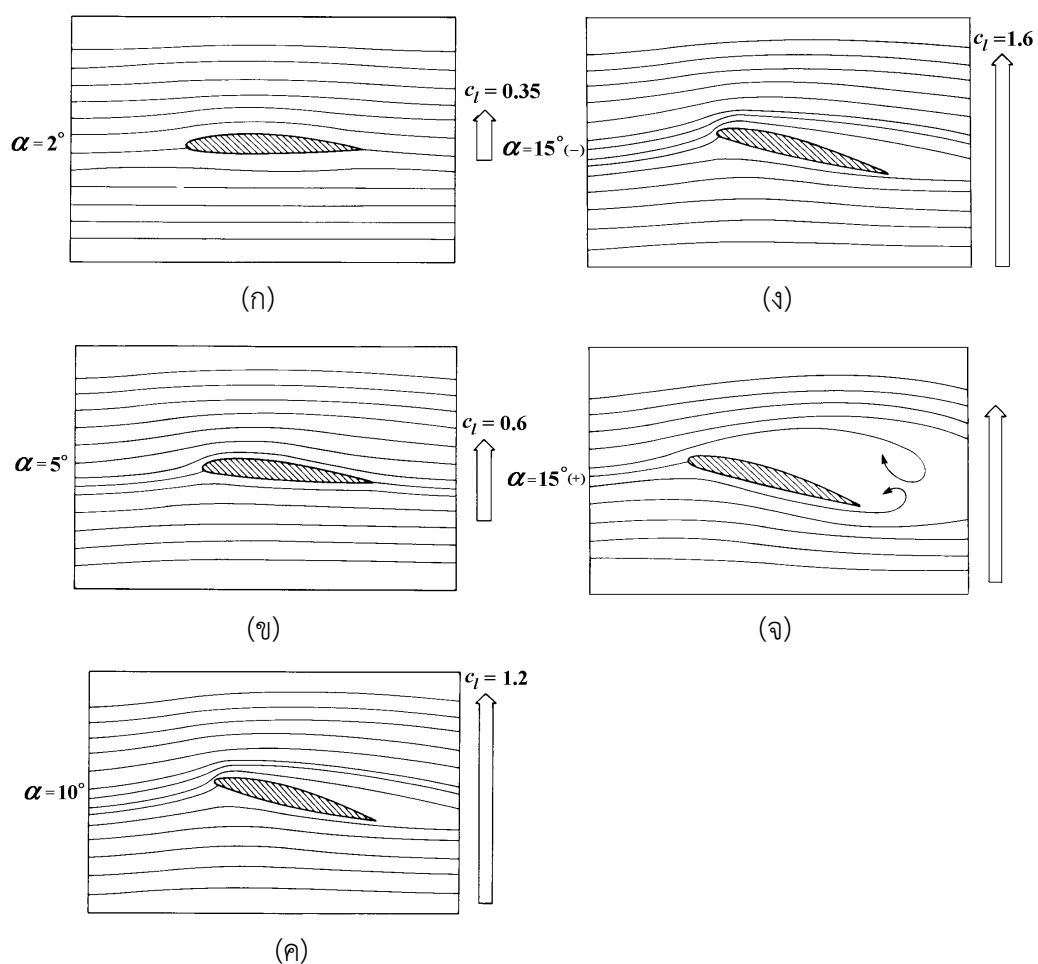
แผนอากาศแล้ว แรงยกและโมเมนต์ที่ได้จากทฤษฎีสอดคล้องกันเป็นอย่างดีกับผลการทดลอง ยกเว้นเพียงประการเดียว คือ ในการไหลจริงเมื่อมุมปะทะของแผนอากาศเพิ่มขึ้นถึงค่าหนึ่ง กระแสอากาศที่ไหลแนบติดอยู่กับผิวบนของแผนอากาศจะแยกตัวออกจากผิว หรือแผนอากาศเข้าสู่อาการร่วงหล่น (Stall) อย่างที่แสดงในรูป 4.4 หัวข้อ 4.3 การแยกตัว (Separation) เป็นผลมาจากความหนืด (ซึ่งไม่ได้รวมไว้ในทฤษฎี) หลังจากการแยกตัวเกิดขึ้นสัมประสิทธิ์แรงยกจะไม่เพิ่มขึ้นตามมุมปะทะอีกต่อไป และจะถึงค่าสูงสุดซึ่งใช้สัญลักษณ์แทนด้วย $c_{l_{max}}$ มุมปะทะที่ค่าสัมประสิทธิ์แรงยกมีค่าสูงสุดเรียกมุมปะทะร่วงหล่น α_{stall} การเพิ่มมุมปะทะหลังจากค่านี้ต่อไปจะได้ค่าแรงยกที่ลดลง ที่มุมปะทะต่ำกว่า α_{stall} พอสมควร ผลการทดลองแสดงให้เห็นชัดเจนว่าแรงยกจะเปลี่ยนแปลงเป็นเส้นตรงกับมุมปะทะ เหมือนที่ทำนายโดยทฤษฎี จริงๆ แล้วในช่วงที่สัมประสิทธิ์แรงยกเปลี่ยนแปลงเป็นเส้นตรง ทฤษฎีการไหลไร้ความหนืดสอดคล้องกันดีมากกับผลการทดลองดังแสดงในรูป 4.5 และตัวอย่าง 4.2 แต่เนื่องจากเราไม่สามารถใช้ทฤษฎีทำนายการไหลแยกตัวได้ ดังนั้นการทำนายค่า $c_{l_{max}}$ และมุม α_{stall} จึงจำเป็นต้องอาศัยทฤษฎีที่เกี่ยวข้องกับการไหลหนืดเข้ามาจับ การวิเคราะห์การไหลโดยใช้ทฤษฎีการไหลหนืดจะอยู่ในส่วนของวิชานี้ ในหัวข้อนี้เราเพียงแต่ทำความเข้าใจลักษณะทางกายภาพของการไหลผ่านแผนอากาศในช่วงที่ใกล้กับการเกิดการแยกตัว เพื่อให้ความเข้าใจการเปลี่ยนแปลงแรงยกกับมุมปะทะของแผนอากาศมีความสมบูรณ์ขึ้น

สนามการไหลผ่านแผนอากาศ NACA 4412 ที่มุมปะทะต่างๆ แสดงให้เห็นในรูป 4.42 ในที่นี้เส้นกระแสที่อยู่ในรูปเป็นเส้นร่างขึ้นตามสัดส่วนจากผลการทดลองของ “ฮิคารุ อิโต” (Hikaru Ito)³ โดยรูปแบบของเส้นกระแสทำให้มองเห็นได้โดยใช้ควัน ในรูปมุมปะทะจะค่อยๆ เพิ่มขึ้นจากรูป 4.42 ก ถึง 4.42 จ และทางขวาของรูปจะแสดงลูกศรซึ่งขนาดของความยาวจะสัมพันธ์กับขนาดของสัมประสิทธิ์แรงยกที่เกิดขึ้นที่มุมปะทะนั้นๆ ในรูป 4.43 สัมประสิทธิ์แรงยกที่วัดได้จากการทดลองที่มุมปะทะต่างๆ แสดงเป็นรูปกราฟระหว่าง c_l และ α สังเกตว่าที่มุมปะทะน้อยๆ อย่างเช่น $\alpha = 2^\circ$ ในรูป 4.42 ก เส้นกระแสแทบจะไม่ถูกรบกวนให้บิดเบนไปจากแนวของกระแสอิสระและค่า c_l มีค่าน้อย เมื่อมุมปะทะเพิ่มขึ้นเป็น 5° ในรูป 4.42 ข และเป็น 10° ในรูป 4.42 ค เส้นกระแสเริ่มปรากฏให้เห็นแนวที่จะเบนขึ้นด้านบน (upwash) ในบริเวณด้านหน้าของแผนอากาศ และมีแนวเบนลงข้างล่าง (downwash) ที่บริเวณชายหลังของแผนอากาศ นอกจากนี้จะเห็นว่าจุดชะงักจะเลื่อนลงมาตามผิวล่างจากชายหน้าไปชายหลังเมื่อ α เพิ่มขึ้น ค่า c_l จะเพิ่มขึ้นเช่นกันเมื่อ α เพิ่มขึ้น และการเพิ่มขึ้นจะมีลักษณะเป็นเส้นตรงในย่านนี้ตามที่แสดงในรูป 4.43 ที่มุมปะทะต่ำกว่า 15° เล็กน้อย

³ Nakayama, Y.(ed) : Visualized Flow, compiled by the Japan Society of Mechanical Engineers, Pergamon Press, New York, 1988

ตามที่แสดงในรูป 4.42 ง จะเริ่มเห็นแนวโน้มของเส้นกระแสที่จะโค้งออกจากผิวบน แต่การไหลยังไม่มีการแยกตัวจากผิวบน อย่างไรก็ตามเมื่อมุมปะทะเพิ่มขึ้นจนมีค่าสูงกว่า 15° ไปเล็กน้อย กระแสจะแยกตัวจากผิวบนของแพนอากาศไปอย่างฉับพลันตามที่แสดงในรูป 4.42 จ การแยกตัวที่เกิดขึ้นเมื่อมุมปะทะเพิ่มขึ้นเพียงเล็กน้อยจากรูป 4.42 ง ไปเป็นรูป 4.42 จ เกิดขึ้นเกือบจะทันทีโดยเริ่มจากชายหน้าของแพนอากาศ และทำให้สัมประสิทธิ์แรงยกมีค่าลดลงเกือบทันทีดังที่แสดงในรูป 4.43

ลักษณะการร่วงหล่น (Stall) ของแพนอากาศตามที่แสดงในรูป 4.42 เรียกกันว่า การร่วงหล่นจากชายหน้า (Leading-edge stall) ซึ่งเป็นลักษณะเฉพาะตัวของแพนอากาศบางที่มีสัดส่วนความหนา



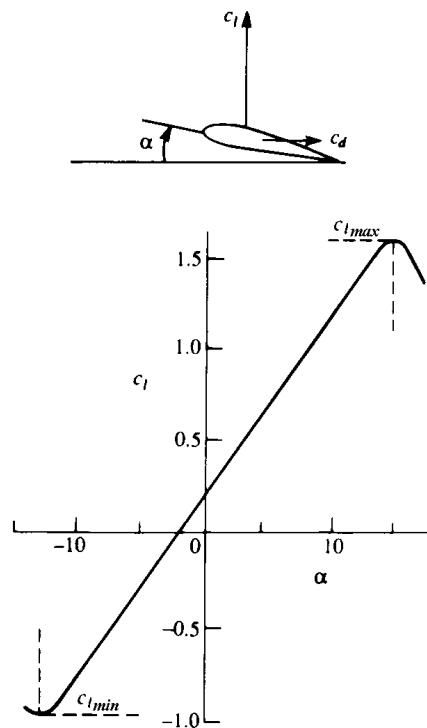
รูป 4.42 ตัวอย่างการร่วงหล่น (Stall) จากชายหน้า เส้นกระแสน้ำของการไหลผ่านแพนอากาศ NACA 4412

ที่มุมปะทะต่างๆ ที่ $Re = 2.1 \times 10^5$ และ $V_\infty = 8 \text{ m/s}$ รูปที่ได้ร่างตามสัดส่วน

จากผลการทดลองโดยปล่อยควันไปกับกระแสอากาศ ค่าสัมประสิทธิ์แรงยกแสดงให้เห็น

ด้วยลูกศรทางขวาของรูป (ก) ถึง (จ) (Nakayama, 1988)

อยู่ระหว่าง 10 ถึง 16 % คอร์ด อย่างที่เห็นแล้วการแยกตัวของการไหลจากผิวบนเกิดขึ้นอย่างฉับพลัน ทันใดตลอดทั้งผิวบนของแพนอากาศ โดยมีต้นกำเนิดของการแยกตัวเริ่มจากชายหน้าทำให้แรงยกของแพนอากาศสูญเสียไปทั้งหมดในทันทีทันใด สังเกตว่าโค้งแรงยกในรูป 4.43 แสดงยอดแหลมในช่วง c_{lmax} ซึ่งแสดงการสูญเสียแรงยกฉับพลันเมื่อถึงมุมปะทะร่วงหล่น



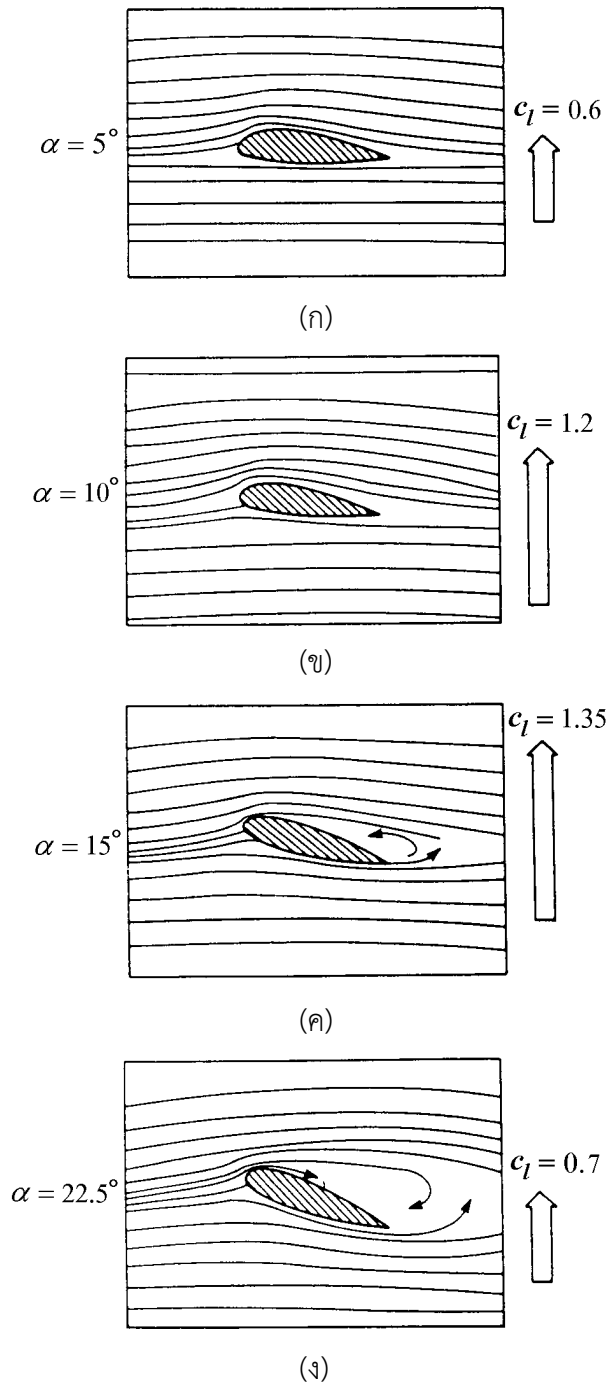
รูป 4.43 กราฟสัมประสิทธิ์แรงยกกับมุมปะทะของแพนอากาศในรูป 4.42

อีกรูปแบบของการร่วงหล่นตรงข้ามกับการร่วงหล่นจากชายหน้า คือการร่วงหล่นที่เริ่มจากชายหลัง (Trailing-edge stall) ซึ่งจะเป็นลักษณะเฉพาะตัวของแพนอากาศที่หนาขึ้น ตัวอย่างเช่น NACA 4421 ที่แสดงในรูป 4.44 ในที่นี้เราจะสังเกตเห็นการแยกตัวที่เกิดขึ้นทีละน้อย และเพิ่มขึ้นเรื่อยๆ โดยเริ่มจากชายหลังของแพนอากาศไล่ขึ้นมาจนถึงชายหน้าเมื่อมุมปะทะค่อยๆ เพิ่มขึ้น ในลักษณะนี้แรงยกบนแพนอากาศจะค่อยๆ สูญเสียไปตามการร่วงหล่นที่ค่อยๆ เพิ่มขึ้น เส้นโค้งแรงยกของกรณีนี้แสดงอยู่ในรูป 4.45 ซึ่งเส้นทึบเป็นเส้นโค้งแรงยกของแพนอากาศ NACA 4412 ที่นำมาแสดงซ้ำอีกครั้งจากรูป 4.43 เส้นไขว้ปลาแสดงโค้งแรงยกของ NACA 4421 เพื่อเปรียบเทียบระหว่างแพนอากาศที่มีลักษณะการร่วงหล่นจากชายหน้า (Leading-edge stall) และการร่วงหล่นจากชายหลัง (Trailing-edge stall) จะเห็นว่า

1. สำหรับแพนอากาศที่มีการร่วงหล่นจากชายหลัง โค้งแรงยกจะมีลักษณะการสูญเสียแรงยกแบบค่อยเป็นค่อยไป ลักษณะของโค้งที่ตำแหน่ง c_{lmax} จะมีลักษณะโค้งมนค่อยๆ เหลากแนวเส้นตรงซึ่งตรงข้ามกับลักษณะเป็นยอดแหลม และลดลงทันทีทันใดของ c_l ของแพนอากาศที่มี

การร่ว่งหล่นจากชายหน้า สรุปได้ว่าแพนอากาศที่มีการร่ว่งหล่นจากชายหลังจะมีการร่ว่งหล่นที่ “น่่มนวล” กว่าแพนอากาศที่มีการร่ว่งหล่นจากชายหน้า

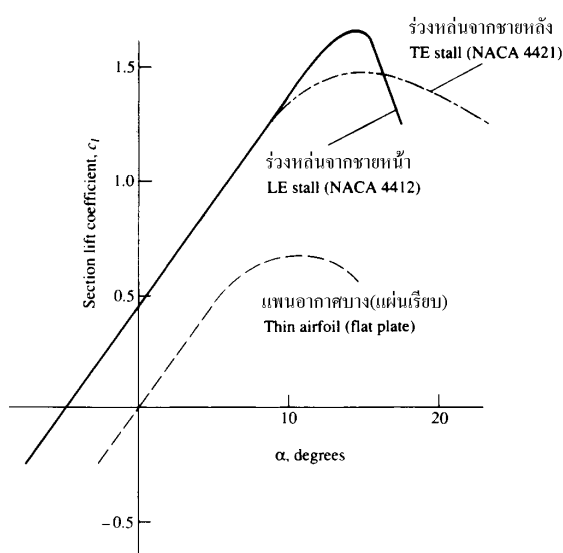
2. ค่า $c_{l_{max}}$ ของแพนอากาศที่มีการร่ว่งหล่นจากชายหลังจะไม่สูงเท่าของแพนอากาศที่มีการร่ว่งหล่นจากชายหน้า



รูป 4.44 การร่ว่งหล่นจากชายหลัง รูปแบบเส้นกระแสผ่านแพนอากาศ NACA 4421 ที่มุมปะทะต่างๆ

ได้จากการทดลองเดียวกับรูป 4.42 ของ Hikaru Ito. ที่ $Re = 2.1 \times 10^5$ $V_\infty = 8 \text{ m/s}$

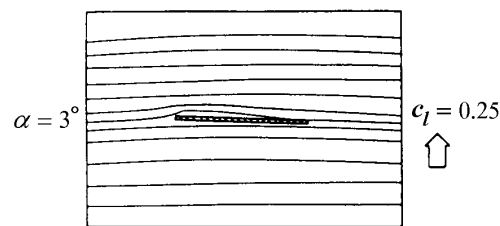
3. ทั้ง NACA 4412 และ 4421 มีรูปร่างของเส้นความโค้งเฉลี่ยเหมือนกัน เมื่อมองจาก ทฤษฎีแพนอากาศบางในบนี้ ค่าความชันของโค้งแรงยกและมุมปะทะที่แรงยกเป็นศูนย์ควรจะมีค่า เท่ากันซึ่งผลอันนี้ได้รับการยืนยันจากผลการทดลองในรูป 4.45 สังเกตว่าข้อแตกต่างเพียงประการ เดียวระหว่างรูปร่างของแพนอากาศทั้งสองคืออันหนึ่งหนากว่าอีกอันหนึ่ง ดังนั้นเมื่อเปรียบเทียบผล การทดลองจากรูป 4.42 ถึง 4.44 จึงพอจะสรุปได้ว่าผลกระทบที่สำคัญของความหนาของแพนอากาศ จะเกิดขึ้นกับค่า $c_{l_{max}}$ และลักษณะของการร่วงหล่นของแพนอากาศ และผลกระทบนี้แสดงให้เห็น ผ่านทางลักษณะการร่วงหล่นจากชายหน้าของแพนอากาศที่บางกว่ากับการร่วงหล่นจากชายหลังของ แพนอากาศที่หนากว่า



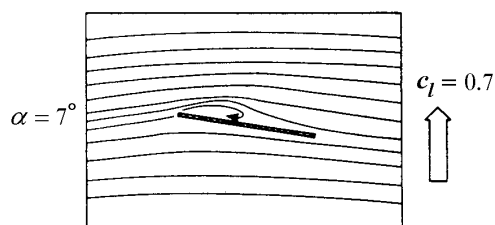
รูป 4.45 โค้งแรงยกของแพนอากาศ 3 แบบที่มีพฤติกรรมทางอากาศพลศาสตร์ต่างกัน
 ร่วงหล่นจากชายหลัง (NACA 4421) ร่วงหล่นจากชายหน้า (NACA 4412)
 ร่วงหล่นแบบแพนอากาศบาง (แผ่นเรียบ) (Nakayama, 1988)

ยังมีลักษณะการร่วงหล่นแบบที่สามที่เกิดขึ้นบนแพนอากาศที่บางมากๆ บางครั้งเรียกว่า “การร่วงหล่นแบบแพนอากาศบาง” (Thin airfoil stall) ตัวอย่างที่เห็นชัดของแพนอากาศบาง คือ แผ่นเรียบแบน (Flat plate) เส้นโค้งแรงยกของแผ่นเรียบแสดงเป็นเส้นประในรูป 4.45 และรูปแบบของเส้น กระแส ของการไหลผ่านแผ่นเรียบที่มุมปะทะต่างๆ แสดงในรูป 4.46 ในรูปแผ่นเรียบที่ใช้ในการ ทดลองมีความหนา 2 % คอร์ด ทฤษฎีการไหลไร้ความหนืดให้การอัดตัวแสดงให้เห็นว่าความเร็วของ การไหลจะมีค่าสูงมาก (จนถึงอนันต์) เมื่อกระแสต้องไหลอ้อมมุมที่มีความคมอย่างเช่น ชายหน้าของ แผ่นเรียบที่มีมุมปะทะ การไหลผ่านแผ่นเรียบตามความเป็นจริงตามรูป 4.46 กระแสไม่สามารถเร่ง ความเร็วขึ้นไปถึงอนันต์ได้ขณะที่ไหลอ้อมชายหน้าของแผ่นเรียบ ธรรมชาติได้ทดแทนข้อจำกัดอันนี้ โดยเพิ่มรัศมีความโค้งของการไหลอ้อมขึ้นโดยการแยกตัวที่บริเวณชายหน้า แม้ที่มุมปะทะเพียง

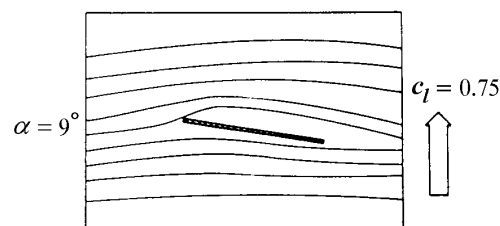
เล็กน้อย ในรูป 4.46 ก เมื่อ $\alpha = 3^\circ$ จะสังเกตเห็นบริเวณเล็กๆ ที่ชายหน้าที่มีการแยกตัวเกิดขึ้น การไหลแยกตัวนี้ไม่ได้ละจากผิวบนของแผ่นเรียบไปเลย เพราะถูกปะทะจากกระแสลมที่พัดมาจาก กระแสส่วนที่อยู่สูงถัดขึ้นไปจนย้อนกลับมาแนบติดกับผิวอีกครั้งหนึ่งได้ลงมาทำให้เกิดการฟอร์มตัว ของฟองของการแยกตัวอลวนอยู่บริเวณชายหน้า เมื่อมุมปะทะเพิ่มขึ้นจุดที่กระแสกลับมาสัมผัสกับ ผิวแผ่นเรียบจะเลื่อนต่ำลงตามผิวและบริเวณของการไหลแยกตัวจะขยายกว้างขึ้นซึ่งแสดงให้เห็น ในรูป 4.46 ข เมื่อ $\alpha = 7^\circ$ ที่มุมปะทะประมาณ 9° ในรูป 4.46 ค



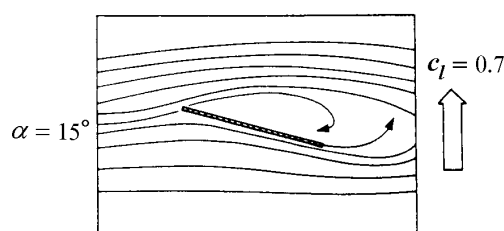
(ก)



(ข)



(ค)



(ง)

รูป 4.46 ตัวอย่างการร่วนหล่นแบบแผนอากาศบาง เส้นกระแสนผ่านแผ่นเรียบที่มี

มุมปะทะ จากผลการทดลองของ “ฮิคารุ อิโต” (Nakayama, 1988)

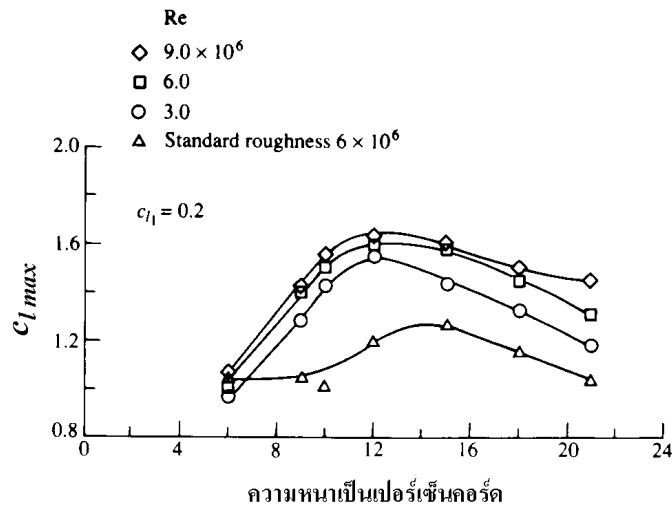
บริเวณการแยกตัวจะกินบริเวณเกือบทั่วทั้งผิวบนของแผ่นเรียบ ถ้าย้อนกลับไปดูรูป 4.45 มุมปะทะนี้คือมุมปะทะที่สัมพันธ์กับค่า $c_{l_{max}}$ สำหรับแผ่นเรียบ เมื่อ α เพิ่มขึ้นมากกว่านี้ การไหลจะยกตัวจากผิวอย่างสมบูรณ์อย่างที่แสดงในรูป 4.46 ง เส้นโค้งแรงยกในรูป 4.45 แสดงให้เห็นการเบนออกจากแนวเส้นตรงตั้งแต่มุมปะทะต่ำๆ ประมาณ 3° ซึ่งเป็นผลมาจากการเกิดการแยกตัวของ การร่วนหล่นอย่างค่อยเป็นค่อยไปและนิ่มนวล ซึ่งเป็นลักษณะเดียวกับการร่วนหล่นจากชายหลัง ถึงแม้ว่าลักษณะทางกายภาพของการไหลทั้งสองแบบจะต่างกัน ที่สำคัญอย่างยิ่งคือความจริงที่ $c_{l_{max}}$ ของแผ่นเรียบที่เห็นได้ชัดว่าต่ำกว่าของแพนอากาศ NACA ทั้งสองแบบตามที่แสดงในรูป 4.45 นั่นคือ เราสรุปได้ว่า จากรูป 4.45 ค่า $c_{l_{max}}$ จะขึ้นอยู่กับความหนาของแพนอากาศเป็นอย่างมาก โดยเปรียบเทียบระหว่างแพนอากาศ NACA ทั้งสองแบบกับแผ่นเรียบ จะเห็นว่าในทางปฏิบัติแพนอากาศ จะต้องมีความหนาที่เหมาะสมเพื่อให้ได้ค่า $c_{l_{max}}$ สูง อย่างไรก็ตามความหนาที่เกินกว่าค่าหนึ่งนั้นจะเริ่มมีอิทธิพลต่อลักษณะการร่วนหล่น (จากชายหน้า หรือ จากชายหลัง) และแพนอากาศที่หนามากมีแนวโน้มจะมีค่า $c_{l_{max}}$ ลดลง เมื่อความหนาเพิ่มขึ้น ดังนั้นถ้าเราพล็อตค่า $c_{l_{max}}$ กับสัดส่วนความหนา เราคาดได้ว่าจะพบตำแหน่งสูงสุด(maximum) อย่างที่แสดงในรูป 4.47 ซึ่งแสดงค่า $c_{l_{max}}$ จากผลการทดลองของแพนอากาศ NACA 63-2XX เทียบกับความหนานำมาวาดเป็นกราฟ สังเกตว่าเมื่อความหนาค่อยๆ เพิ่มขึ้นจากค่าน้อย ค่า $c_{l_{max}}$ จะเพิ่มขึ้นในช่วงแรกจนถึงค่าสูงสุดที่สัดส่วนความหนา ประมาณ 12 % จากนั้นจะเริ่มลดลงเมื่อความหนาเพิ่มขึ้น ผลการทดลองในรูป 4.46 นำมาพล็อตโดยใช้ค่า Re เป็นตัวแปร สังเกตว่าค่า $c_{l_{max}}$ สำหรับแพนอากาศอันหนึ่งจะขึ้นกับค่า Re ในแง่ที่ค่า $c_{l_{max}}$ สูงจะควบคู่กับค่า Re สูง เพราะว่าการแยกตัวจะเป็นตัวกำหนดตำแหน่งมุมปะทะของ $c_{l_{max}}$ เมื่อการแยกตัวเป็นปรากฏการณ์ที่มีมาจากความหนืดและปรากฏการณ์เหล่านี้จะขึ้นอยู่กับ Re เป็นตัวกำหนด จึงไม่น่าแปลกใจที่ $c_{l_{max}}$ จะแสดงความสัมพันธ์กับ Re

ยังมีคุณสมบัติทางอากาศพลศาสตร์ของแพนอากาศอีกแง่หนึ่งที่มีมักจะถูกมองข้ามไปในครั้งแรกที่เราศึกษาวิชานี้ คือ การสร้างแรงยกของแพนอากาศไม่ได้เป็นเป้าหมายสำคัญของการพิจารณาออกแบบแพนอากาศ คงเห็นจากที่ผ่านมาแล้วว่าแม้แต่แผ่นกระดานก็สามารถสร้างแรงยก หรือให้เงาะจงไปได้ว่ามีเส้นโค้งแรงยกในลักษณะเดียวกันกับแพนอากาศ จริงๆ แล้วมีคุณสมบัติสองประการที่จะเป็นตัวชี้คุณภาพของแพนอากาศเป็นหลัก (Bertin & Cummings, 2025) คือ

1. อัตราส่วนแรงยกต่อแรงต้าน (Lift to Drag ratio, L/D) แพนอากาศที่มีประสิทธิภาพคือ แพนอากาศที่สร้างแรงยกโดยทำให้เกิดแรงต้านน้อยที่สุด กล่าวอีกนัยหนึ่งคือ อัตราส่วน L/D จะเป็นตัวชี้หรือตัววัดประสิทธิภาพทางอากาศพลศาสตร์ของแพนอากาศ โดยปกติแพนอากาศมาตรฐานที่ถูกกล่าวถึงในบทนี้จะมีค่า L/D สูงมากเมื่อเทียบกับแผ่นเรียบ อัตราส่วน L/D สำหรับอากาศยานทั้งลำถือเป็นตัวแปรสำคัญที่มีผลกระทบต่อสมรรถนะการบิน ตัวอย่างเช่น พิสัยบิน (Range) ของ

อากาศยานจะเป็นสัดส่วนโดยตรงกับอัตราส่วน L/D นี้

2. ค่าสัมประสิทธิ์แรงยกสูงสุด $c_{l_{max}}$ แพนอากาศที่มีประสิทธิภาพพิจารณาได้จากที่มันสามารถสร้างแรงยกสูงสุดได้สูงกว่าแผ่นเรียบมาก



รูป 4.47 ผลของความหนาแน่นค่า $c_{l_{max}}$ สำหรับแพนอากาศ NACA 63-2XX (Bertin & Cummings, 2025)

เหตุผลหลักทั้งสองข้อ(ยังไม่นับรวมเหตุผลทางโครงสร้าง) นี้เองที่เป็นตัวอธิบายว่าทำไมเราจึงเลือกใช้ปีกของอากาศยานที่มีหน้าตัดเป็นรูปแพนอากาศแทนแผ่นไม้กระดานซึ่งดูจะง่ายกว่าและอาจให้แรงยกได้เช่นเดียวกัน นอกจากนี้ค่า $c_{l_{max}}$ ยังมีความสำคัญที่ควรกล่าวเสริมไว้ ณ ที่นี้ก็คือสำหรับอากาศยาน ค่า $c_{l_{max}}$ จะเป็นตัวกำหนดความเร็วร่วงหล่น (Stalling speed) ซึ่งเห็นได้ง่ายๆ โดยการพิจารณาสมดุลของแรงในการบินตรงระดับ เมื่อแรงยกจะมีค่าเท่ากับน้ำหนักของอากาศยานทั้งลำ, W , ดังนั้น

$$L - W = \frac{1}{2} \rho_{\infty} V_{\infty}^2 S C_L$$

หรือ

$$V_{\infty} = \sqrt{\frac{2W}{\rho_{\infty} S C_L}}$$

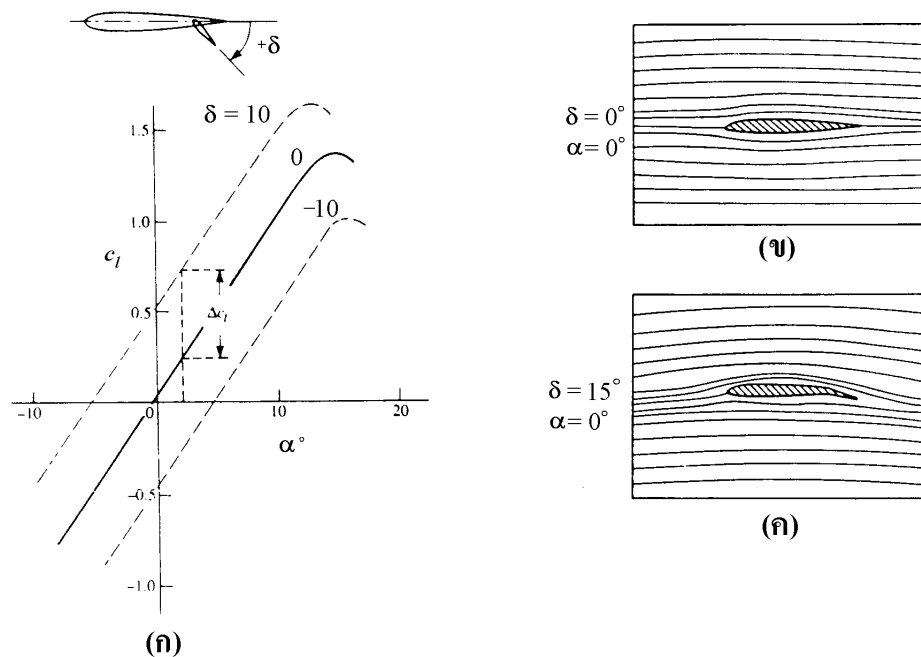
นั่นคือ ค่าความเร็วต่ำสุดที่เป็นไปได้ของอากาศยาน(ความเร็วร่วงหล่น) เกิดขึ้นเมื่อค่าแรงยกมีค่าสูงสุด

$$V_{stall} = \sqrt{\frac{2W}{\rho_{\infty} S C_{L_{max}}}} \quad (4.128)$$

ดังนั้น เพื่อให้ได้ความเร็วร่วงหล่นต่ำหรือเพื่อสามารถเพิ่มภาระกรรมบรรทุกขึ้นที่ความเร็วเดียวกัน คงเห็นจากสมการ (4.128) ว่าจำเป็นต้องพิจารณาเลือก $c_{l_{max}}$ ให้สูงในการเลือกใช้แพนอากาศ ยิ่งไปกว่านั้นความสามารถในการเข้าท่าทางการบิน (Maneuverability) ของอากาศยาน (เช่นรัศมีการเลี้ยวน้อยที่สุด หรืออัตราการเลี้ยวสูงสุด) จะขึ้นกับค่า $C_{L_{max}}$ ของอากาศยานโดยตรง

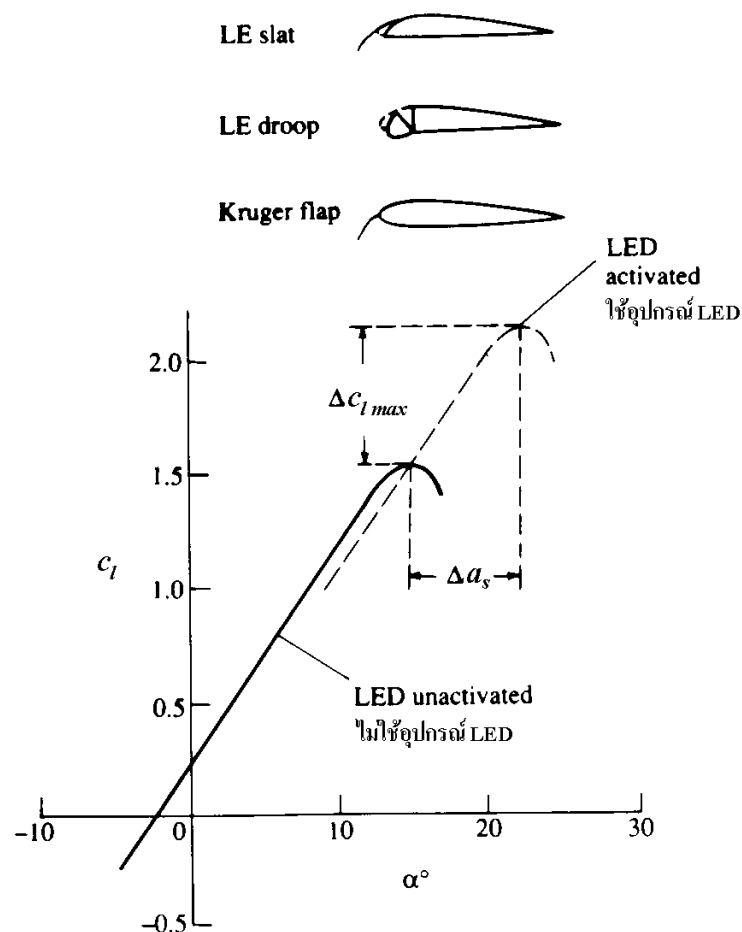
เนื่องจากที่ค่า Re ค่าหนึ่ง ค่า c_{lmax} ของแพนอากาศขึ้นอยู่กับรูปร่างของแพนอากาศนั่นเอง เมื่อเลือกใช้แพนอากาศแบบใดแล้ว ค่า c_{lmax} ก็เหมือนกับถูกกำหนดโดยธรรมชาติอย่างที่เราเห็นผ่านมาแล้ว ดังนั้นเพื่อที่จะเพิ่มค่าสัมประสิทธิ์แรงยกให้ได้สูงกว่า c_{lmax} ของแพนอากาศในสภาพปกติ จำเป็นต้องใช้วิธีพิเศษมาช่วย อย่างเช่น การใช้แฟลปชายหลัง หรือการใช้สแลต (Slat) ที่ชายหน้า เพื่อเพิ่ม c_{lmax} อุปกรณ์ในกลุ่มนี้จึงถูกเรียกตามหน้าที่ของมันว่า “อุปกรณ์เพิ่มแรงยก” (High-lift devices)

โดยปกติแฟลปที่ชายหลังแพนอากาศคือส่วนหนึ่งของแพนอากาศช่วงชายหลังที่สามารถหมุนให้มีมุมกระดกขึ้นหรือลงจากแนวเดิม อย่างที่แสดงในรูป 4.48 ก หรือในหัวข้อ 4.9 เมื่อแฟลปกระดกลง (มุม δ เป็น +) แรงยกจะเพิ่มขึ้นเป็นผลมาจากการเพิ่มความโค้งของแพนอากาศบริเวณชายหลัง ตามที่แสดงในรูป 4.48 ก เราเห็นจากหัวข้อ 4.9 แล้วว่า ค่า $\alpha_{L=0}$ จะเป็นลบมากขึ้นสำหรับแพนอากาศเมื่อกางแฟลปลง เพราะค่าความโค้งที่เพิ่มขึ้น รูปของโค้งแรงยกในรูป 4.48 ก โค้งเดิมกรณีไม่กางแฟลปจะผ่านจุดกำเนิดเพราะว่าแพนอากาศเป็นรูปสมมาตร อย่างไรก็ตามเมื่อแฟลปถูกกระดกลง โค้งแรงยกจะเลื่อนไปทางซ้าย เพราะค่า $\alpha_{L=0}$ เป็นลบมากขึ้น ในรูป 4.48 ก ผลลัพธ์สำหรับมุมกางแฟลป $\delta = +10^\circ$ นำมาแสดงเทียบกับกรณี $\delta = 0^\circ$ จะเห็นว่าที่มุมปะทะอันหนึ่งค่า c_l จะเพิ่มขึ้น Δc_l เมื่อกางแฟลปเป็นมุม 10° จากเดิมที่ไม่กางแฟลป ยิ่งกว่านั้นจะเห็นว่าค่า c_{lmax} จะเพิ่ม



รูป 4.48 ผลของการกางแฟลป ที่มีต่อเส้นกระแส (ก) ผลที่มีต่อโค้งแรงยก (ข) รูปร่างของเส้นกระแสเมื่อไม่กางแฟลป (ค) รูปร่างของเส้นกระแสที่มุมกางแฟลป $\delta = 15^\circ$

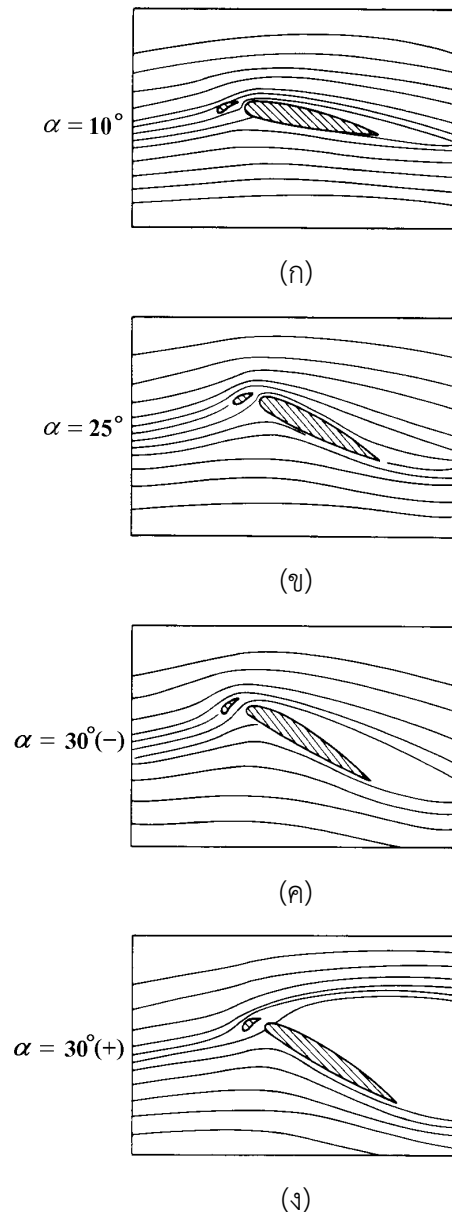
ขึ้นเช่นกันเมื่อกางแฟลป ถึงแม้ว่ามุมปะทะที่เกิด $c_{l_{max}}$ จะมีค่าลดลงเล็กน้อย รูปร่างของเส้นกระแสที่เปลี่ยนไปเมื่อกางแฟลปแสดงในรูป 4.48 ข และ ค ในรูป 4.48 ข เป็นกรณีที่มี $\alpha = 0$ และ $\delta = 0$ หรือการไหลอยู่ในลักษณะสมมาตร แต่เมื่อแฟลปถูกกางเป็นมุม 15° ในรูป 4.48 ค เส้นกระแสจะแสดงลักษณะไม่สมมาตรและมองดูเหมือนการไหลที่เกิดแรงยก เช่นที่แสดงในรูป 4.42 นั่นคือเส้นกระแสในรูป 4.48 ค จะมีแนวโน้มเลี้ยวเบนขึ้นในบริเวณชายหน้า และเลี้ยวเบนลงบริเวณชายหลัง รวมทั้งจุดชะงักที่เลื่อนลงมาตามผิวล่างของแพนอากาศ เพียงแค่กางแฟลป



รูป 4.49 ผลต่อสัมประสิทธิ์แรงยกของอุปกรณ์ที่ชายหน้า (Bertin & Cummings, 2025)

อุปกรณ์เพิ่มแรงยกยังอาจนำมาใช้บริเวณชายหน้าของแพนอากาศได้เช่นกัน ดังแสดงในรูป 4.49 ซึ่งอยู่ในรูปแบบของ “Leading-edge slat”, “Leading-edge droop” หรือ “Leading-edge flap” ลองพิจารณาเฉพาะสแลต (Slat) ซึ่งลักษณะอธิบายง่ายๆ คือ แผ่นเรียบโค้งบางนำมาใช้ที่ชายหน้าของแพนอากาศ นอกจากกระแสหลักที่ไหลผ่านแพนอากาศแล้ว จะมีกระแสรองที่ไหลผ่านช่องว่าง (Slot) ที่เกิดขึ้นระหว่าง สแลต และชายหน้าของแพนอากาศ กระแสรองที่พุ่งเข้ามาจาก

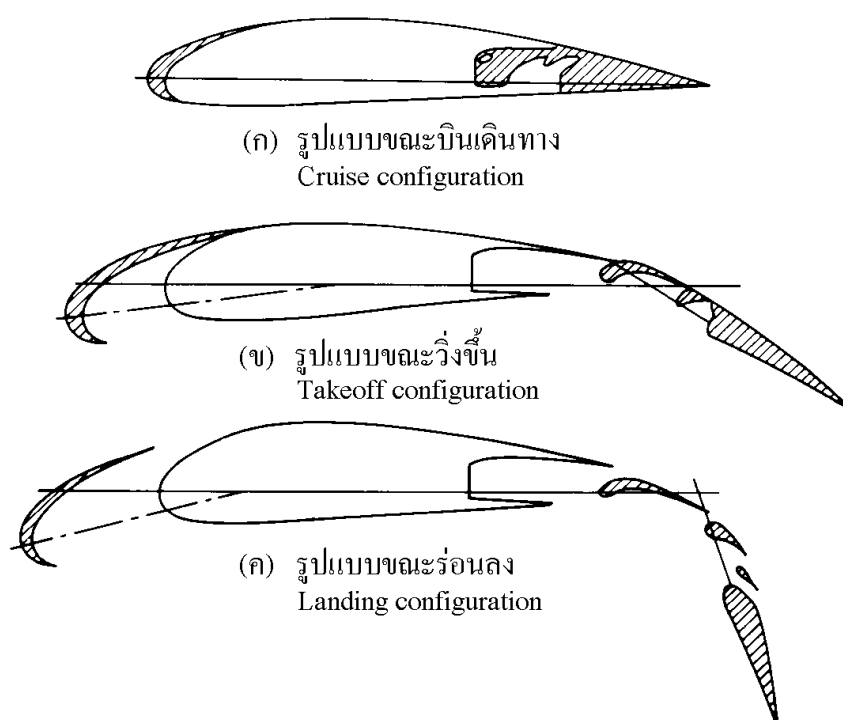
ผิวล่างของแพนอากาศขึ้นสู่ผิวบนจะเปลี่ยนการแจกแจงความดันตามผิวบนของแพนอากาศ ความดันย้อนกลับ (Adverse pressure gradient) ที่อาจเกิดขึ้นบนผิวด้านบนจะถูกกลบไล้โดยกระแสรองอันนี้ นั่นคือ



รูป 4.50 ผลของสลอตบริเวณชายหน้า (Leading-edge slot) บนเส้นกระแสนของการไหลผ่านแพนอากาศ NACA 4412 (Bertin & Cummings, 2025)

การแยกตัวจะถูกดึงให้เกิดขึ้น หรือสลอตที่ชายหน้าจะเป็นอุปกรณ์ที่เพิ่มมุม α_{stall} ที่เรียกว่า อุปกรณ์เพิ่มแรงยกที่ชายหน้า (Leading-edge device, LED) และขอให้สังเกตว่าการทำงานของสลอตที่ชายหน้าจะแตกต่างจากแฟลปที่ชายหลัง โค้งแรงยกจะยังคงอยู่ในแนวเดิมไม่มีการ

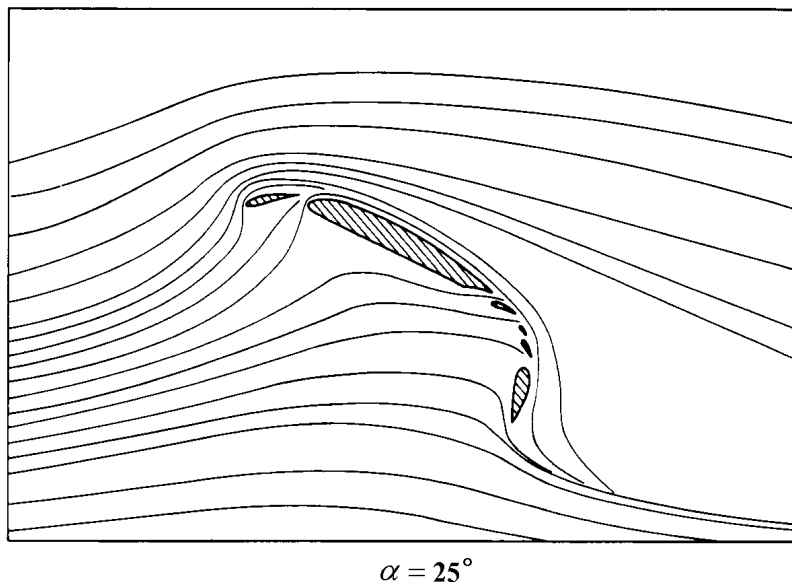
เปลี่ยนแปลงของมุม $\alpha_{L=0}$ เส้นโค้งแรงยกเพียงแต่ยืดออกไปที่มุมปะทะร่วงหล่นที่สูงขึ้น และทำให้ค่า $c_{l_{max}}$ เพิ่มขึ้น เส้นกระแสของการไหลผ่านแพนอากาศที่ใช้สแลตแสดงในรูป 4.50 แพนอากาศหลักเป็น NACA 4412 (ข้อสังเกต : การไหลในรูป 4.50 ไม่ได้เกี่ยวข้องกับโดยตรงกับกราฟในรูป 4.4 เพียงแต่พฤติกรรมจะเป็นเช่นเดียวกัน) จากรูป 4.42 NACA 4412 จะเข้าสู่อาการร่วงหล่นที่มุมปะทะประมาณ 15° แต่จะเพิ่มขึ้นถึง 30° เมื่อมีการใช้สแลต ในรูป 4.50 ก ที่มุมปะทะประมาณ 10° ให้สังเกตดูการไหลผ่านช่องว่างระหว่างสแลต และชายหน้าที่ยึดไปกับผิวบนของแพนอากาศ ในรูป 4.50 ข เมื่อมุมปะทะเพิ่มเป็น 25° การไหลยังคงไหลเรียบไปกับผิวบนของแพนอากาศ และเป็นไปอย่างนี้จนถึงมุมปะทะต่ำกว่า 30° เล็กน้อยในรูป 4.50 ค ในรูป 4.50 ง ที่มุมปะทะสูงกว่า 30° เล็กน้อย การแยกตัวเกิดขึ้นอย่างฉับพลัน และแพนอากาศเข้าสู่อาการร่วงหล่น



รูป 4.51 แพนอากาศที่มีกลไกสำหรับอุปกรณ์เพิ่มแรงยกที่ชายหน้าและชายหลังอุปกรณ์ที่ชายหลังเป็นแฟลบลายชั้น (Multi-element flap) (Bertin & Cummings, 2025)

ในอากาศยานสมัยใหม่ อุปกรณ์เพิ่มแรงยกมักจะสลับซับซ้อนโดยใช้งานร่วมกันระหว่าง สแลต และ แฟลป หรือแฟลบลายชั้นที่ชายหลัง รูป 4.51 แสดงการใช้อุปกรณ์เพิ่มแรงยกใน 3 รูปแบบ รูป 4.51 ก เป็นรูปแบบขณะบินเดินทางไม่มีการใช้อุปกรณ์ รูป 4.51 ข เป็นรูปแบบขณะวิ่งขึ้น การใช้ อุปกรณ์ที่ชายหน้าและชายหลังใช้เพียงบางส่วน และรูป 4.51 ค เป็นรูปแบบขณะร่อนลงมีการใช้อุปกรณ์ทุกส่วนเต็มรูปแบบ (Fully extended) สังเกตว่าสำหรับแบบ ค จะมีช่องว่างระหว่างสแลต และชายหน้า และช่องว่างระหว่างแต่ละส่วนย่อยของแฟลบลายชั้น รูปแบบของเส้นกระแสผ่าน

แผนอากาศลักษณะดังกล่าวแสดงในรูป 4.52 ในรูปอุปกรณ์ที่ขายหน้าและขายหลังถูกใช้เต็มรูปแบบที่มุมปะทะ 25° ถึงแม้ว่ากระแสของการไหลหลักผ่านผิวบนของแผนอากาศจะแยกตัวออกจากผิวไปแล้ว แต่กระแสรองที่ผ่านช่องว่างระหว่างส่วนย่อยต่างๆ ยังคงเกาะติดกับผิวบนของแฟลปย่อยทุกส่วน การไหลย่อยที่ยังคงเกาะติดผิวแผนอากาศอยู่นี้เองที่ช่วยให้สัมประสิทธิ์แรงยกมีค่าสูงอยู่ได้ในลำดับถึง 4.5



รูป 4.52 ผลของอุปกรณ์ที่ขายหน้าและขายหลังแบบหลายชั้นกับเส้นกระแสของการไหลผ่านแผนอากาศที่มุมปะทะ 25° (Bertin & Cummings, 2025)

เราสรุปตรงนี้ว่าสำหรับการไหลผ่านแผนอากาศในความเป็นจริงที่มุมปะทะสูงจะถูกกำหนดโดยการแยกตัวของกระแส ซึ่งเป็นการปรากฏการณ์ที่เราไม่ได้รวมไว้ในทฤษฎีการไหลไร้ความหนืดในบทนี้ แต่ที่มุมปะทะต่ำๆ อย่างเช่นที่อยู่ในขณะบินเดินทางของอากาศยาน ทฤษฎีของเราใช้งานได้ดีในการทำนายแรงยก และโมเมนต์บนแผนอากาศ นอกจากนั้นเรายังพบความสำคัญของความหนาของแผนอากาศที่มีต่อมุมปะทะที่การแยกตัวจะเกิดขึ้น และมีผลต่อค่า $c_{l_{max}}$ ซึ่งเป็นคุณลักษณะสำคัญของแผนอากาศ

แบบฝึกหัดบทที่ 4

1. ใช้ข้อมูลในรูป 4.5 ของแผนอากาศ NACA 2412 คำนวณแรงยกและโมเมนต์รอบ $\frac{1}{4}$ คอร์ด (ต่อหน่วยความยาวปีก) ที่มุมปะทะ 4° เมื่อ $V_\infty = 50$ ft/s ความยาวคอร์ด 2 ft ที่บรรยากาศมาตรฐาน
2. ใช้ข้อมูลชุดเดียวกับข้อ 1 สำหรับ NACA 2412 ที่มีความยาวคอร์ด 2 m ความเร็วกระแสอิสระ 50 m/s ที่บรรยากาศมาตรฐาน ถ้าแรงยกต่อหน่วยความยาวเป็น 1353 N. จงหามุมปะทะ
3. พิจารณาแผนอากาศสมมาตรบางที่มุมปะทะ 1.5° ให้ใช้ทฤษฎีแผนอากาศบางประมาณค่าสัมประสิทธิ์แรงยกและสัมประสิทธิ์โมเมนต์ที่ชายหน้า
4. แผนอากาศ NACA 4412 มีสมการเส้น Camber line เป็น

$$\begin{aligned}\frac{\bar{y}}{c} &= 0.25 \left[0.8 \frac{x}{c} - \left(\frac{x}{c} \right)^2 \right] & \text{สำหรับ } 0 \leq \frac{x}{c} \leq 0.4 \\ &= 0.11 \left[0.2 + 0.8 \frac{x}{c} - \left(\frac{x}{c} \right)^2 \right] & \text{สำหรับ } 0.4 \leq \frac{x}{c} \leq 1\end{aligned}$$

จงคำนวณ (ก) $\alpha_{L=0}$ และ (ข) c_l ที่ $\alpha = 3^\circ$

5. จงใช้แผนอากาศในข้อ 4 คำนวณ $c_{mc/4}$ และ $x_{c.p.}$ ที่ $\alpha = 3^\circ$
6. จงเปรียบเทียบผลการคำนวณในข้อ 4 และ 5 กับข้อมูลผลการทดลองของ NACA 4412 และให้หาความคลาดเคลื่อนเป็น % (ใช้ข้อมูลจาก “Theory of wing section”)
7. ในการออกแบบแผนอากาศ NACA 1-XX เส้น Camber line ถูกออกแบบให้กำเนิดภาระกรรมตามแนวคอร์ดคงที่โดยใช้ทฤษฎีแผนอากาศบาง นั่นคือ

$$c_p(x, 0^+) - c_p(x, 0^-) = \text{const}$$

จงหาสมการของเส้น Mean line $\bar{y}$ สำหรับกรณีนี้

8. เครื่องร่อนมีปีกยาวมาก จนสมมติให้การไหลผ่านปีกใกล้เคียงกับแผนอากาศ ถ้าอัตราส่วน L/D ของเครื่องร่อน = 30 เครื่องร่อนมีพื้นที่ปีก 10 m^2 และมีน้ำหนัก 3150 N จงคำนวณ C_D เมื่อเครื่องร่อนอยู่ในการบินระดับคงที่ ที่ความเร็ว 170 km/hr ที่ระยะสูง 1 km
9. จงคำนวณหาตำแหน่งตามทฤษฎีของจุดศูนย์อากาศพลศาสตร์ (aerodynamic center) และโมเมนต์รอบจุดศูนย์อากาศพลศาสตร์ของแผนอากาศบางที่มีความโค้ง เมื่อค่าสัมประสิทธิ์แรงยก c_l และสัมประสิทธิ์โมเมนต์รอบชายหน้า $c_{m_{LE}}$ ที่คำนวณได้จากทฤษฎีแผนอากาศบางเป็น

$$c_l = \pi(2A_0 + A_1) \quad \text{และ} \quad c_{m_{LE}} = -\frac{\pi}{2} \left(A_0 + A_1 - \frac{A_2}{2} \right)$$

$$\text{เมื่อค่าคงที่ } A_0 = \alpha - \frac{1}{\pi} \int_0^\pi s(\theta) d\theta; \quad A_1, A_2 \text{ มีค่า } A_n = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi s(\theta) \cos n\theta d\theta$$

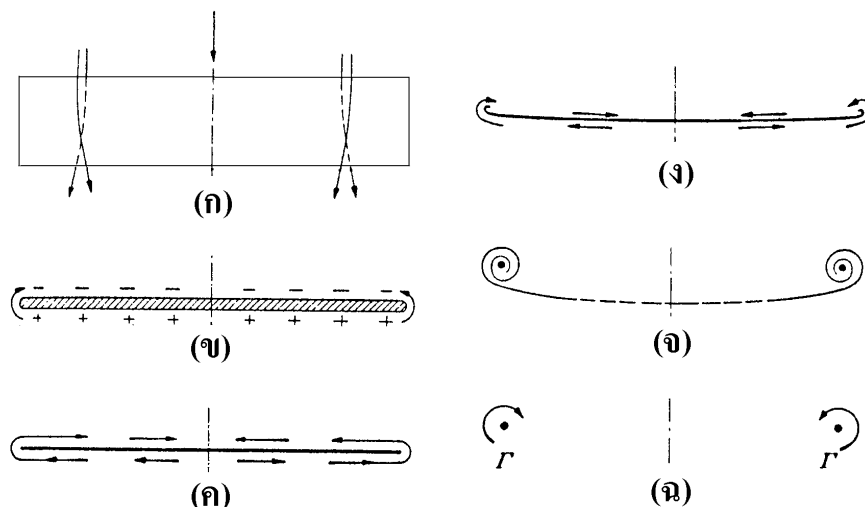
บทที่ 5

การไหลไร้การอัดตัวผ่านปีกยาวจำกัด

5.1 ความนำ

ในบทที่ 4 คุณสมบัติของแผนอากาศได้รับการพิจารณาทางทฤษฎีโดยพิจารณาการไหลที่เป็น 2 มิติ หรือ กล่าวได้ว่ามองการไหลผ่านปีกที่มีความยาวไม่จำกัด (Infinite span) และมีหน้าตัดแผนอากาศคงที่ จริงๆ แล้วข้อมูลทางอากาศพลศาสตร์ของแผนอากาศในหลายแห่งมักจะเรียกว่าเป็นข้อมูลของปีกยาวไม่จำกัด (Infinite wing) แต่ในความเป็นจริงปีกของอากาศยานจะเป็นปีกที่มีปลายปีกหรือความยาวจำกัดซึ่งแตกต่างจากแผนอากาศสองมิติในแง่ที่การไหลบริเวณปลายปีกจะทำให้เกิดส่วนของความเร็วที่มีทิศทางตามแนวกางปีกเพิ่มขึ้น ทำให้ลักษณะการไหลผ่านปีกยาวจำกัดมีลักษณะเป็นสามมิติ ในบทนี้เรานำเอาข้อมูลที่ได้จากบทที่ 4 มาใช้วิเคราะห์การไหลแบบสามมิติผ่านปีกยาวจำกัด

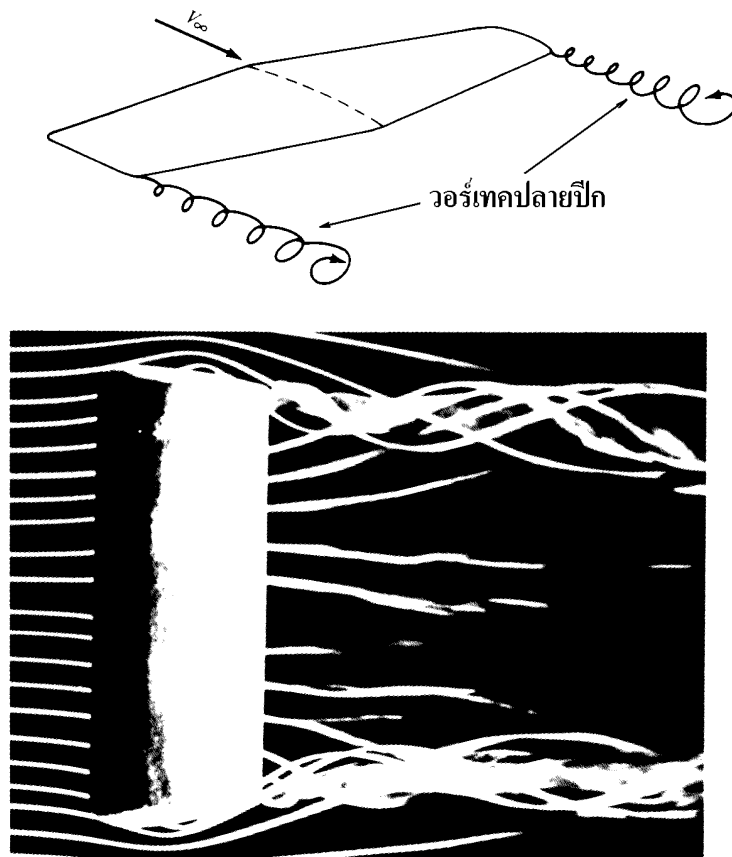
เนื่องจากหน้าตัดขวางของปีกใดๆ จะต้องเป็นรูปแผนอากาศเสมอ ในขั้นแรกเราอาจจะคาดคะเนว่าปีกน่าจะมีคุณลักษณะทางอากาศพลศาสตร์เช่นเดียวกันกับแผนอากาศ แต่อย่างที่กล่าวมาแล้วว่าลักษณะทางอากาศพลศาสตร์ของปีกจะแตกต่างไปจากของแผนอากาศเนื่องจากการไหลที่ปลายปีก ถ้าเราจะสังเกตดูให้ชัดเจนจากรูป 5.1 ซึ่งแสดงการไหลของกระแสอากาศผ่านปีกยาวจำกัด เมื่อมองจากด้านบนและด้านหน้า จะพบว่ากลไกของการเกิดแรงยกบนปีก เป็นผลโดยตรงที่เกิดจาก



รูป 5.1 เส้นกระแสผ่านปีกยาวจำกัด และพัฒนาการของวอร์เทกซิสระดัณหลังของปีก (Anderson, 2016)

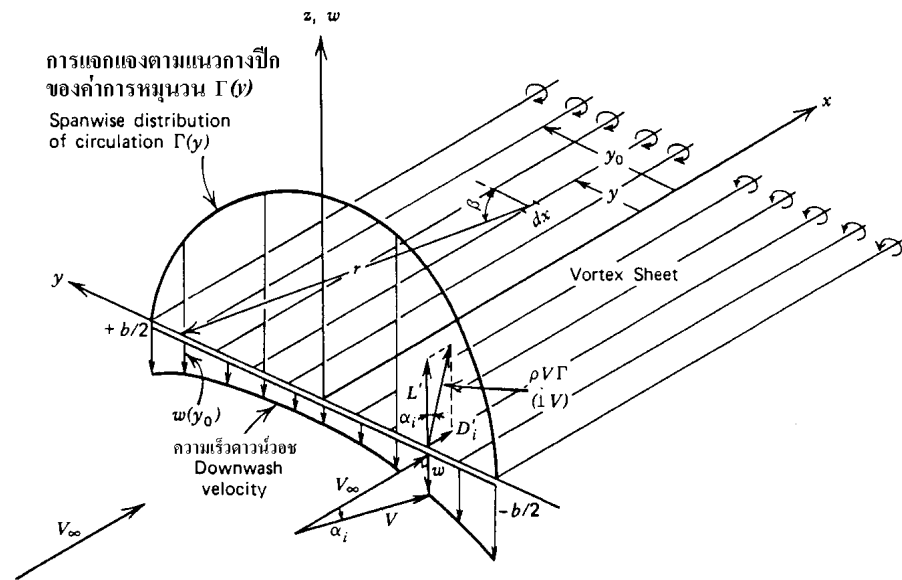
ความแตกต่างของความดันระหว่างผิวบนและผิวล่างของปีก แรงยกเกิดจากการที่ความดันที่กดอยู่ตามผิวด้านล่างของปีกมีค่าสูงกว่าความดันที่กดอยู่ตามผิวด้านบนของปีก ตามที่แสดงให้เห็นในรูป 5.1 ข ผลที่ตามมาคือ ความดันที่ต่างกันพยายามจะส่งอากาศที่มีความดันสูงกว่าด้านใต้ปีกให้ไหลอ้อมปลายปีกไปสู่บริเวณที่มีความดันต่ำกว่าด้านบนของปีก การไหลอ้อมปลายปีกแสดงให้เห็นในรูป 5.1 ค ทำให้เกิดส่วนของความเร็วของกระแสอากาศที่อยู่ในทิศทางตามแนวแกนปีก โดยที่ด้านบนของปีกกระแสจะไหลจากปลายปีกไปโคนปีก เมื่อมองจากด้านบนจะเห็นแนวของเส้นกระแสมีทิศทางเบนเข้าหาโคนปีกจากปลายปีกทั้งสองด้าน ทิศทางที่เบนเข้าจะมากบริเวณปลายปีก และค่อยลดลงจนหมดไปที่ระนาบสมมาตรของปีก ทำนองเดียวกัน ด้านใต้ปีกจะมีส่วนความเร็วที่พยายามไหลจากโคนปีกไปยังปลายปีก ทำให้กระแสที่ไหลผ่านผิวล่างของปีกมีทิศทางเบนออกจากโคนปีกไปยังปลายปีกทั้งสองด้าน โดยจะเบนออกไปมากบริเวณปลายปีก และจะลดลงจนเป็นแนวตรงที่โคนปีก จะเห็นได้ว่าผลจากการไหลที่ปลายปีก ทำให้การไหลผ่านปีกยาวจำกัดมีลักษณะเป็นการไหล 3 มิติ และดังนั้นก็เป็นที่คาดได้ว่าลักษณะทางอากาศพลศาสตร์ของปีกย่อมแตกต่างจากการไหล 2 มิติผ่านรูปแผนอากาศ

แนวโน้มที่กระแสน้ำไหลอ้อมปลายปีกจากด้านล่างสู่ด้านบน ยังมีผลกระทบที่สำคัญอีกอย่างหนึ่งต่อลักษณะทางอากาศพลศาสตร์ของปีก นั่นคือ กระแสที่ผ่านปีกจะมีการเคลื่อนที่หมุนวนไปขณะที่เคลื่อนไปด้านหลังห่างจากปีกตามที่แสดงในรูป 5.1 ง จ และ ฉ และเมื่อพ้นจากชายหลังของปีกมากระแสน้ำจากผิวบนและผิวล่างของปีกที่มาบรรจบกันจะมีทิศทางของความเร็วตามแนวแกนปีกสวนกัน ความเร็วที่แตกต่างกันนี้จะมีค่ามากขึ้นอยู่กับตำแหน่งตามแนวแกนปีก ในลักษณะนี้กระแสที่มาบรรจบกันจะฟอร์มตัวเป็นแนวที่เรียกว่า “พื้นผิวที่ขาดความต่อเนื่อง” (Surface of discontinuity) หรือเมื่อมองจากชายหลังของปีกเข้าไป คือ แผ่นวอร์เทกซ์ (Vortex sheet) ที่มีการแจกแจงของวอร์เทกซ์ที่เรียงกันแน่นจากปลายปีกข้างหนึ่งไปยังปลายปีกอีกข้างหนึ่ง โดยที่ความหนาแน่นหรือกำลังของวอร์เทกซ์จะมีค่าสูงสุดที่ปลายปีกทั้ง 2 ข้างและเป็นศูนย์ที่แนวกลางของปีก แผ่นวอร์เทกซ์ที่ทิ้งมาจากชายหลังของปีกมีแนวโน้มที่จะม้วนเข้าหาปลายปีกหลังจากเคลื่อนที่ห่างจากชายหลังปีกมาระยะหนึ่ง และรวมกันเป็นวอร์เทกซ์ขนาดใหญ่ที่ปลายปีกทั้ง 2 ด้าน ทิ้งไปด้านหลังของปีกซึ่งเรียกว่า “วอร์เทกซ์ที่ทิ้งเป็นรอย”(Trailing vortex) หรือ “วอร์เทกซ์ที่ปลายปีก”(Tip vortex) วอร์เทกซ์ที่ปลายปีกที่ทิ้งไปด้านหลังของปีกนี้จะเหนี่ยวนำให้เกิดส่วนของความเร็วของกระแสอากาศที่บริเวณปีกที่มีทิศทางพุ่งลงด้านล่างที่เรียกว่า “ดาวนวอช” (Downwash) ตลอดแนวแกนปีก จากรูป 5.1 ฉ และรูป 5.2 จะเห็นว่าวอร์เทกซ์ที่ปลายปีกทั้งสองพยายามจะลากอากาศที่อยู่รอบตัวให้หมุนไปรอบแกนวอร์เทกซ์ของตัวเอง ความเคลื่อนไหวที่เกิดขึ้นทำให้กระแสอากาศในบริเวณของปีกเหมือนกับมีส่วนความเร็วที่พุ่งลงด้านล่างหรือเกิด “ดาวนวอช” (ใช้สัญลักษณ์ w) ซึ่งเมื่อรวมกับทิศทางของความเร็วกระแสน้ำที่พุ่งเข้าหาปีก ทำให้เหมือนกับว่าทิศทางของความเร็วที่ผ่านแต่ละหน้าตัดของปีกมีทิศทางมุดลงเล็กน้อยจากแนวเดิมอย่างที่แสดงในรูป 5.3



รูป 5.2 วอร์เทคปลายปีก และวอร์เทคปลายปีกของปีกสี่เหลี่ยมสร้างภาพให้เห็นโดยใช้
เส้นควัน (Smoke filaments) จากการทดลองในอุโมงค์ควัน (Anderson, 2016)

รูป 5.4 แสดงรายละเอียดเมื่อมองจากด้านข้างของปีกที่หน้าตัดใดๆ ตามแนวทางปีก มุมระหว่าง
แนวคอร์ดและกระแสอิสระ V_∞ คือมุมปะทะ α ตามอย่างที่กำหนดในบทที่ 1 และบทที่ 4 สำหรับ
แผนอากาศ แต่ในบทนี้เราจะกำหนดให้จำเพาะลงไปอีกโดยเรียกมุม α เป็นมุมปะทะทางเรขาคณิต
(Geometric angle of attack) จะเห็นว่าในขณะที่ไหลผ่านปีก กระแสอิสระถูกเหนี่ยวนำ (จากวอร์เทค
ด้านหลังปีก) ให้มีทิศทางมุดลงจากแนวเดิมเล็กน้อยตลอดแนวทางปีกเป็นมุม α_i เรียกว่า “มุมปะทะ
เหนี่ยวนำ” (Induced angle of attack) ผลที่เกิดขึ้นจากดาว์นวอชที่ทำให้มุมปะทะของกระแส
อิสระกับปีกมีทิศทางเบนลงจากแนวเดิมนี้นำให้เกิดผลกระทบบนหน้าตัดแผนอากาศของปีกที่สำคัญ
ยิ่งสองประการคือ



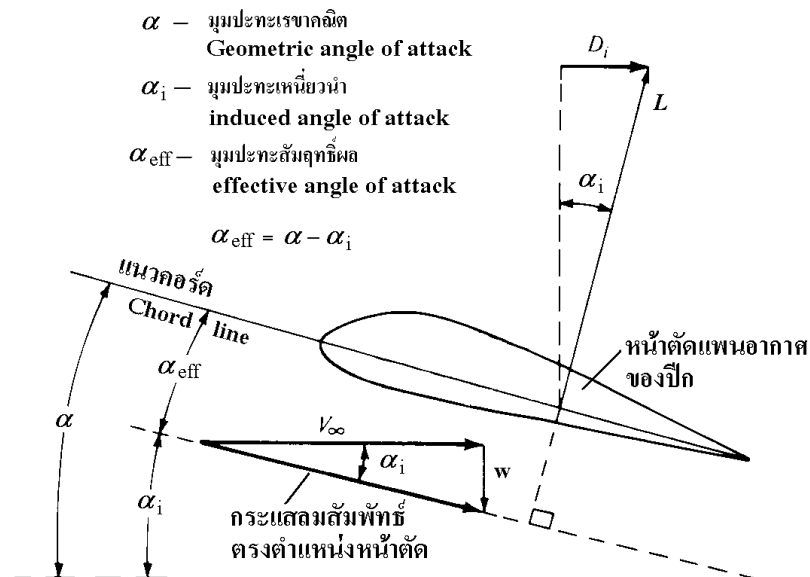
รูป 5.3 ความเร็วดาวนวช (Downwash velocity), w และการเกิดแรงยกบนปีก (Anderson, 2016)

1. มุมปะทะจริงที่รับรู้ได้ของหน้าตัดแพนอากาศของปีก ณ ตำแหน่งใดๆ ตามแนวปีกจะเป็นมุมระหว่างแนวคอร์ดกับกระแสลมสัมพัทธ์ (Relative Wind, RW) ณ ตำแหน่งนั้น ซึ่งคือมุม α_{eff} หรือมุมปะทะสัมฤทธิ์ผล (Effective angle of attack) ในรูป 5.4 ดังนั้น แม้ว่าปีกจะอยู่ในตำแหน่งที่มีมุมปะทะทางเรขาคณิตเป็น α แต่หน้าตัดแพนอากาศแต่ละตำแหน่งจะมองเห็นมุมปะทะที่น้อยกว่าเสมอ คือ มุม α_{eff} จากรูป 5.4 จะได้ความสัมพันธ์

$$\alpha_{\text{eff}} = \alpha - \alpha_i \quad (5.1)$$

2. แรงยกต่อหน่วยความยาวปีกบนหน้าตัดแพนอากาศแต่ละตำแหน่งจะอยู่ในทิศทางตั้งฉากกับกระแสลมสัมพัทธ์ (RW) ซึ่งมุดลงเล็กน้อยจากแนวเดิม และทำให้แรงยกเสมือนกับเอนไปด้านหลังจากแนวตั้งด้วยมุม α_i ตามที่แสดงในรูป 5.4 ผลที่ตามมาคือส่วนหนึ่งของแรงยกจะอยู่ในทิศทางของกระแสอิสระ V_∞ นั่นคือจะมีแรงต้านเกิดขึ้นจากแรงยกหรือเกิดจากการที่มีดาวนวชเกิดขึ้น แรงต้านส่วนนี้ไม่เกี่ยวข้องกับแรงเสียดทานที่ผิวหรือ แรงต้านจากความดันและถูกเรียกว่า “แรงต้านเหนี่ยวนำ” (Induced drag) ใช้สัญลักษณ์ D_i ในรูป 5.4

ดังนั้นผลที่เกิดจากดาวนวชของปีกยาวจำกัด คือ การที่มุมปะทะของกระแสลมบนแต่ละหน้าตัดตลอดแนวปีกมีค่าลดลง และทำให้เกิดส่วนของแรงต้านที่เรียกแรงต้านเหนี่ยวนำ D_i ขอให้ระลึกว่าเรายังคงพิจารณาการไหลไร้ความหนืดไร้การอัดตัวอยู่ และไม่ได้เกี่ยวข้องกับแรงเสียดทานที่ผิวหรือการแยกตัวจากผิว แรงต้านทั้งหมดที่เกิดขึ้นตอนนี้เป็นผลมาจากปลายปีกของปีกยาวจำกัดเท่านั้นเอง



รูป 5.4 ผลกระทบของดาวน์วอชที่เกิดกับกระแสอิสระบริเวณหน้าตัดใดๆ ของปีก
 (Anderson, 2016)

นอกจากพิจารณาแนวแรงยกที่เอนไปด้านหลังซึ่งทำให้เกิดแรงต้านตามรูป 5.4 แล้ว อาจมองลักษณะของการเกิดแรงต้านเหนี่ยวนำทางกายภาพได้อีก 2 ทางคือ

1. ลักษณะการไหลที่เป็นสามมิติ เนื่องจากการไหลที่ปลายปีกตามรูป 5.2 และ 5.3 ทำให้เกิดการเปลี่ยนแปลงขึ้นกับการแจกแจงความดันบนปีกในรูปแบบที่ทำให้เกิดการไม่สมดุลย์ของความดันในทิศทางของ V_∞ (ซึ่งไม่เกิดในการไหล 2 มิติ) นั่นคือ แรงต้านถูกทำให้เกิดขึ้น การพิจารณาในแนวนี้แรงต้านเหนี่ยวนำถือเป็นส่วนหนึ่งของแรงต้านเนื่องจากความดัน
2. วอร์เทคที่ปลายปีก บรรลุได้ด้วยอนุภาคที่มีพลังงานจลน์ของการเคลื่อนที่ในแนวตรงและการหมุนที่มีค่าสูง พลังงานจำนวนนี้ต้องมาจากที่ใดที่หนึ่งซึ่งจริงๆ แล้วก็คือมาจากเครื่องยนต์ที่ใช้ขับเคลื่อนอากาศยานไปข้างหน้านั่นเอง เพราะว่าพลังงานที่บรรจุในวอร์เทคไม่ได้นำไปใช้ประโยชน์ในแง่ใดๆ ของการบินจึงถือได้ว่าส่วนนี้ของพลังงานถือเป็นพลังงานที่สูญเสีย ในแง่ประสิทธิภาพพลังงานส่วนเกินจากเครื่องยนต์ที่สูญเสียไปในการทำให้เกิดวอร์เทคที่ปลายปีก คือ พลังงานที่ต้องใช้จากเครื่องยนต์เพื่อเอาชนะแรงต้านเหนี่ยวนำ

เห็นได้ชัดจากข้อความที่ผ่านมาว่าคุณลักษณะทางอากาศพลศาสตร์ของปีกยาวจำกัดไม่ได้เป็นอย่างเดียวกันกับคุณลักษณะของแพนอากาศ ดังนั้นเราจะพยายามพัฒนาทฤษฎีที่จะใช้อธิบายการกำเนิดแรงยกบนปีกยาวจำกัดและอธิบายคุณสมบัติทางอากาศพลศาสตร์ของปีกยาวจำกัดในบทนี้

ในหัวข้อต่อไป ขอให้สังเกตการเปลี่ยนแปลงการใช้สัญลักษณ์ที่ต่างจากในบทที่ผ่านมา สำหรับการไหลสองมิติ แรงยก แรงต้านและโมเมนต์ต่อหน่วยความยาว กำหนดด้วยสัญลักษณ์ L' , D' และ M' และสัมประสิทธิ์ที่ควบคู่กันจะใช้สัญลักษณ์ที่เป็นตัวอักษรตัวเล็ก c_l , c_d และ c_m ต่างจากแรงยก แรงต้านและโมเมนต์ที่เกิดขึ้นบนวัตถุ 3 มิติ เช่นปีกยาวจำกัดซึ่งใช้สัญลักษณ์ที่ไม่มี “'” คือ L , D และ M และใช้อักษรตัวใหญ่สำหรับสัมประสิทธิ์ของแรงและโมเมนต์คือ C_L , C_D และ C_M ดังได้เคยกล่าวไว้ครั้งหนึ่งแล้วในหัวข้อ 1.5

ก่อนจบจากหัวข้อนี้ จะขอให้สังเกตถึงความจริงที่ว่าสำหรับปีกในย่านความเร็วต่ำกว่าเสียง แรงต้านที่เกิดขึ้นจะเป็นผลรวมของแรงต้านเหนี่ยวนำ D_i กับแรงต้านจากแรงเสียดทานผิว D_f และแรงต้านเนื่องจากความดัน D_p จากการแยกตัวของชั้นขีตผิว แรงต้านสองตัวหลังเป็นผลมาจากความหนืดซึ่งจะได้กล่าวถึงในบทหลัง ผลรวมของแรงต้านที่เกิดจากความหนืดรวมเรียกว่า “แรงต้านของรูปหน้าตัด”(Profile drag) ตัวอย่างในบทที่ 4 แสดงให้เห็นแรงต้านของแพนอากาศ NACA 2412 ที่ได้จากการทดลอง โดยทั่วไปที่มุมปะทะไม่สูงมากนักจะพบว่าสัมประสิทธิ์แรงต้านของรูปหน้าตัด (Profile drag coefficient), c_d ของแพนอากาศจะมีค่าใกล้เคียงกับของหน้าตัดของปีกที่ใช้รูปร่างแพนอากาศอันเดียวกัน ดังนั้นถ้ากำหนดให้สัมประสิทธิ์แรงต้านของรูปหน้าตัด เป็น

$$c_d = \frac{D_f + D_p}{q_\infty S} \quad (5.2)$$

และสัมประสิทธิ์แรงต้านเหนี่ยวนำ เป็น

$$C_{D,i} = \frac{D_i}{q_\infty S} \quad (5.3)$$

สัมประสิทธิ์ของแรงต้านของปีก C_D จะเป็น

$$C_D = c_d + C_{D,i} \quad (5.4)$$

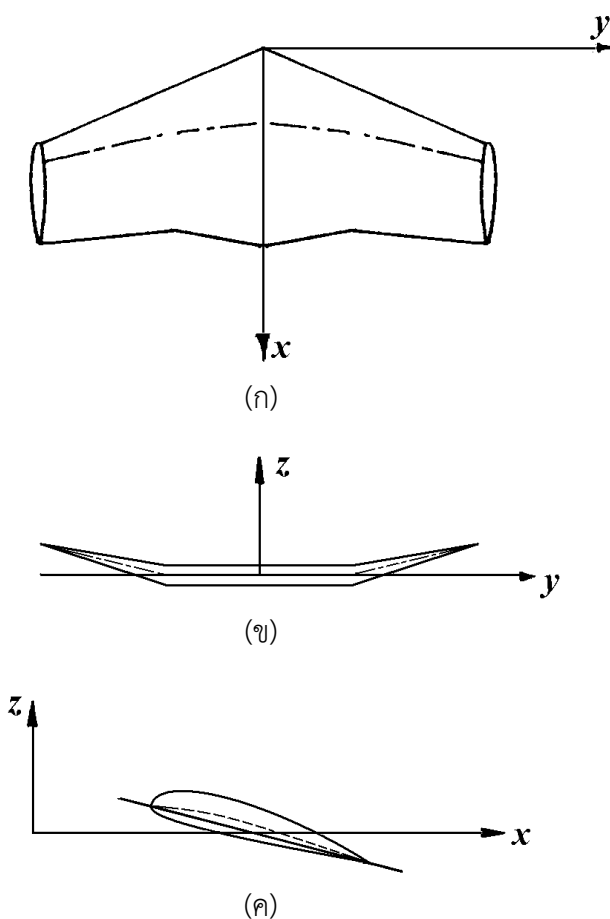
ในสมการ (5.4) ค่าของ c_d จะได้จากข้อมูลของแพนอากาศอย่างที่เราแสดงเป็นตัวอย่างในรูป 4.6 ค่า $C_{D,i}$ จะแสดงให้เห็นต่อไปว่าขึ้นอยู่กับรูปร่างลักษณะของปีก และอาจคำนวณได้โดยใช้ทฤษฎีปีกยาวจำกัด

5.2 รูปร่างของปีก (Wing Geometry)

ตามที่กล่าวแล้วว่า $C_{D,i}$ จะขึ้นอยู่กับรูปร่างลักษณะของปีก และวัตถุประสงค์อันหนึ่งของเราสำหรับบทนี้ คือ การอธิบายที่มาของค่า $C_{D,i}$ และการเปลี่ยนแปลงของมันจากการออกแบบปีกลักษณะต่างๆ ดังนั้นจึงควรกำหนดรูปร่างของปีกโดยนิยามที่จะทำให้เข้าใจตรงกัน ดังต่อไปนี้

เมื่อมองจากมุมต่างๆ จะเห็นรูปร่างของปีกกำหนดได้จาก รูประนาบ (Planform) ของปีกเมื่อมองจากด้านบน มุมยกปีก (Dihedral) หรือรูปตัว V ของปีกเมื่อมองจากด้านหน้า และรูปหน้าตัด

ด้านข้างของปีก ตามที่แสดงในรูป 5.5 ก ข และ ค แกนพิกัดในรูปใช้เพื่อความสะดวกในการอธิบายรูปร่างของปีกโดยใช้แกนตามแนวลำตัว (Longitudinal axis) แกนตามขวาง (Lateral axis) และแกนตั้งฉาก (Normal axis) x, y, z , ตามลำดับ



รูป 5.5 รูปร่างของปีกเมื่อมองจากมุมต่างๆ (ก) จากด้านบน (ข) จากด้านหน้า (ค) จากด้านข้าง (Anderson, 2016)

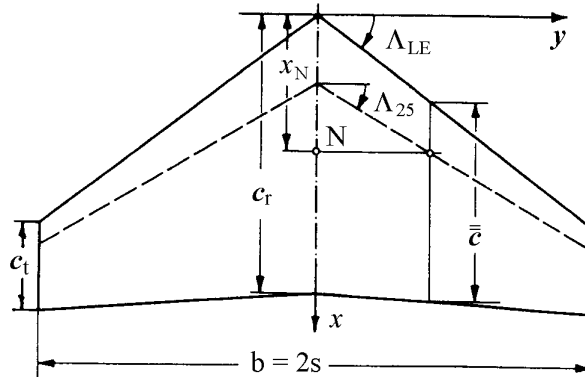
รูปร่างของปีกนอกจากมีผลต่อคุณลักษณะทางอากาศพลศาสตร์โดยตรงแล้ว ยังมีผลรวมไปถึงการสร้างเสถียรภาพในทิศทางต่างๆ และอาจรวมถึงสมรรถนะทางด้านอื่นเมื่อพิจารณาพร้อมกับอากาศยานทั้งลำด้วย ตัวแปรที่กำหนดรูปร่างของปีกที่สำคัญ ได้แก่

5.2.1 รูประนาบปีก (Plan form)

รูประนาบปีกคือรูปร่างของปีกเมื่อมองจากด้านบนหรือล่าง รูป 5.6 แสดงรายละเอียดและสัญลักษณ์ของตัวแปรต่าง ๆ ที่ใช้กำหนดรูปร่างของระนาบปีก ดังต่อไปนี้

5.2.1.1 ระยะกางปีก (Wing span) ระยะกางปีกคือระยะ b ในรูป 5.6 วัดจากปลาย

ปีกข้างหนึ่งไปยังอีกข้างหนึ่ง ระยะ
ครึ่งหนึ่งของระยะกางปีกแทนด้วย
สัญลักษณ์ s



รูป 5.6 รูประนาบปีก (Anderson, 2016)

N ตำแหน่ง A.C. ของปีก

$\bar{c}$ ความยาวคอร์ดอ้างอิง

c_t ความยาวคอร์ดปลายปีก

c_r ความยาวคอร์ดโคนปีก

λ ความเรียวปีก (Taper ratio)

AR อัตราเรียวปีก (Aspect ratio)

A พื้นที่ปีก (Wing area)

b ระยะกางปีก (Wing span)

Λ มุมลู่อหลัง (Sweepback angle)

5.2.1.2 คอร์ด (Chord) ระยะ c_r และ c_t ในรูปคือความยาวคอร์ดของปีกที่โคนและ

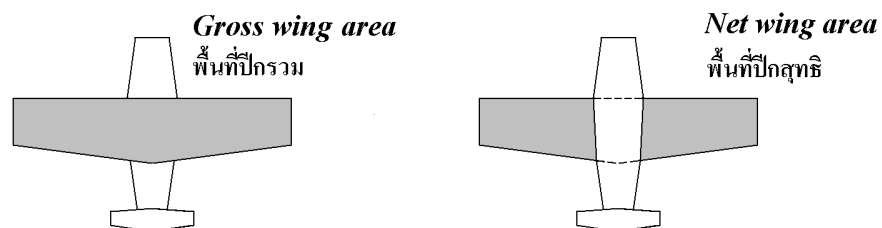
ปลายตามลำดับ สัดส่วนระหว่าง c_t/c_r จะเป็นสัดส่วนที่เรียกอัตราสอบปีก(taper ratio) λ
(หรือบางครั้งใช้ส่วนกลับของ λ ก็ได้เช่นกัน) ปีกทั่วไปจะมีค่า taper $c_t/c_r \leq 1$ เสมอ

5.2.1.3 พื้นที่ปีก (Wing area) พื้นที่ของระนาบปีกจะรวมถึงพื้นที่ของปีก ส่วนที่ถูก

บังด้วยลำตัวของอากาศยานไว้ด้วยเรียกพื้นที่ปีกรวม (Gross wing area) โดยทั่วไปเมื่ออ้างถึงพื้นที่
ปีกจะหมายถึงพื้นที่อันนี้เสมอ ยกเว้นเมื่อมีการจำเพาะเจาะจง สำหรับพื้นที่ปีกที่ไม่นับรวมส่วนที่บัง
ด้วยลำตัวอากาศยานเรียกพื้นที่ปีกสุทธิ (Net wing area) ใช้เครื่องหมาย A_N รูป 5.7 แสดงความ
แตกต่างระหว่างพื้นที่ทั้ง 2 แบบ

พื้นที่ปีกสำหรับปีกที่มีรูประนาบใดๆ คำนวณได้จากการอินทิเกรต

$$A = \int_{-s}^s c(y) dy \quad (5.5)$$



รูป 5.7 พื้นที่ปีก (Anderson, 2016)

5.2.1.4 คอร์ดเฉลี่ย (Mean chord) ความยาวคอร์ดเฉลี่ยเป็นตัวแปรสำคัญของปีก โดยเฉพาะปีกที่มีความยาวคอร์ดเปลี่ยนแปลงตามแนวแกนปีก การคิดความยาวคอร์ดเฉลี่ยทำได้สองแบบคือ ความยาวคอร์ดเฉลี่ยมาตรฐาน (Standard mean chord) หรือความยาวคอร์ดเฉลี่ยเรขาคณิต (Geometric mean chord) ใช้เครื่องหมาย $\bar{c}$ ซึ่งคำนวณจาก

$$\bar{c} = \frac{A}{b} \quad (5.6)$$

สมการ (5.6) อาจเขียนในรูปอินทิเกรตได้เป็น

$$\bar{c} = \frac{\int_{-s}^s c(y) dy}{\int_{-s}^s dy} \quad (5.7)$$

จากสมการ (5.6) และ (5.7) จะเห็นว่าความยาวคอร์ดเฉลี่ยของปีกคิดจากพื้นที่ปีกหารด้วยระยะกางปีก ซึ่งเป็นค่าเฉลี่ยทางเรขาคณิตที่คุ้นเคย แต่การคิดคอร์ดเฉลี่ยในแบบนี้จะมีปัญหาเมื่อต้องการคำนวณสัมประสิทธิ์โมเมนต์ก้มเงยของปีก จึงมีการคิดความยาวคอร์ดเฉลี่ยอีกแบบหนึ่งซึ่งมีความจำเพาะเจาะจงกว่า คือ ความยาวคอร์ดเฉลี่ยอากาศพลศาสตร์ (Mean aerodynamics chord) ใช้สัญลักษณ์ $\bar{c}$ หรือ c_{MAC} ซึ่งกำหนดโดย

$$c_{MAC} = \frac{\int_{-s}^s c^2(y) dy}{\int_{-s}^s c(y) dy} \quad (5.8)$$

สำหรับปีกสี่เหลี่ยมผืนผ้าความยาวคอร์ดเฉลี่ยจะเท่ากับความยาวคอร์ดอากาศพลศาสตร์และเท่ากับความยาวคอร์ดของปีก จากสมการ (5.8) $\int_{-s}^s c(y) dy$ คือพื้นที่ปีก ดังนั้นสำหรับปีกทั่วไปที่มีอัตราสอบ (Taper) อาจแสดงให้เห็นได้ว่าตำแหน่งของปีกที่มีความยาวคอร์ดเท่ากับ c_{MAC} จะอยู่ที่ตำแหน่งตามแนวแกนปีกที่อยู่ตรงจุดเซนทรอยด์ (Centroid) ของพื้นที่ครึ่งปีกตามที่แสดงในรูป 5.6

5.2.1.5 อัตราส่วนเรียวปีก (Aspect ratio) สัดส่วนความเรียวยาวของปีกแสดงลักษณะรูปร่างของปีกว่ามีลักษณะเรียวยาวหรือสั้นกว้างคิดจากพื้นที่ปีกและระยะกางปีก ค่าอัตราส่วนนี้กำหนดโดย

$$AR = \frac{\text{span}}{\bar{c}} = \frac{b}{\bar{c}} \quad (5.9)$$

คูณบนและล่างด้วย b

$$AR = \frac{b^2}{b \cdot \bar{c}} = \frac{b^2}{A} \quad (5.10)$$

5.2.1.6 ตำแหน่งจุดสะเทิน (Neutral point) ตำแหน่งของจุดสะเทินของปีกหรือจุดศูนย์อากาศพลศาสตร์ของปีก มีความสำคัญในการพิจารณาคุณสมบัติทางอากาศพลศาสตร์ของปีก กำหนดโดย

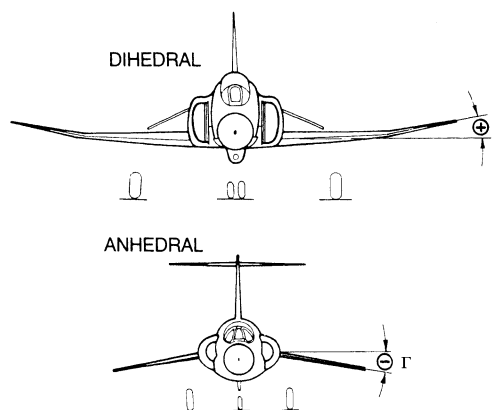
$$x_{N25} = \frac{1}{A} \int_{-s}^s c(y)x_{25}(y)dy \quad (5.11)$$

อาจแสดงให้เห็นได้ว่าตำแหน่ง x_{N25} ตามสมการ (5.11) สำหรับปีกรูปสี่เหลี่ยมคางหมู จะอยู่ที่ตำแหน่งตรงกับระยะ $1/4$ คอร์ด ของ C_{MAC} ตามที่แสดงในรูป 5.6

5.2.1.7 มุมลู่วหลัง (Sweep back angle) มุมลู่วหลังของปีกคือมุมระหว่างเส้นตรงที่ลากไปตามแนวกางปีกผ่านจุดที่มีระยะห่างจากชายหน้าของปีกตามแนวคอร์ดคงที่ กับเส้นตั้งฉากกับแกนสมมาตรของปีกใช้สัญลักษณ์ Λ โดยทั่วไปมักวัดมุมลู่วหลังปีกที่ชายหน้า (Λ_{LE}) ตามแนว $1/4$ คอร์ด ($\Lambda_{1/4}$) และชายหลัง (Λ_{TE})

5.2.2 มุมยกปีก (Dihedral angle)

เมื่อมองจากด้านหน้าจะเห็นว่าโดยทั่วไปปีกของอากาศยานจะไม่ได้วางอยู่ในระนาบเดียวกัน แต่จะมีลักษณะเป็นรูปตัว V ด้วยมุมน้อยๆ เข้าหากัน พิจารณาปีกในรูป 5.8 เส้นที่ลากแบ่งครึ่งปีกแต่ละข้างทำมุม Γ กับแนวระดับ มุม 2Γ จะเป็นมุมยกปีก (Dihedral angle) ถ้าปีกมีมุมยกปีกเป็นบวกหรือยกขึ้นเรียกว่า “ปีกยก” (Dihedral) กลับกันถ้าปีกมีมุมยกปีกเป็นลบหรือหุบลงเรียกว่า “ปีกหุบ” (Anhedral)

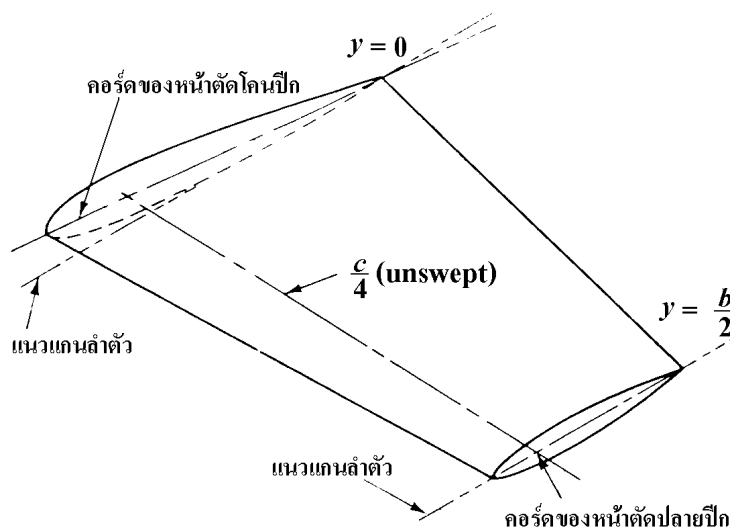


รูป 5.8 มุมยกปีก (Anderson, 2016)

5.2.3 มุมบิดปีก (Twist : wash-out & wash-in)

ปีกของอากาศยานขณะทำการบินแนวคอร์ดของแต่ละหน้าตัดของปีกตามแนวกางปีกจะไม่อยู่ในแนวขนานกับทิศทางการบิน มุมระหว่างแนวคอร์ดกับทิศทางการบิน (หรือกระแสอิสระ) คือมุมปะทะ α ของแต่ละหน้าตัด ถ้าแนวคอร์ดของแต่ละหน้าตัดของปีกไม่อยู่ในแนวเดียวกันมุมปะทะ

ของแต่ละหน้าตัดตลอดแนวกางปีกจะไม่เท่ากัน เรียกว่ามีการบิดปีก (Twist) ถ้ามุมปะทะของหน้าตัดที่โคนปีกมีค่ามากและค่อยลดลงไปทางปลายปีก เรียกว่าปีกมี “วอชเอาต์” (Wash out) สำหรับอากาศยานความเร็วต่ำปีกมักจะมีวอชเอาต์เพื่อควบคุมการแจกแจงแรงยกบนปีกและควบคุมลักษณะการร่งหล่น (Stall) ของปีก ในทำนองกลับกันถ้ามุมปะทะของแต่ละหน้าตัดเพิ่มขึ้นจากโคนปีกไปทางปลายปีก เรียกว่าปีกมี “วอชอิน” (Wash in)



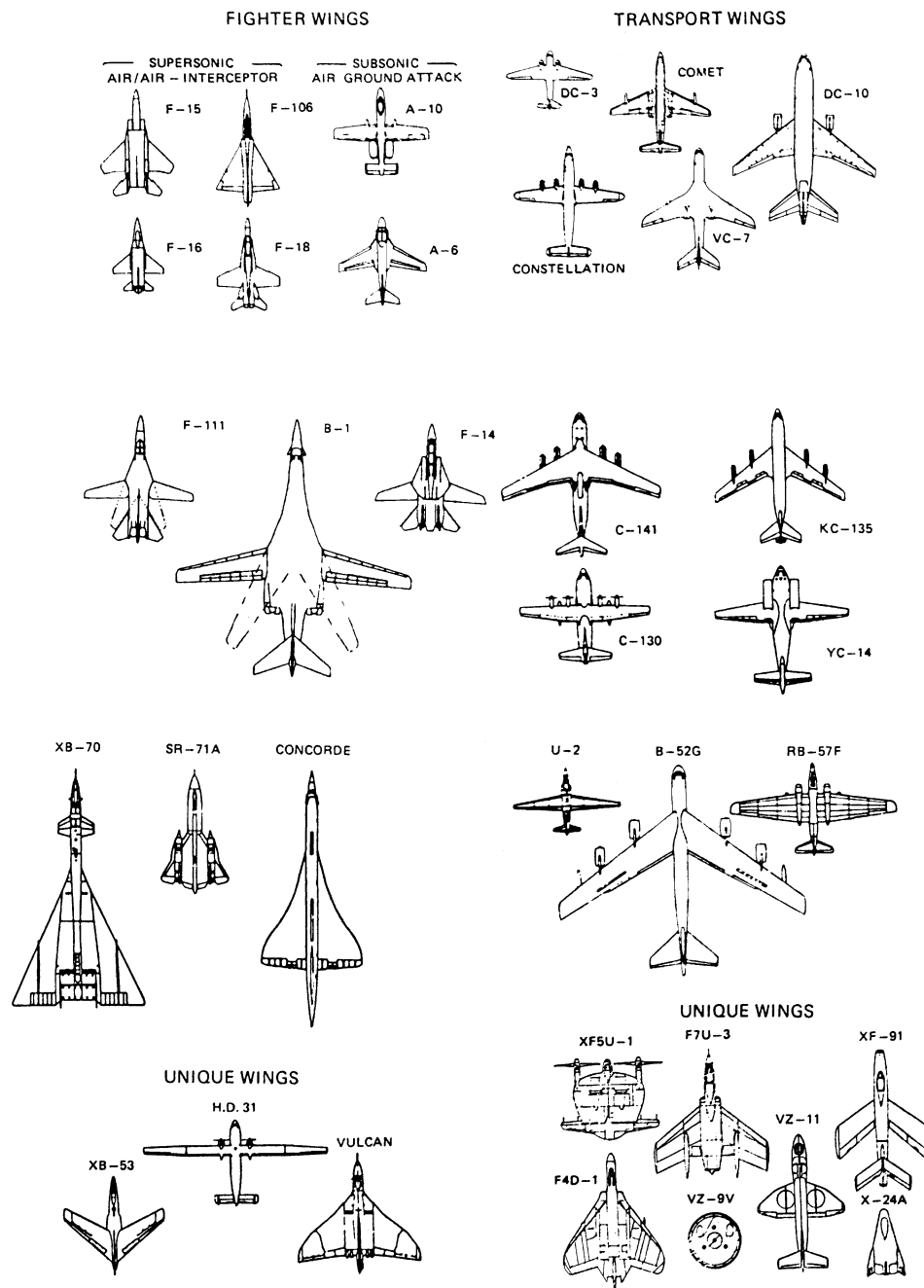
รูป 5.9 ปีกตรง มีการสอบปีก มีมุมบิดปีกแบบลดมุมปะทะ (wash out) (Anderson, 2016)

อัตราเรียว (Aspect ratio) อัตราสอบ (Taper ratio) มุมบิด (Twist) และมุมลู่อหลัง ซึ่งรวมกันกำหนดรูปร่างของปีก เป็นตัวประกอบหลักที่กำหนดลักษณะเฉพาะตัวทางอากาศพลศาสตร์ของปีกและมีความสำคัญต่อลักษณะการร่งหล่น (Stall) ของปีก นอกจากนี้ตัวแปรเหล่านี้ยังมีผลไปถึงน้ำหนักและความแข็งแรงของโครงสร้างของปีกอีกด้วย รูป 5.10 แสดงรูปร่างของปีกของอากาศยานแบบต่างๆ แสดงให้เห็นความหลากหลายของปีกที่มีการใช้งานกับอากาศยาน

5.3 เส้นใยวอร์เทก กฎของบีโอต์และซาวาร์ต และทฤษฎีของเฮล์มโฮลต์

(Vortex Filament Biot-Savart Law & Helmholtz's Theory)

การคำนวณคุณสมบัติทางอากาศพลศาสตร์ของปีกยาวจำกัดจำเป็นต้องใช้เครื่องมือทางคณิตศาสตร์บางอย่างมาประกอบการพิจารณา ก่อนอื่นเราจะขยายความของวอร์เทกในบทที่ 3 และบทที่ 4 ให้อยู่ในรูปทั่วไปมากขึ้น ในหัวข้อ 4.4 เราพิจารณาวอร์เทกเป็นเส้นใยในแนวตรงที่ขึงจาก ∞ ถึง $-\infty$ และเหนี่ยวนำให้เกิดการไหลสองมิติที่มีเส้นกระแส (Streamline) เป็นเส้นรอบวงของวงกลม

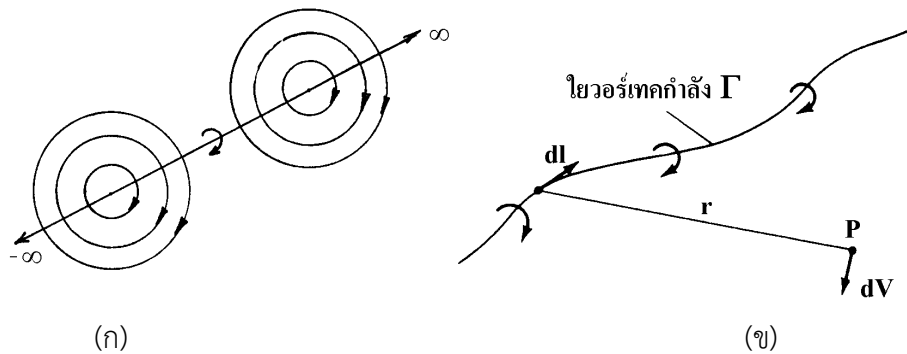


รูป 5.10 ปีกของอากาศยานแบบต่าง ๆ (Katz & Plotkin, 2001)

ที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่แกนเวอร์เทค ลักษณะการไหลที่เป็นสองมิติไม่ได้หมายถึงว่าการไหลเกิดขึ้นบนระนาบใดระนาบหนึ่ง แต่หมายถึงการไหลที่ถูกเหนี่ยวนำจากไวยอร์เทคบนระนาบใด ๆ ตั้งฉากกับแกนเวอร์เทคจะเหมือนกันทุกประการ แต่โดยทั่วไปไวยอร์เทคไม่มีข้อจำกัดที่ต้องเป็นเส้นตรง แต่อาจเป็นเส้นโค้งใดๆ อย่างที่แสดงในรูป 5.11 ข ซึ่งในที่นี้แสดงเพียงส่วนหนึ่งของไวยอร์เทค ไวยอร์เทคนี้

จะเหนี่ยวนำให้เกิดสนามการไหลในบริเวณโดยรอบ ถ้าค่าการหมุนวนรอบเส้นโค้งปิดใดๆ ที่ล้อมรอบ ไยวอร์เทคไว้ภายในมีค่าคงที่ Γ แสดงว่ากำลังแรงของไยวอร์เทคจะมีค่าเท่ากับ Γ พิจารณาส່วนสั้นๆ $d\vec{l}$ ส่วนหนึ่งของไยในรูป 5.11 ข $\vec{r}$ เป็นเวกเตอร์ของรัศมีจาก $d\vec{l}$ ถึงจุด P ใดๆ ส่วนสั้นๆ $d\vec{l}$ จะเหนี่ยวนำให้เกิดความเร็วที่จุด P มีค่า

$$d\vec{V} = \frac{\Gamma}{4\pi} \frac{d\vec{l} \times \vec{r}}{|\vec{r}|^3} \quad (5.12)$$



รูป 5.11 ไยวอร์เทคและการพิจารณากฎของบีโอท์-ซาวาร์ท (Biot-Savart law) (Katz & Plotkin, 2001)

สมการ (5.12) เรียกว่า กฎของบีโอท์-ซาวาร์ท (Katz & Plotkin, 2001) ถือว่าเป็นกฎพื้นฐานที่แสดงความสัมพันธ์ที่สำคัญอันหนึ่งของการพิจารณาการไหลไร้ความหนืดไร้การอัดตัว เพื่อความง่าย เราจะละการพิสูจน์ที่มาของสมการ (5.12) ไว้ และนำมันมาใช้เลย (สำหรับผู้สนใจอาจค้นคว้าได้จากเอกสารอ้างอิง) อย่างไรก็ตามเพื่อให้เกิดความชัดเจนในสมการ เราจะเปรียบเทียบสมการ (5.12) กับสมการแม่เหล็กไฟฟ้า โดยสมมติให้ไยวอร์เทคในรูปที่ 5.11 ข ถูกแทนที่ด้วยเส้นลวดซึ่งมีกระแสไฟฟ้า I แอมแปร์ไหลผ่าน สนามแม่เหล็กกำลังแรง $d\vec{B}$ จะถูกเหนี่ยวนำให้เกิดขึ้นที่จุด P จากส่วนของเส้นลวดสั้น ๆ $d\vec{l}$ ซึ่งมีกระแสไหลผ่าน มีค่า

$$d\vec{B} = \frac{\mu I}{4\pi} \frac{d\vec{l} \times \vec{r}}{|\vec{r}|^3} \quad (5.13)$$

เมื่อ μ คือค่า “Permeability” ของตัวกลางรอบลวด จะเห็นว่าสมการ(5.13) เหมือนสมการ (5.12) ทุกประการ อันที่จริงแล้วกฎของบีโอท์-ซาวาร์ทเป็นผลลัพธ์ของทฤษฎีศักย์ไฟฟ้า (Potential theory) ซึ่งใช้อธิบายสนามแม่เหล็กไฟฟ้า และถูกนำมาใช้อธิบาย การไหลไร้ความหนืดไร้การอัดตัว แม้แต่การใช้คำว่า “เหนี่ยวนำ” กับความเร็วที่เกิดจากไยวอร์เทค ซอร์ส หรืออื่นๆ ที่ผ่านมา ก็เป็นคำที่เลียนมาจากการศึกษาสนามแม่เหล็กไฟฟ้าที่ถูกเหนี่ยวนำจากกระแสไฟฟ้า

ย้อนกลับมาที่รูป 5.11 ข อีกครั้ง ขอให้นึกไว้เสมอว่าเส้นไยวอร์เทคและสมการ (5.12) เป็นเพียงแนวคิดอย่างง่ายทางอากาศพลศาสตร์สำหรับเป็นเครื่องมือสร้างรูปแบบการไหลที่ซับซ้อนกว่า โดยตัว

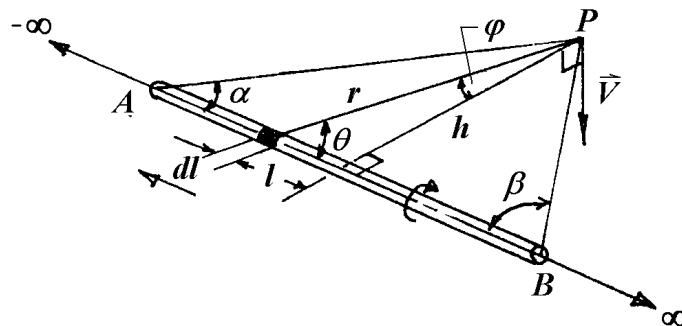
ของมันเองแล้วมีความหมายน้อยมากในการพิจารณา แต่เมื่อนำไยวอร์เทคจำนวนมากมารวมกับการไหลแบบเอกรูป (Uniform) จะพบว่า เป็นไปได้ที่จะจำลองการไหลผ่านปีกยาวจำกัดซึ่งเป็นสิ่งที่เราสนใจ

ก่อนอื่นพิจารณาสนามความเร็วที่เกิดจากการเหนี่ยวนำของไยวอร์เทคในสามมิติ จากกฎของบีโธ-ซาวาร์ท ความเร็วที่ถูกเหนี่ยวนำที่จุด P จากไยวอร์เทคทั้งเส้นที่คดโค้งไปมาจะได้จากการอินทิเกรตสมการ (5.12) ไปตลอดความยาวของไยวอร์เทค กรณีพิเศษสำหรับไยวอร์เทคที่เป็นเส้นตรง และมีกำลัง Γ ความเร็วที่จะถูกเหนี่ยวนำที่จุด P จะเป็น

$$\vec{V} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\Gamma}{4\pi} \frac{d\vec{l} \times \vec{r}}{|\vec{r}|^3} \quad (5.14)$$

จากนิยามของการคูณเวกเตอร์ (Vector cross product) ความเร็ว $\vec{V}$ จะมีทิศทางตามค่าการหมุนวนรอบไยวอร์เทคหรือมีทิศพุ่งลงตามรูป 5.12 และขนาดของความเร็วจะคำนวณได้จาก

$$|\vec{V}| = \frac{\Gamma}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin \theta}{r^2} dl \quad (5.15)$$



รูป 5.12 รูปเรขาคณิตของไยวอร์เทคจาก A ถึง B ที่เหนี่ยวนำความเร็วที่จุด P (Katz & Plotkin, 2001)

สำหรับความเร็วเหนี่ยวนำที่จุด P เนื่องจากส่วน AB ของไยวอร์เทคในรูป 5.12 จะได้

$$V_{AB} = \frac{\Gamma}{4\pi} \int_A^B \frac{\sin \theta}{r^2} dl \quad (5.16)$$

ให้ h เป็นระยะตั้งฉากจากจุด P ถึงไยวอร์เทค และ ϕ เป็นมุมวัดจากแนว h ถึง $\vec{r}$ จะได้ความสัมพันธ์ ตามรูป 5.12

$$\phi_A = -\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) \quad \phi_B = \left(\frac{\pi}{2} - \beta\right) \quad (5.17a)$$

$$\sin \theta = \cos \phi \quad (5.17b)$$

$$r = \frac{h}{\sin \theta} = h \sec \phi \quad (5.17c)$$

$$l = \frac{h}{\tan \theta} = h (\tan \varphi) \quad (5.17d)$$

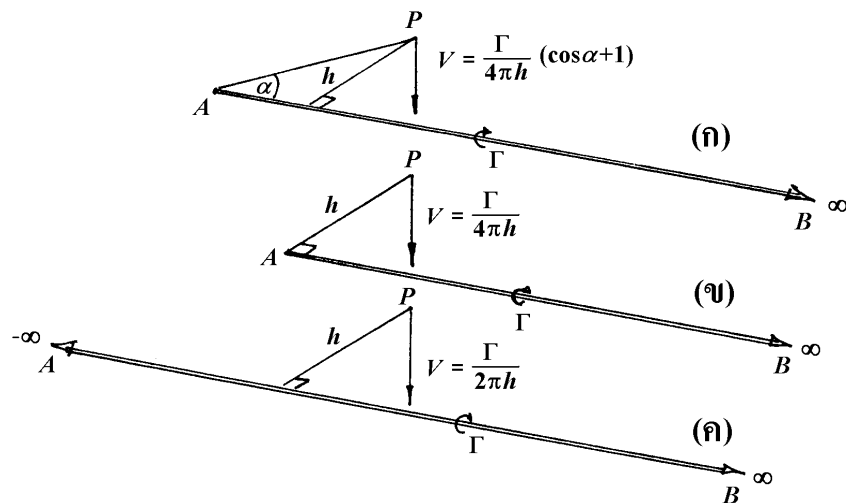
$$dl = - \frac{h}{\sin^2 \theta} d\theta = h \sec^2 \varphi d\varphi \quad (5.17e)$$

แทนค่าลงในสมการ (5.16) จะได้

$$V_{AB} = \int_{-(\pi/2-\alpha)}^{(\pi/2-\beta)} \frac{\Gamma}{4\pi h} \cos \varphi d\varphi = \frac{\Gamma}{4\pi h} [\sin(\frac{\pi}{2} - \beta) + \sin(\frac{\pi}{2} - \alpha)]$$

$$V_{AB} = \frac{\Gamma}{4\pi h} (\cos \alpha + \cos \beta) \quad (5.18)$$

ผลลัพธ์ที่ได้จากสมการ (5.18) จะถูกนำไปใช้บ่อยครั้ง และมีความสำคัญมากในหัวข้อต่อ ๆ ไป และจะนำไปใช้ในหัวข้อต่อจากนี้ พิจารณาได้ดังต่อไปนี้



รูป 5.13 ความเร็วเหนี่ยวนำจากไอวอร์เทคตรง ที่มีความยาวต่างๆ กัน (Katz & Plotkin, 2001)

จากรูป 5.13 ก ข และ ค ความเร็วเหนี่ยวนำที่จุด P จากไอวอร์เทคที่เป็นเส้นตรงความยาวต่างกัน จะได้ผลต่างๆ ดังนี้ รูป 5.13 ก ปลาย A อยู่เลยตำแหน่งของจุด P และปลาย B ของไอวอร์เทคยาวไปถึง ∞ จะได้ $\beta = 0$ และ $\cos \beta = 1$ จากสมการ (5.18)

$$V = \frac{\Gamma}{4\pi h} (\cos \alpha + 1) \quad (5.19)$$

รูป 5.13 ข ปลาย A อยู่ตรงตำแหน่งของจุด P และปลาย B ของไอวอร์เทคยาวไปถึง ∞ จะได้ $\alpha = \frac{\pi}{2}$, $\cos \alpha = 0$ และ $\beta = 0$ และ $\cos \beta = 1$ จะได้

$$V = \frac{\Gamma}{4\pi h} \quad (5.20)$$

รูป 5.13 ค ปลาย A ยาวไปถึง $-\infty$ และปลาย B ของไอเวอร์เทคยาวไปถึง ∞ จะได้ $\alpha = 0$, $\cos \alpha = 1$ และ $\beta = 0$, $\cos \beta = 1$ จะได้

$$V = \frac{\Gamma}{2\pi h} \quad (5.21)$$

ดังนั้นความเร็วเหนี่ยวนำที่จุด P จากไอเวอร์เทคที่ยาวจาก $-\infty$ ถึง ∞ ที่อยู่ห่างเป็นระยะตั้งฉาก h จาก P จะมีค่า $\frac{\Gamma}{2\pi h}$ เป็นค่าเดียวกันกับสมการ (3.94) ในบทที่ 3 สำหรับจุดวอร์เทคที่น่าสนใจ คือ ความเร็วที่ถูกเหนี่ยวนำที่จุด P จากไอเวอร์เทคครึ่งเส้นคือ $\frac{\Gamma}{4\pi h}$ ครึ่งหนึ่งของไอเวอร์เทคทั้งเส้นนั่นเอง

แนวความคิดนี้ถูกนำมาใช้เป็นครั้งแรกโดยนักคณิตศาสตร์ชาวเยอรมัน “เฮร์มานน์ วอน เฮล์มโฮลท์” (Hermann von Helmholtz) เพื่อใช้วิเคราะห์การไหลไร้ความหนืดไร้การอัดตัว เฮล์มโฮลท์ได้พัฒนาทฤษฎีที่เกี่ยวกับคุณสมบัติของวอร์เทค ซึ่งเป็นที่รู้จักกันในชื่อ ทฤษฎีของเฮล์มโฮลท์ (Helmholtz's vortex theorem) คือ

1. กำลังของวอร์เทคจะต้องมีค่าคงที่ตลอดความยาว
2. เส้นไอเวอร์เทคไม่สามารถจบในเนื้อของไหลได้ แต่ต้องยืดยาวไปจนถึง $\pm\infty$ หรือขอบ

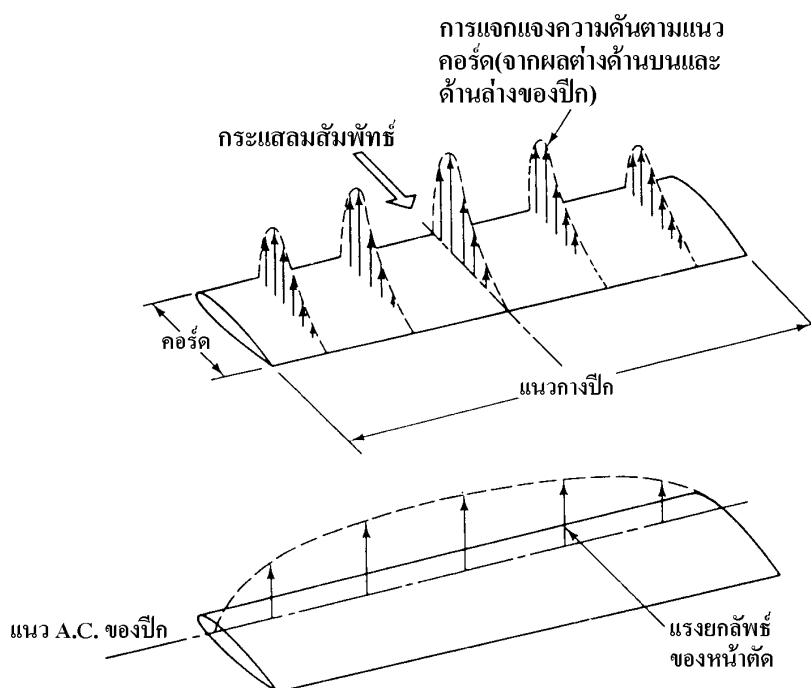
เขตของการไหล หรือไม่ก็ต้องฟอร์มตัวเป็นเส้นปิด (Closed path) เสมอ

เราจะนำทฤษฎีของเฮล์มโฮลท์ ทั้ง 2 ข้อมาใช้ต่อไป

5.4 ทฤษฎีแนวแรงยกของพรานด์ (Prandtl's Lifting Line Theory)

5.4.1 การแจกแจงแรงยก (Lift distribution)

พิจารณาดำแหน่งใดๆ y_1 ตามแนวแกนปีกที่มีความยาวคอร์ด c มีมุมปะทะ α และมีรูปร่างแผนอากาศตามที่กำหนด ค่าแรงยกต่อ 1 หน่วยระยะทางปีก (Lift per unit span) L' ของปีก ณ ตำแหน่งนี้เป็น $L'(y_1)$ ลองพิจารณาดำแหน่งอื่นตามแนวแกนปีก สมมุติว่า ณ ตำแหน่ง y_2 ที่มีค่า c α และรูปร่างแผนอากาศแตกต่างไป (เพราะปีกทั่วไปไม่จำเป็นต้องมีความยาวคอร์ดเท่ากันตลอดแนวแกนปีกยกเว้นปีกรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า และปีกอาจมีมุมบิดปีกทำให้ค่า α ไม่เท่ากันตลอดแนวแกนปีก รวมทั้งปีกอาจมีหน้าตัดแผนอากาศต่างกันตามแนวแกนปีกทำให้ค่า $\alpha_{L=0}$ ของรูปหน้าตัดแผนอากาศมีค่าต่างกันตลอดแนวแกนปีก) ผลที่ตามมาคือค่าแรงยกต่อหน่วยระยะทางปีก $L'(y_2)$ จะมีค่าไม่เท่ากับ $L'(y_1)$ นั่นคือแรงยกจะไม่เท่ากันตลอดแนวแกนปีก แต่จะมีการแจกแจงไปตามแนวแกนปีก จากกึ่งกลางปีกไปจนกระทั่งมีค่าลดลงเป็นศูนย์ที่ปลายปีกทั้งสองข้าง นั่นคือ $L' = L'(y)$ ตามที่แสดงในรูป 5.14 ในทำนองเดียวกันค่าการหมุนวน (Circulation) รอบหน้าตัดใดๆ ของปีกจะมีค่าเปลี่ยนแปลง



รูป 5.14 การแจกแจงแรงยกตามแนวแกนปีก (Anderson, 2016)

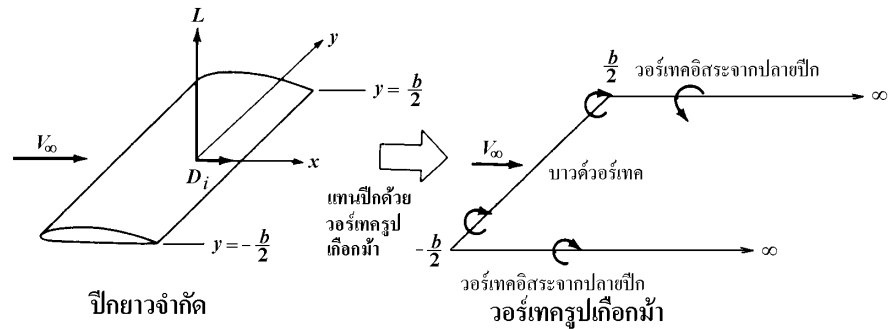
ไปตามแนวแกนปีกด้วยเช่นกัน เพราะ $\Gamma(y) = L'(y) / \rho_\infty V_\infty$ การคำนวณหาการแจกแจงแรงยก (หรือการแจกแจงการหมุนวน) จะนำไปสู่คำตอบที่ต้องการ นั่นคือ แรงยกโดยรวม และแรงต้านเหนี่ยวนำ

5.4.2 ทฤษฎีแนวแรงยกของพรานด์ (Prandtl's Lifting Line Theory)

ก้าวใหญ่ของการพัฒนาการบิน คือ ทฤษฎีแนวแรงยกของพรานด์ (Prandtl) ก่อนหน้านี้ข้อมูลทางอากาศพลศาสตร์ของปีกจะได้จากการทดลอง และปรับให้เข้ากับอัตราเร็ว รูปร่าง และคุณลักษณะอื่นๆ ของปีกโดยใช้สูตรสำเร็จที่ได้จากประสบการณ์ ทฤษฎีของพรานด์ช่วยให้สามารถทำนายคุณลักษณะทางอากาศพลศาสตร์ของปีกได้จากรูปร่างลักษณะของปีก และยังใช้อยู่ถึงปัจจุบัน

พรานด์ให้เหตุผลอธิบายทฤษฎีแนวแรงยกไว้ดังนี้ เส้นไวยอร์เทคกำลัง Γ ที่ถูกตรึงอยู่ในบริเวณคองที่อื่นหนึ่งในการไหลเรียกว่า “บาวด์วอร์เทค” (Bound vortex) จะรับรู้การเกิดแรงยกที่มีค่า $L' = \rho_\infty V_\infty \Gamma$ ตามทฤษฎีของคุตต้า-จูโควสกี (Anderson, 2016) บาวด์วอร์เทคที่กล่าวถึง จะแตกต่างกับวอร์เทคอิสระ (Free vortex) ซึ่งจะเคลื่อนที่ควบคู่ไปกับอนุภาคของไหลชุดเดิมไปตลอดสนามการไหลอย่างเช่นวอร์เทคที่ปลายปีกทั้งสองข้าง ดังนั้นจึงอาจแทนปีกที่มีระยะกางปีก b ด้วยบาวด์วอร์เทค ที่ซึ่งจากปลายปีกข้างหนึ่งไปยังปลายปีกอีกข้างหนึ่ง คือจาก $-\frac{b}{2}$ ถึง $\frac{b}{2}$ อย่างที่แสดงในรูป 5.15 อย่างไรก็ตาม จากทฤษฎีของเฮลล์มโฮลทซ์ไวยอร์เทคไม่สามารถจบในของไหลได้ จึงสมมติให้เส้นไวยอร์เทคต่อเนื่องออกจากปลายทั้งสองของบาวด์วอร์เทคไปทางด้านหลังเป็นวอร์เทคอิสระไป

ถึง ∞ วอร์เทคชนิดนี้ซึ่งมี 3 ส่วน พอร์มตัวเป็นรูปเกือกม้า เราจึงเรียกวอร์เทคชนิดนี้ว่า “วอร์เทค รูปเกือกม้า” (Horseshoe vortex)



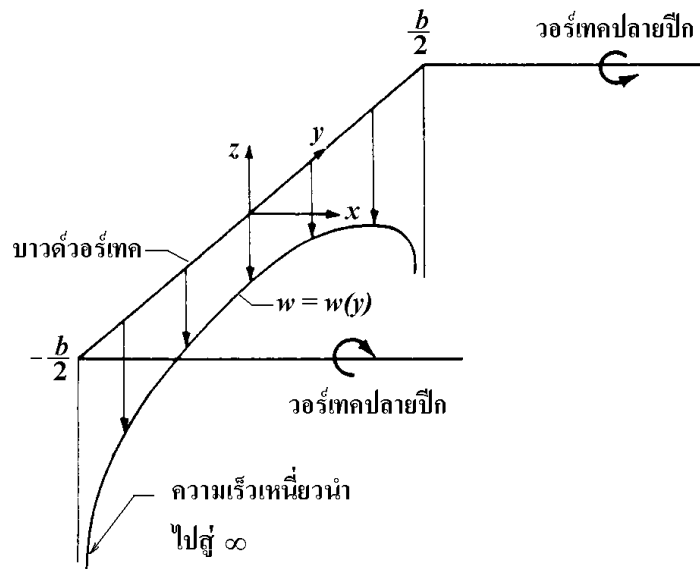
รูป 5.15 การแทนปีกด้วยบาวด์วอร์เทค (Bound vortex) และวอร์เทคปลายปีก (Anderson, 2016)

ในกรณีของวอร์เทครูปเกือกม้าที่แทนปีกในรูป 5.15 ความเร็วดาวน์วอชที่ถูกเหนี่ยวนำตลอดแนวของบาวด์วอร์เทคจาก $-\frac{b}{2}$ ถึง $\frac{b}{2}$ เนื่องจากวอร์เทครูปเกือกม้าที่ประกอบขึ้นจากวอร์เทคทั้ง 3 ส่วนจะมีผลต่อดาวน์วอชตลอดแนวของบาวด์วอร์เทคต่างกัน คือ ตัวบาวด์วอร์เทคจะไม่เหนี่ยวนำให้เกิดดาวน์วอชตามแนวของตัวเอง (แต่แน่นอนว่ามันเหนี่ยวนำให้เกิดความเร็วในบริเวณรอบๆ) แต่วอร์เทคอิสระที่ทิ้งไปด้านหลังจากปลายปีกทั้งสองด้านจะเหนี่ยวนำให้เกิดความเร็วดาวน์วอชขึ้นตามแนวบาวด์วอร์เทค และความเร็วที่เหนี่ยวนำขึ้นนี้จะอยู่ในทิศทางพุ่งลงด้านล่างเมื่อพิจารณาโดยใช้แกน xyz ตามรูป 5.16 จะเห็นว่าความเร็วดังกล่าวจะเป็นลบ หรือ w (ซึ่งอยู่ในทิศทาง z) มีค่าเป็นลบเมื่อชี้ลงด้านล่าง และเป็นบวกเมื่อชี้ขึ้นข้างบน ถ้าเลือกจุดกำเนิดที่กึ่งกลางของบาวด์วอร์เทค ดังนั้นความเร็ว ณ ตำแหน่ง y ใด ๆ ตามแนวของบาวด์วอร์เทคที่เหนี่ยวนำโดยวอร์เทคปลายปีก (Trailing vortex) ซึ่งยาวจากแนวของบาวด์วอร์เทคไปถึง ∞ จะได้จากสมการ (5.20)

$$w(y) = -\frac{\Gamma}{4\pi(b/2 + y)} - \frac{\Gamma}{4\pi(b/2 - y)} \quad (5.22)$$

การเปลี่ยนค่าของ $w(y)$ แสดงไว้ในรูป 5.16 สังเกตว่า w จะเข้าสู่ค่า $-\infty$ ที่ปลายทั้งสองด้าน หรือเมื่อ $y \rightarrow -\frac{b}{2}$ หรือ $\frac{b}{2}$

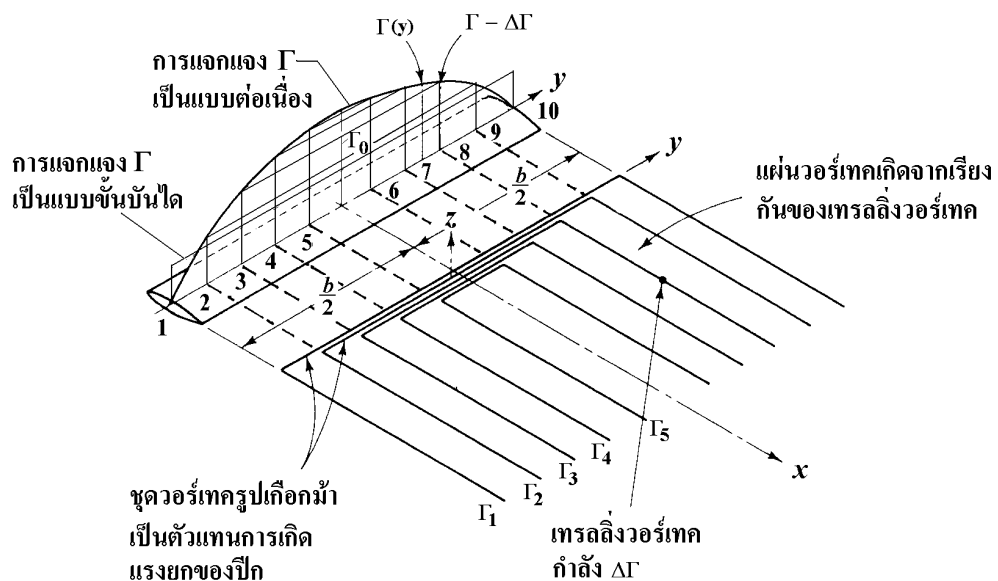
การใช้วอร์เทครูปเกือกม้าชุดเดียว แทนปีกไม่สามารถจำลองการไหลที่สมจริงผ่านปีกยาวจำกัดได้ รวมทั้งการที่ดาวน์วอชมีค่าเข้าสู่ $-\infty$ ที่ปลายทั้งสองด้านยังสร้างปัญหาเกี่ยวกับการวิเคราะห์



รูป 5.16 การแจกแจงตามแนวแกน y สำหรับวอร์เทคเกือกม้าตัวเดียว (Anderson, 2016)

พรานด์ใช้เวลาหลายปีที่จะหารูปแบบของระบบวอร์เทคที่เหมาะสมกว่าในการจำลองการไหลผ่านปีก คำตอบของปัญหากลายเป็นเรื่องเส้นผมบังภูเขามากขึ้น ซึ่งจริงๆ แล้วเป็นเรื่องง่ายๆ และตรงไปตรงมา เพราะว่าในความเป็นจริงคงเห็นจากหัวข้อที่ผ่านมาว่าแรงยกบนปีกไม่ได้มีค่าคงที่ แต่เปลี่ยนแปลงจากกลางปีกถึงปลายปีก ดังนั้นค่าการหมุนรอบปีก ณ ตำแหน่งตามแนวแกนปีกใดๆ ก็จะมีค่าไม่เท่ากันด้วย นั่นคือบาวด์วอร์เทคที่แทนปีกจะต้องมีกำลัง Γ ไม่คงที่ด้วย แต่ทฤษฎีของเฮล์มโฮลต์ กำหนดว่ากำลังของวอร์เทคจะมีค่าคงที่ตลอดทั้งเส้น ฉะนั้นการที่จะทำให้บาวด์วอร์เทคที่แทนปีกมีกำลังเปลี่ยนแปลงตามแนวแกนปีกอาจทำได้โดยซ้อนวอร์เทคเกือกม้าหลายชุดที่มีความยาวของบาวด์วอร์เทคต่างๆ กัน แต่ให้ทุกตัวซ้อนอยู่ในแนวเดียวกัน เรียกแนวนี้ว่า “แนวแรงยก” (Lifting line) แนวคิดอันนี้แสดงในรูป 5.17 โดยแสดงให้เห็นวอร์เทครูปเกือกม้าเพียง 5 ชุด เพื่อความชัดเจน ในรูป 5.17 วอร์เทคเกือกม้ากำลัง Γ_1 มีบาวด์วอร์เทคที่มีความยาวตลอดแนวแกนปีกคือจาก $-\frac{b}{2}$ ถึง $\frac{b}{2}$ (หรือจากจุด 1 ถึงจุด 10 ในรูป) ที่ซ้อนอยู่กับวอร์เทคเกือกม้า Γ_1 คือวอร์เทค Γ_2 ซึ่งบาวด์วอร์เทคมีความยาวเพียงส่วนหนึ่งของระยะทางปีก คือ จากจุด 2 ถึงจุด 9 ในรูปวอร์เทครูปเกือกม้าอีก 3 ชุดที่มีกำลัง Γ_3 Γ_4 และ Γ_5 จะซ้อนอยู่ในลักษณะเดียวกัน ถ้าบาวด์วอร์เทคทุกตัวซ้อนอยู่ในแนวเส้นตรงเดียวกัน ผลคือค่าการหมุนรอบบาวด์วอร์เทค (กำลังของบาวด์วอร์เทค) จะมีค่าเปลี่ยนแปลงไปตามแนวแกนปีกหรือแนวแรงยกตามที่ได้กำหนดไว้ตั้งแต่แรก ในช่วง $1 \rightarrow 2$ และ $9 \rightarrow 10$ ในรูป ซึ่งมีวอร์เทคเพียงตัวเดียววางอยู่ ค่าการหมุนรอบในช่วงนี้จะเปลี่ยนเป็น Γ_1 แต่ในช่วง $2 \rightarrow 3$ และ $8 \rightarrow 9$ ซึ่งมี

วอร์เทคซ้อนกันอยู่ 2 ตัว ค่าการหมุนวนจะเป็นผลรวมจากกำลังของวอร์เทคสองตัว $\Gamma_1 + \Gamma_2$ เป็นดังนี้



รูป 5.17 การเรียงซ้อนกันของวอร์เทคเกือกม้า ตามแนวแรงยก (Anderson, 2016)

เรื่อยไปจนช่วง $5 \rightarrow 6$ ค่าการหมุนวนจะเป็นผลรวมจากกำลังวอร์เทค $\Gamma_1 + \Gamma_2 + \Gamma_3 + \Gamma_4 + \Gamma_5$ ถ้าแทนการเปลี่ยนแปลง ค่าการหมุนวนตามแนวแกน y หรือแนวแรงยกโดยใช้แท่งสี่เหลี่ยมตามที่ได้แสดงอยู่ทางซ้ายของรูป 5.17 แทนขนาดของการหมุนวน เราจะสังเกตเห็นการเปลี่ยนแปลงของ Γ ตามแนวแรงยก และขอให้สังเกตว่าจะมีเทรลลิ่งวอร์เทคที่ทิ้งไปทางด้านหลังแจกแจงอยู่ตลอดแนว ไม่ใช่เพียงแค่วอร์เทค ที่ปลายปีกทั้งสองข้างเท่านั้นอีกต่อไป ชุดของเทรลลิ่งวอร์เทคในรูป 5.17 เป็นตัวแทนของวอร์เทคที่เป็นคู่ ซึ่งแต่ละคู่จะเป็นส่วนของวอร์เทคเกือกม้าอันหนึ่ง ดังนั้นกำลังของเทรลลิ่งวอร์เทคที่ทิ้งไปแต่ละตัวจะเท่ากับค่าการหมุนวนที่เปลี่ยนไปตามแนวแกนปีก

จะเห็นจากทางซ้ายของรูป 5.17 ว่าสำหรับวอร์เทคเกือกม้า 5 ชุด ที่เราใช้จะให้การเปลี่ยนแปลงของ Γ (และเมื่อคูณด้วย $\rho \infty V_\infty$ คือ L' นั่นเอง) ตามแนวแกนปีกมีลักษณะเป็นขั้นๆ ถัดกันไป 5 ขั้น แต่ในความเป็นจริง เราคงจะหาได้ว่าการแจกแจงแรงยกจะต้องมีลักษณะราบเรียบต่อเนื่องกันไป ดังนั้นเราจึงจะปรับระบบของวอร์เทครูปเกือกม้าที่จะจำลองการไหลผ่านปีกโดยใช้วอร์เทครูปเกือกม้าที่มีจำนวนมากนับไม่ถ้วนวางซ้อนกันตามแนวแรงยกโดยให้กำลังของวอร์เทคแต่ละตัวมีกำลังน้อยมาก $\Delta\Gamma$ และในขีดจำกัดให้ค่าเข้าสู่ศูนย์ กรณีนี้แสดงให้เห็นรูป 5.18 สังเกตว่าการเปลี่ยนแปลงค่า Γ ที่เป็นขั้นๆ ในรูป 5.17 จะกลายเป็นการเปลี่ยนแปลงอย่างต่อเนื่อง $\Gamma(y)$ ไปตลอดแนวแรงยก และค่า Γ สูงสุดจะเท่ากับ Γ_0 ที่แนวกลางปีก นอกจากนี้เทรลลิ่งวอร์เทคที่ทอดตัว

ลองพิจารณาส่วนแถบแคบๆ dy บนแนวแรงยกที่อยู่ตำแหน่ง y ค่าการหมุนวน ณ ตำแหน่งนี้จะมีค่า $\Gamma(y)$ และการเปลี่ยนแปลงค่าการหมุนวนที่ระยะห่างออกไป dy จะเป็น $d\Gamma = \left(\frac{d\Gamma}{dy}\right)dy$ แต่ว่ากำลังของเทรลลิ่งวอร์เทคที่ทอดไปข้างหลังที่ตำแหน่ง y ตามแนวทางปีก จะต้องมามีค่าเท่ากับการเปลี่ยนแปลงค่าการหมุนวน $d\Gamma$ ไปตามแนวทางปีก ซึ่งคล้ายกับผลที่เกิดขึ้นกับกำลังของวอร์เทครูปเกือกม้าในรูป 5.17 พิจารณาเทรลลิ่งวอร์เทคกำลัง $d\Gamma$ ที่ทอดไปข้างหลังจากตำแหน่ง y บนแนวแรงยกจากรูป 5.18 ให้ y_0 เป็นตำแหน่งใดๆ บนแนวแรงยก จะเห็นว่าส่วนสั้นๆ dx ของเทรลลิ่งวอร์เทค $d\Gamma$ จะเหนี่ยวนำให้จุด y_0 มีความเร็วที่มีขนาดและทิศทางตามกฎของ บีโธ-ซาวาร์ต และความเร็ว dw ที่ถูกเหนี่ยวนำจากเทรลลิ่งวอร์เทคที่ตำแหน่ง y ณ ตำแหน่ง y_0 จะมีค่าตามสมการ (5.20)

$$dw = -\frac{(d\Gamma/dy)dy}{4\pi(y_0 - y)} \quad (5.23)$$

ตามที่ปรากฏในรูป 5.18 ข เครื่องหมายลบในสมการ (5.23) จำเป็นต้องใส่ไว้เพื่อให้เครื่องหมายของ dw สอดคล้องกับทิศทางที่กำหนดตามแกนในรูป สำหรับเทรลลิ่งวอร์เทคในรูป 5.18 ข จะเหนี่ยวนำให้เกิดความเร็ว dw ที่จุด y_0 เป็นบวก(พุ่งขึ้น) ในขณะที่ Γ จะมีค่าลดลงในทิศทาง y ทำให้ $\frac{d\Gamma}{dy}$ มีค่าเป็นลบ เครื่องหมายลบในสมการจะทำให้ได้ค่า dw เป็นบวกสำหรับ $\frac{d\Gamma}{dy}$ เป็นลบ

ความเร็วเหนี่ยวนำโดยรวม w ที่จุด y_0 เนื่องจากเทรลลิ่งวอร์เทคในแผ่นวอร์เทคทั้งแผ่นจะ ได้จากการอินทิเกรตสมการ(5.23) สำหรับแผ่นวอร์เทคทั้งแผ่นจาก $y = -b/2$ ถึง $b/2$

$$w(y_0) = -\frac{1}{4\pi} \int_{-b/2}^{b/2} \frac{(d\Gamma/dy)dy}{(y_0 - y)} \quad (5.24)$$

สมการ (5.24) มีความสำคัญอยู่ที่มันให้ค่าของดาวนัวอชที่ตำแหน่ง y_0 เนื่องจากเทรลลิ่งวอร์เทคทั้งหมด (อย่าลืมว่าเราเรียก w ว่าดาวนัวอชแต่มันมีทิศทางชี้ขึ้นสำหรับเครื่องหมายบวก ในตำราบางเล่มจึงใช้เครื่องหมายบวกของ w สำหรับทิศทางพุ่งลง)

ถึงจุดนี้ เราได้แทนปีกด้วยระบบของวอร์เทคที่ประกอบด้วยแนวแรงยก(ที่มีบาวด์วอร์เทคซ้อนกันอยู่) ซึ่งให้ค่าการหมุนวนที่มีการเปลี่ยนแปลงต่อเนื่องจากปลายปีกข้างหนึ่งไปยังอีกข้างหนึ่ง $\Gamma(y)$ ตามรูป 5.18 และได้สมการสำหรับการคำนวณดาวนัวอชตลอดแนวแรงยกตามสมการ (5.24) ซึ่งเป็นผลมาจากแผ่นวอร์เทคที่ทอดไปด้านหลังปีก แต่ยังมีปัญหาใหญ่ที่รอให้แก้ก็คือ เราต้องการทราบค่า $\Gamma(y)$ ของปีก เพื่อนำไปใช้คำนวณหาค่าแรงยก และแรงต้านเหนี่ยวนำ ซึ่งขณะนี้เรายังไม่ทราบอะไรเลยเกี่ยวกับ $\Gamma(y)$

ย้อนกลับไปรูป 5.4 ซึ่งแสดงภาพของแพนอากาศที่หน้าตัดหนึ่งของปีก สมมติว่าอยู่ที่ตำแหน่ง y_0 ตามแนวทางปีก ค่ามุมปะทะเหนี่ยวนำ α_i ได้จาก

$$\alpha_i(y_o) = \tan^{-1}\left(\frac{-w(y_o)}{V_\infty}\right) \quad (5.25)$$

(สังเกตว่าในรูป 5.4 w มีทิศทางลง และย่อมมีค่าเป็นลบ เนื่องจาก α_i ในรูป 5.4 มีค่าเป็นบวก เครื่องหมายลบในสมการจึงใส่ไว้ให้สอดคล้องกัน) โดยทั่วไป w จะมีค่าน้อยมากเมื่อเทียบกับ V_∞ ดังนั้น α_i จะเป็นมุมเล็กๆ อย่างมากที่สุดไม่เกิน 2 – 3 องศา ดังนั้น

$$\tan \alpha_i(y_o) \cong \alpha_i(y_o) = \frac{-w(y_o)}{V_\infty} \quad (5.26)$$

แทนสมการ (5.24) ในสมการ (5.26) จะได้

$$\alpha_i(y_o) = \frac{1}{4\pi V_\infty} \int_{-b/2}^{b/2} \frac{(d\Gamma/dy)dy}{(y_o - y)} \quad (5.27)$$

ซึ่งเป็นการแสดงค่า มุมปะทะเหนียวในรูปของการแจกแจงค่าการหมุนวน $\Gamma(y)$ ของปีกตามแนวแกว่งปีก

จากรูป 5.4 จะเห็นว่า มุมปะทะที่มีผลต่อแรงยก (Effective angle of attack) α_{eff} ของหน้าตัด คือมุมปะทะที่กระแสลมเข้าปะทะกับหน้าตัดแพนอากาศจริง เพราะค่าดาวนัวอามีการเปลี่ยนแปลงตลอดแนวแกว่งปีก ดังนั้น α_{eff} จะเปลี่ยนแปลงตามแนวแกว่งปีกเช่นเดียวกัน หรือ $\alpha_{eff} = \alpha_{eff}(y_o)$ ค่าสัมประสิทธิ์แรงยกของแพนอากาศที่หน้าตัดตำแหน่ง $y = y_o$ จะเป็น

$$\begin{aligned} c_l &= a_o [\alpha_{eff}(y_o) - \alpha_{L=0}] \\ &\cong 2\pi [\alpha_{eff}(y_o) - \alpha_{L=0}] \end{aligned} \quad (5.28)$$

สมการ (5.28) เราใช้ค่าความชันของโค้งแรงยก a_o เป็นค่าจากทฤษฎีแพนอากาศบางคือ 2π ได้ นอกจากนี้สำหรับปีกที่มีการบิดปีกทางอากาศพลศาสตร์ (Aerodynamics twist) ค่ามุมปะทะที่แรงยกเป็นศูนย์ $\alpha_{L=0}$ ในสมการจะเปลี่ยนแปลงไปตามตำแหน่ง y_o แต่ถ้าปีกไม่มีการบิดปีกทางอากาศพลศาสตร์ $\alpha_{L=0}$ จะมีค่าคงที่ตลอดแนวแกว่งปีก ไม่ว่าในกรณีใดก็ตามค่า $\alpha_{L=0}$ เป็นคุณสมบัติที่เราทราบจากข้อมูลของแพนอากาศของหน้าตัดตรงตำแหน่ง y_o จากนิยามของสัมประสิทธิ์แรงยกและจากทฤษฎีของคุตต้า-จูคอวสกี จะได้ค่าสำหรับหน้าตัดแพนอากาศ ณ ตำแหน่ง y_o เป็น

$$L' = \frac{1}{2} \rho_\infty V_\infty^2 c(y_o) c_l = \rho_\infty V_\infty \Gamma(y_o) \quad (5.29)$$

ซึ่งจะได้

$$c_l = \frac{2\Gamma(y_o)}{V_\infty c(y_o)} \quad (5.30)$$

แทนสมการ (5.30) ในสมการ (5.28) เพื่อหาค่า α_{eff} จะได้

$$\alpha_{eff} = \frac{2\Gamma(y_o)}{a_o V_\infty c(y_o)} + \alpha_{L=0} \quad (5.31a)$$

เมื่อแทนค่า $a_o = 2\pi$ จะได้

$$\alpha_{\text{eff}} = \frac{\Gamma(y_o)}{\pi V_\infty c(y_o)} + \alpha_{L=0} \quad (5.31b)$$

ผลลัพธ์ที่ได้ ถ้าแทนค่า $\alpha_{\text{eff}} = \alpha - \alpha_i$ โดยสมการ (5.27) และ (5.31) จะได้ความสัมพันธ์

$$\alpha(y_o) = \frac{2\Gamma(y_o)}{a_o V_\infty c(y_o)} + \alpha_{L=0}(y_o) + \frac{1}{4\pi V_\infty} \int_{-b/2}^{b/2} \frac{(d\Gamma/dy)dy}{(y_o - y)} \quad (5.32a)$$

หรือ

$$\alpha(y_o) = \frac{\Gamma(y_o)}{\pi V_\infty c(y_o)} + \alpha_{L=0}(y_o) + \frac{1}{4\pi V_\infty} \int_{-b/2}^{b/2} \frac{(d\Gamma/dy)dy}{(y_o - y)} \quad (5.32b)$$

สมการ (5.32) ถือเป็นสมการพื้นฐานของทฤษฎีแนวแรงยกของพรานด์ ซึ่งกล่าวได้ว่า มุมปะทะทางเรขาคณิตจะมีค่าเท่ากับมุมปะทะสัมฤทธิ์ผล α_{eff} บวกกับมุมปะทะเหนี่ยวนำ α_i ในสมการ(5.32) α_{eff} แสดงอยู่ในเทอมของ Γ และ α_i อยู่ในเทอมของอินทิเกรตที่มีเทอม $d\Gamma/dy$ อยู่ข้างใน ฉะนั้นสมการ (5.32) จึงเป็นสมการที่ติดทั้งอินทิเกรตและดิฟเฟอเรนเชียล (Integro-differential equation) ที่มี Γ เป็นตัวไม่ทราบค่า ส่วนตัวแปรอื่นนอกจากนี้ เช่น α , c , V_∞ และ $\alpha_{L=0}$ จะทราบค่าได้จากข้อมูลของรูปร่างของปีกกับกระแสน้ำอิสระ ดังนั้นคำตอบของสมการ (5.32) ที่จะได้คือค่า $\Gamma = \Gamma(y_o)$ เมื่อ y_o คือตำแหน่งใดๆ ตามแนวแกนปีกระหว่าง $-b/2$ ถึง $b/2$

ถ้าเราได้คำตอบ $\Gamma = \Gamma(y_o)$ จากการแก้สมการ (5.32) แล้วค่าที่ได้จะให้ลักษณะทางอากาศพลศาสตร์ที่สำคัญของปีก 3 อย่าง คือ

1. การแจกแจงแรงยก ซึ่งจะได้จากทฤษฎีของคุตต้า-จูคอวสกี

$$L'(y_o) = \rho_\infty V_\infty \Gamma(y_o) \quad (5.33)$$

2. แรงยกได้จากการรวม L' ตลอดแนวแกนปีกโดยการอินทิเกรต

$$L = \int_{-b/2}^{b/2} L'(y)dy$$

หรือ

$$L = \rho_\infty V_\infty \int_{-b/2}^{b/2} \Gamma(y)dy \quad (5.34)$$

(สังเกตว่าเราละตัวห้อย o ของ y เพื่อความสะดวก)

ค่าสัมประสิทธิ์แรงยกจะได้จาก

$$C_L = \frac{L}{q_\infty S} = \frac{2}{V_\infty S} \int_{-b/2}^{b/2} \Gamma(y)dy \quad (5.35)$$

3. แรงต้านเหนี่ยวนำได้จากการพิจารณา รูป 5.4 แรงต้านเหนี่ยวนำต่อหน่วยระยะทางปีกคือ

$$D'_i = L' \sin \alpha_i$$

เพราะมุม α_i มีค่าน้อย $\sin \alpha_i \cong \alpha_i$

$$D'_i = L' \alpha_i \quad (5.36)$$

แรงต้านเหนี่ยวนำโดยรวมจะได้จากการอินทิเกรตสมการ (5.36) ตลอดแนวปีก

$$D_i = \int_{-b/2}^{b/2} L'(y) \alpha_i(y) dy \quad (5.37)$$

หรือ
$$D_i = \rho_\infty V_\infty \int_{-b/2}^{b/2} \Gamma(y) \alpha_i(y) dy \quad (5.38)$$

และสัมประสิทธิ์แรงต้านเหนี่ยวนำจะเป็น

$$C_{D,i} = \frac{D_i}{q_\infty S} = \frac{2}{V_\infty S} \int_{-b/2}^{b/2} \Gamma(y) \alpha_i(y) dy \quad (5.39)$$

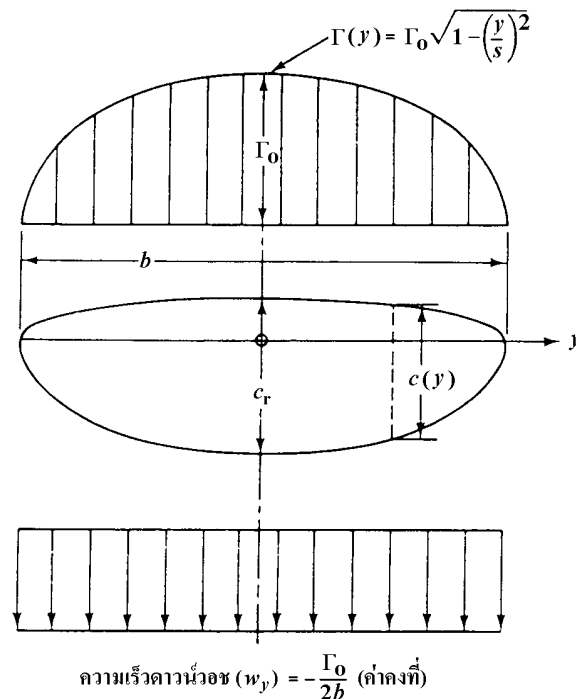
โดยที่ α_i ในสมการเหล่านี้จะได้จากสมการ (5.27)

กุญแจสำคัญของทฤษฎีของพรานด์ คือ $\Gamma(y)$ ที่เป็นคำตอบของสมการ (5.32) เพื่อที่จะนำไปสู่ลักษณะสำคัญทั้ง 3 ของปีก แต่ก่อนที่จะพิจารณาคำตอบทั่วไปของสมการ (5.32) เราจะพิจารณาคำตอบในกรณีพิเศษที่สำคัญอันหนึ่งเสียก่อน

5.5 การแจกแจงแรงยกแบบวงรี (Elliptical lift distribution)

ถ้าการแจกแจงค่าการหมุนวนตามแนวกางปีก กำหนดโดยสมการ

$$\Gamma(y) = \Gamma_0 \sqrt{1 - \left(\frac{2y}{b}\right)^2} \quad (5.40)$$



รูป 5.19 การแจกแจงแรงยกรูปวงรีและความเร็วดาวน้อช (Anderson, 2016)

สมการ (5.40) มีสิ่งน่าสังเกตคือ

1. Γ_o เป็นค่าการหมุนวนที่จุดกึ่งกลางหรือจุดกำเนิด ตามรูป 5.19
2. ค่าการหมุนวนมีการเปลี่ยนแปลงแบบวงรีไปตามระยะ y ตามแนวแกนปีก ดังนั้นจึงคู่กับ “การแจกแจงแรงยกแบบวงรี” (Elliptic lift distribution) และ

เพราะว่า
$$L'(y) = \rho_\infty V_\infty \Gamma(y)$$

จึงได้
$$L'(y) = \rho_\infty V_\infty \Gamma_o \sqrt{1 - \left(\frac{2y}{b}\right)^2}$$

3. $\Gamma(\frac{b}{2})$ และ $\Gamma(-\frac{b}{2}) = 0$ นั่นคือแรงยกและค่าการหมุนวนจะลดค่าลงเป็นศูนย์ที่ปลายปีกทั้งสองข้างตามรูป 5.19

$\Gamma(y)$ ตามสมการ (5.40) ไม่ได้มาจากการแก้สมการ(5.32) เพื่อหาค่า $\Gamma(y)$ แต่มาจากการสมมติว่าแรงยกแจกแจงแบบวงรี คำถามคือ คุณลักษณะของปีกที่มีแรงยกในรูปแบบนี้จะต้องเป็นอย่างไร เราอาจได้คำตอบของคำถามนี้ตามขั้นตอนต่อไปนี้ อันดับแรก คำนวณดาวนัวของปีกที่มีการแจกแจงแรงยกแบบวงรีโดยหาอนุพันธ์ของสมการ (5.40)

$$\frac{d\Gamma}{dy} = -\frac{4\Gamma_o}{2b} \frac{y}{(1 - 4y^2/b^2)^{1/2}} \quad (5.41)$$

แล้วนำไปแทนในสมการ (5.24) จะได้

$$w(y_o) = \frac{\Gamma_o}{\pi b^2} \int_{-b/2}^{b/2} \frac{y}{(1 - 4y^2/b^2)^{1/2} (y_o - y)} dy \quad (5.42)$$

ถ้าเปลี่ยนตัวแปรของการอินทิเกรต ด้วยความสัมพันธ์

$$y = \frac{b}{2} \cos \theta \quad \text{และ} \quad dy = -\frac{b}{2} \sin \theta d\theta$$

การอินทิเกรตจะง่ายขึ้น ดังนั้นสมการ (5.42) เปลี่ยนรูปเป็น

$$w(\theta_o) = -\frac{\Gamma_o}{2\pi b} \int_{\pi}^0 \frac{\cos \theta}{\cos \theta_o - \cos \theta} d\theta$$

หรือ
$$w(\theta_o) = -\frac{\Gamma_o}{2\pi b} \int_0^{\pi} \frac{\cos \theta}{\cos \theta - \cos \theta_o} d\theta \quad (5.43)$$

ค่าอินทิเกรตในสมการ(5.43) ดูคันทาจากบทที่ 4 และมีค่าเท่ากับ π ดังนั้น

$$w(\theta_o) = -\frac{\Gamma_o}{2b} \quad (5.44)$$

ซึ่งแสดงผลลัพธ์สำคัญ และน่าสนใจมากคือ ค่าดาวนัวของจะคงที่ตลอดแนวแกนปีก สำหรับการแจกแจงแรงยกแบบวงรี นำผลที่ได้ไปแทนในสมการ (5.26) จะได้

$$\alpha_i = \frac{-w}{V_\infty} = \frac{\Gamma_o}{2bV_\infty} \quad (5.45)$$

นั่นคือมุมปะทะเหนี่ยวนำจะมีค่าคงที่ตลอดแนวแกนปีกด้วยเช่นกัน สังเกตว่าจากสมการทั้งสอง ทั้ง w

และ α_i จะมีค่าเป็นศูนย์เมื่อระยะทางปีก b เข้าสู่อินฟินิตี้ ซึ่งสอดคล้องกับที่เราได้พิจารณาาก่อนแล้ว สำหรับแผนอากาศสองมิติ

ค่า α_i ที่อยู่ในฟอร์มที่ใช้กันได้กว้างขวางกว่า อาจจะได้จากการแทนสมการ (5.40) ลงในสมการ (5.34)

$$L = \rho_\infty V_\infty \Gamma_o \int_{-b/2}^{b/2} (1 - 4y^2/b^2)^{1/2} dy \quad (5.46)$$

ถ้าใช้การแปลงตัวแปร $y = \frac{b}{2} \cos \theta$ สมการ (5.46) จะเป็น

$$\begin{aligned} L &= \rho_\infty V_\infty \Gamma_o \frac{b}{2} \int_0^\pi \sin^2 \theta d\theta \\ &= \rho_\infty V_\infty \Gamma_o \frac{b}{4} \pi \end{aligned} \quad (5.47)$$

แก้สมการ (5.47) หาค่า Γ_o

$$\Gamma_o = \frac{4L}{\rho_\infty V_\infty b \pi} \quad (5.48)$$

แต่ว่า $L = \frac{1}{2} \rho_\infty V_\infty^2 SC_L$ ดังนั้นสมการ (5.48) จะเป็น

$$\Gamma_o = \frac{2V_\infty SC_L}{b\pi} \quad (5.49)$$

แทนในสมการ (5.45) จะได้

$$\alpha_i = \frac{2V_\infty SC_L}{b\pi} \frac{1}{2bV_\infty}$$

หรือ

$$\alpha_i = \frac{SC_L}{\pi b^2} \quad (5.50)$$

ใช้ความสัมพันธ์ของอัตราเรียวปีก (Aspect ratio) กับ b และ S

$$AR = \frac{b^2}{S}$$

สมการ (5.50) จะเป็น

$$\alpha_i = \frac{C_L}{\pi AR} \quad (5.51)$$

นำ α_i ไปใช้ในสมการ (5.39) จะได้สัมประสิทธิ์

$$\begin{aligned} C_{D,i} &= \frac{2\alpha_i}{V_\infty S} \int_{-b/2}^{b/2} \Gamma(y) dy = \frac{2\alpha_i \Gamma_o}{V_\infty S} \frac{b}{2} \int_0^\pi \sin^2 \theta d\theta \\ &= \frac{\pi \alpha_i \Gamma_o b}{2V_\infty S} \end{aligned} \quad (5.52)$$

แทนค่า Γ_o จากสมการ (5.48) และ α_i จากสมการ (5.50) ลงในสมการ (5.52) จะได้

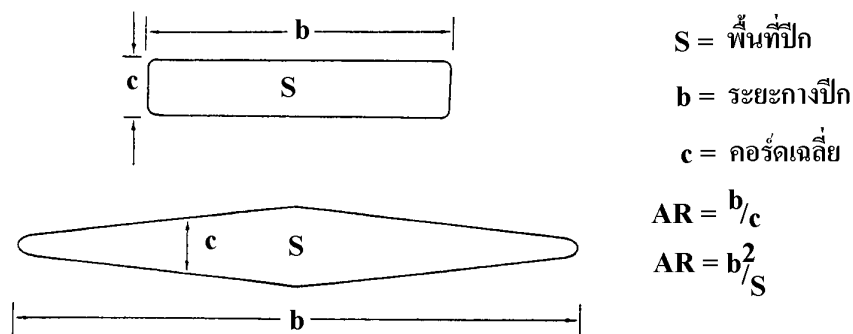
$$C_{D,i} = \frac{\pi b}{2V_\infty S} \frac{C_L}{\pi AR} \frac{2V_\infty S C_L}{b\pi}$$

นั่นคือ

$$C_{D,i} = \frac{C_L^2}{\pi AR} \quad (5.53)$$

สมการ (5.53) มีความสำคัญมาก สรุปได้ว่าสัมประสิทธิ์แรงต้านเหนี่ยวนำจะเป็นสัดส่วนโดยตรงกับกำลังสองของสัมประสิทธิ์แรงยก ความสัมพันธ์นี้ไม่น่าแปลกใจเพราะเหตุผลต่อไปนี้ ในหัวข้อ 5.1 เห็นแล้วว่าแรงต้านเหนี่ยวนำเป็นผลที่เกิดขึ้นจากการเกิดวอร์เทกซ์ที่ปลายปีก ซึ่งเกิดจากความแตกต่างของความดันบริเวณใต้ปีกกับเหนือปีก และแรงยกก็เป็นผลมาจากความต่างความดันนี้เช่นกัน ดังนั้นแรงต้านเหนี่ยวนำจึงมีโยงใยสัมพันธ์กับการเกิดแรงยกของปีก จริงๆ แล้วแรงต้านเหนี่ยวนำมักถูกเรียกว่า “แรงต้านเนื่องจากแรงยก” (Drag due to lift) ซึ่งสมการ (5.53) แสดงให้เห็นอยู่แล้ว ประเด็นที่ชัดเจนคืออากาศยานไม่สามารถสร้างแรงยกโดยไม่สูญเสียอะไรเลย แรงต้านเหนี่ยวนำคือราคาที่ต่อจ่าย โดยกำลังจากเครื่องยนต์ที่ใช้เอาชนะแรงต้านเหนี่ยวนำคือกำลังที่ใช้สร้างแรงยกนั่นเอง นอกจากนี้โปรดสังเกตว่า $C_{D,i} \propto C_L^2$ ดังนั้นสัมประสิทธิ์แรงต้านเหนี่ยวนำจะเพิ่มขึ้นอย่างรวดเร็วเมื่อ C_L เพิ่มขึ้น และจะกลายเป็นแรงต้านส่วนใหญ่ของแรงต้านโดยรวมเมื่อ C_L มีค่าสูง เช่น เมื่อต้องบินด้วยความเร็วต่ำในช่วงวิ่งขึ้นหรือร่อนลง แม้แต่เมื่อบินด้วยความเร็วเดินทางที่สูงแรงต้านเหนี่ยวนำอาจจะมีค่าถึง 1 ใน 4 ของแรงต้านโดยรวม

อีกสิ่งหนึ่งที่สำคัญของแรงต้านเหนี่ยวนำจากสมการ (5.53) คือ $C_{D,i}$ จะแปรผกผันกับค่า AR ดังนั้นเพื่อลดแรงต้านเหนี่ยวนำเราจำเป็นต้องใช้ AR ให้สูงที่สุดที่เป็นไปได้ ปีกที่มี AR สูงและต่ำแสดงเป็นตัวอย่างในรูป 5.20 โชคไม่ดีที่การออกแบบปีกที่มี AR สูงๆ และมีโครงสร้างแข็งแรงเป็นสิ่งที่ทำได้ยาก ดังนั้นค่า AR ของปีกของอากาศยานปกติทั่วไปจะเป็นความเหมาะสมระหว่างความต้องการทางอากาศพลศาสตร์และทางโครงสร้าง



รูป 5.20 ปีกที่มี AR สูงและต่ำ (Anderson, 2016)

คุณสมบัติของการแจกแจงแรงยกแบบวงรีอีกอย่างหนึ่งคือ สำหรับปีกที่ไม่มีการบิดปีก (Twist, นั่นคือ ค่า α คงที่ตลอดแนวปีก) และไม่มีการบิดทางอากาศพลศาสตร์ (Aerodynamics twist, ค่า $\alpha_{L=0}$ คงที่ตลอดแนวปีก หน้าตัดแพนอากาศเป็นรูปเดียวกันตลอดแนวปีก) จากสมการ (5.45) จะเห็นว่า α_i ตลอดแนวปีกจะคงที่ ดังนั้นจาก $\alpha_{eff} = \alpha - \alpha_i$ จะได้ว่า α_{eff} จะคงที่ตลอดแนวปีกด้วย เพราะว่า ค่า c_l ของหน้าตัดเป็น

$$c_l = a_o(\alpha_{eff} - \alpha_{L=0})$$

สมมติ a_o มีค่าเท่ากันทุกหน้าตัด (เท่ากับ 2π จากทฤษฎีแพนอากาศบาง) นั่นคือ c_l จะมีค่าที่ตลอดแนวปีก ค่าแรงยกต่อหน่วยความยาวจะเป็น

$$L'(y) = q_\infty c_l \quad (5.54)$$

แก้สมการ (5.54) เพื่อหาการแจกแจงความยาวคอर्ड

$$c(y) = \frac{L'(y)}{q_\infty c_l} \quad (5.55)$$

ในสมการ (5.55) q_∞ และ c_l มีค่าคงที่ตลอดแนวปีก แต่ $L'(y)$ มีการเปลี่ยนแปลงแบบวงรี ดังนั้นสมการ (5.55) ขี้ว่าสำหรับการแจกแจงแรงยกแบบวงรี ความยาวคอर्डของปีกต้องมีการแจกแจงแบบวงรีตามแนวปีกด้วย หรือสำหรับเงื่อนไขที่ผ่านมา รูปร่างของปีกต้องเป็นรูปวงรี

ความสัมพันธ์ของ การแจกแจงแรงยกแบบวงรี รูปร่างปีกแบบวงรี และดาวนัวช มีค่าคงที่แสดงให้เห็นในรูป 5.19 ถึงแม้จะดูเหมือนว่าการกระจายของการแจกแจงแรงยกแบบวงรีเป็นกรณีจำเพาะแยกจากกรณีอื่น แต่ในความเป็นจริงมันให้ค่าโดยประมาณของ $C_{D,i}$ สำหรับปีกทั่วไปที่สมเหตุสมผลทีเดียว พอร์มของ $C_{D,i}$ ที่ได้จากสมการ (5.53) มีการปรับเปลี่ยนไปเพียงเล็กน้อยสำหรับกรณีทั่วไป ซึ่งเราจะพิจารณากันต่อไป

5.6 การแจกแจงแรงยกทั่วไป (General lift distribution)

พิจารณาการแปลงตัวแปร

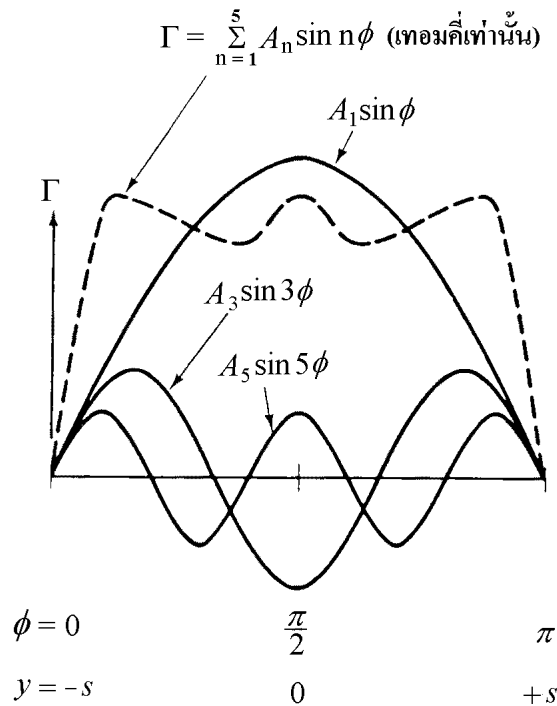
$$y = -\frac{b}{2} \cos \theta$$

ที่พิกัดในทิศทางตามแนวปีกจะเปลี่ยนจาก y เป็น θ ซึ่งมีค่าระหว่าง $0 \geq \theta \geq \pi$ ในเทอมของ θ การแจกแจงแรงยกแบบวงรี จะเขียนได้เป็น

$$\Gamma(\theta) = \Gamma_o \sin \theta \quad (5.56)$$

สมการ (5.56) ขี้ให้เห็นว่าการแทนการแจกแจง Γ ตามแนวปีกโดยใช้อนุกรมซายน์ของฟูเรียร์ (Fourier sine series) น่าจะเหมาะสมสำหรับใช้แสดงการแจกแจงการหมุนวนตามแนวปีกของปีกใดๆ นั่นคือสำหรับกรณีทั่วไปอาจสมมติให้

$$\Gamma(\theta) = 2bV_\infty \sum_{n=1}^N A_n \sin n\theta \quad (5.57)$$



รูป 5.21 การแจกแจงแรงยกแบบสมมาตรที่แทนด้วยอนุกรมฟูรีเยร์ซายน์ (Anderson, 2016)

เมื่อจำนวนเทอม N ในอนุกรมอาจจะใช้จำนวนเท่าใดก็ได้ตามความถูกต้องที่เราต้องการ ค่าสัมประสิทธิ์ A_n (เมื่อ $n = 1, \dots, N$) ในสมการเป็นตัวไม่ทราบค่า แต่อย่างไรก็ตามสมการ (5.57) จะต้องสอดคล้องกับสมการพื้นฐานตามทฤษฎีของพรานด์ หรือค่า A_n จะต้องสมจริงตามสมการ (5.32) ก่อนอื่นหาอนุพันธ์ของสมการ (5.57)

$$\frac{d\Gamma}{dy} = \frac{d\Gamma}{d\theta} \frac{d\theta}{dy} = 2bV_\infty \sum_{n=1}^N nA_n \cos n\theta \frac{d\theta}{dy} \quad (5.58)$$

แทนสมการ (5.58) และ (5.57) ลงในสมการ (5.32) จะได้

$$\alpha(\theta_o) = \frac{2b}{\pi c(\theta_o)} \sum_{n=1}^N A_n \sin n\theta_o + \alpha_{L=0}(\theta_o) + \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \frac{\sum_{n=1}^N nA_n \cos n\theta}{\cos \theta - \cos \theta_o} d\theta \quad (5.59)$$

เทอมอินทิเกรทในสมการ (5.59) อยู่ในรูปมาตรฐาน $\int_0^\pi \frac{\cos \theta}{\cos \theta_o - \cos \theta} d\theta$ ดังนั้นสมการ(5.59) จะมีค่าเป็น

$$\alpha(\theta_o) = \frac{2b}{\pi c(\theta_o)} \sum_{n=1}^N A_n \sin n\theta_o + \alpha_{L=0}(\theta_o) + \sum_{n=1}^N nA_n \frac{\sin n\theta_o}{\sin \theta_o} \quad (5.60)$$

ถ้าพิจารณาสมการ (5.60) ให้ละเอียด จะพบว่าสมการใช้คำนวณค่า ณ ตำแหน่งใดตำแหน่งหนึ่งตามแนวแกนปีก ดังนั้นจึงกำหนดค่า θ_0 ไว้เป็นการเฉพาะ ส่วน $b, c(\theta_0)$ และ $\alpha_{L=0}$ จะเป็นค่าที่มาจากรูปร่างของปีกและแผนอากาศที่ตำแหน่ง θ_0 ของปีก ดังนั้นตัวไม่ทราบค่าในสมการคือ A_n ถ้าเขียนสมการ (5.60) ขึ้นสำหรับตำแหน่ง θ_0 อันหนึ่ง เราจะได้สมการพีชคณิตที่มีตัวไม่ทราบค่า N ตัว คือ $A_1, A_2, \dots, A_n$ แต่ถ้าเราเลือกตำแหน่งตามแนวแกนปีกมา N ตำแหน่ง และเขียนสมการ (5.60) สำหรับแต่ละตำแหน่ง เราจะได้ชุดสมการ N สมการที่มีตัวไม่ทราบค่า N ตัว ที่สามารถแก้โดยวิธีพีชคณิตให้ได้ค่าของ A_n ซึ่งเป็นค่าตัวเลขที่จะทำให้แน่ใจได้ว่า การแจกแจงค่า Γ ตามสมการ (5.57) จะสมจริงกับสมการ (5.32)

เมื่อได้ $\Gamma(\theta)$ จากสมการ(5.57) แล้วจะสามารถคำนวณสัมประสิทธิ์แรงยกของปีกโดยแทนสมการ (5.57) ลงในสมการ (5.35)

$$C_L = \frac{2}{V_\infty S} \int_{-b/2}^{b/2} \Gamma(y) dy = \frac{2b^2}{S} \sum_{n=1}^N A_n \int_0^\pi \sin n\theta \sin \theta d\theta \quad (5.61)$$

อย่าลืมว่า

$$\int_0^\pi \sin n\theta \sin \theta d\theta = \frac{\pi}{2} \quad \text{สำหรับ } n = 1$$

$$= 0 \quad \text{สำหรับ } n \neq 1$$

นั่นคือ

$$C_L = A_1 \pi \frac{b^2}{S} = A_1 \pi AR \quad (5.62)$$

สังเกตว่า C_L ขึ้นอยู่กับสัมประสิทธิ์ตัวแรกของอนุกรมเท่านั้น

ค่าสัมประสิทธิ์แรงต้านเหนี่ยวนำจะได้รับการแทนสมการ (5.57) ในสมการ (5.39)

$$\begin{aligned} C_{D,i} &= \frac{2}{V_\infty S} \int_{-b/2}^{b/2} \Gamma(y) \alpha_i(y) dy \\ &= \frac{2b^2}{S} \int_0^\pi \left(\sum_{n=1}^N A_n \sin n\theta \right) \alpha_i(\theta) \sin \theta d\theta \end{aligned} \quad (5.63)$$

แต่ α_i ในสมการได้จาก

$$\begin{aligned} \alpha_i(y_0) &= \frac{1}{4\pi V_\infty} \int_{-b/2}^{b/2} \frac{(d\Gamma/dy) dy}{(y_0 - y)} \\ &= \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^N n A_n \int_0^\pi \frac{\cos n\theta}{\cos \theta - \cos \theta_0} d\theta \end{aligned} \quad (5.64)$$

ตัวอินทิเกรตในสมการอยู่ในรูปมาตรฐาน ดังนั้น

$$\alpha_i(\theta_0) = \sum_{n=1}^N n A_n \frac{\sin n\theta_0}{\sin \theta_0} \quad (5.65)$$

ในสมการ (5.65) θ_0 เป็นตัวแปรดัมมี่ (dummy) ซึ่งมีค่าจาก $0 \rightarrow \pi$ ตลอดแนวแกนปีก ดังนั้นจึงสามารถแทนที่ด้วย θ ได้ และสมการจะเขียนใหม่ได้เป็น

$$\alpha_i(\theta) = \sum_{n=1}^N n A_n \frac{\sin n\theta}{\sin \theta} \quad (5.66)$$

แทนสมการ (5.66) ลงในสมการ (5.63) จะได้

$$C_{D,i} = \frac{2b^2}{S} \int_0^\pi \left(\sum_{n=1}^N A_n \sin n\theta \right) \left(\sum_{n=1}^N n A_n \sin n\theta \right) d\theta \quad (5.67)$$

สมการ (5.67) มีเทอมที่เกิดจากการคูณกันของ $\sum 2$ ชุดในอินทิเกรต สังเกตว่าจาก

$$\begin{aligned} \int_0^\pi \sin m\theta \sin k\theta d\theta &= \frac{\pi}{2} \quad \text{สำหรับ } m = k \\ &= 0 \quad \text{สำหรับ } m \neq k \end{aligned}$$

ดังนั้นในสมการ (5.67) เทอมที่เป็นผลคูณระหว่างเทอมเลขต่างกัน (เช่น $A_1 A_2, A_2 A_4, \dots$) จะมีค่าเป็นศูนย์ และสมการ (5.67) จะเป็น

$$\begin{aligned} C_{D,i} &= \frac{2b^2}{S} \left(\sum_{n=1}^N n A_n^2 \right) \frac{\pi}{2} = \pi AR \sum_{n=1}^N n A_n^2 \\ &= \pi AR \left(A_1^2 + \sum_{n=2}^N n A_n^2 \right) \\ &= \pi AR A_1^2 \left[1 + \sum_{n=2}^N n \left(\frac{A_n}{A_1} \right)^2 \right] \end{aligned} \quad (5.68)$$

ถ้าแทนค่า C_L ในสมการ (5.62) จะได้

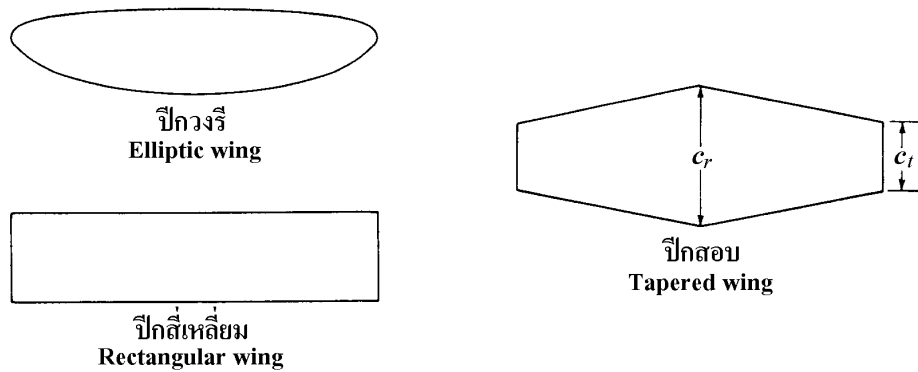
$$C_{D,i} = \frac{C_L^2}{\pi AR} (1 + \delta) \quad (5.69)$$

เมื่อ $\delta = \sum_{n=2}^N n \left(\frac{A_n}{A_1} \right)^2$ สังเกตว่า $\delta \geq 0$ เสมอ ดังนั้นตัวคูณ $(1 + \delta)$ ในสมการจะมีค่ามากกว่าหรือเท่ากับ 1 เสมอ ถ้าเรานิยาม “ตัวประกอบประสิทธิภาพของระยะกางปีก” (Span efficiency factor), e , โดยที่ $e = \frac{1}{1 + \delta}$ ดังนั้นสมการ (5.69) จะเป็น

$$C_{D,i} = \frac{C_L^2}{\pi e AR} \quad (5.70)$$

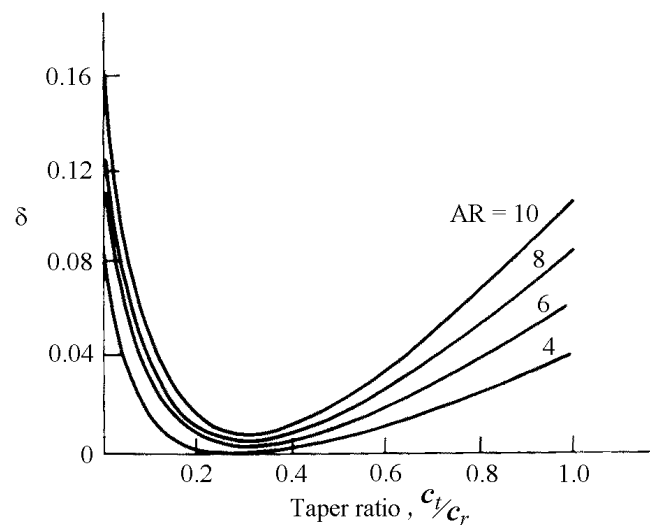
เมื่อ $e \leq 1$ เปรียบเทียบสมการ (5.69) และ (5.70) กับสมการ (5.53) สำหรับการแจกแจงแรงยกแบบวงรี จะเห็นว่า $\delta = 0$ และ $e = 1$ สำหรับการแจกแจงแรงยกแบบวงรี นั่นคือการแจกแจงแรงยกที่ทำให้เกิดแรงต้านเหนี่ยวนำต่ำที่สุดคือแบบวงรี อันนี้เองเป็นเหตุที่ทำให้เราสนใจการแจกแจงแรงยกแบบวงรี

คงจำได้ว่าสำหรับปีกที่ไม่มีการบิดปีก การทำให้การแจกแจงแรงยกเป็นแบบวงรีทำได้โดยใช้ปีกที่มีรูปร่างเป็นรูปวงรี ตามที่แสดงในรูป 5.22 มีอากาศยานหลายแบบในอดีตที่ถูกออกแบบให้มีรูปปีก



รูป 5.22 ปีกตรงที่มีรูปร่างต่าง ๆ (Anderson, 2016)

เป็นวงรี เช่น “Spitfire” ในช่วง WW II อย่างไรก็ตามปีกรูปวงรีมีข้อยุ่งยากในการสร้างและมีราคาแพงเมื่อเทียบกับปีกที่มีรูปร่างธรรมดาอย่างสี่เหลี่ยม แต่ปีกสี่เหลี่ยมก็มีข้อเสียที่สร้างแรงยกที่มีการแจกแจงห่างไกลจากลักษณะที่ดีที่สุด ข้อดีข้อเสียระหว่างทั้งสองด้านทำให้ได้ผลสรุปมาเป็นปีกที่มีการสอบปีก (Taper) ซึ่งออกแบบให้มีอัตราส่วน $\lambda = c_t/c_r$ ที่จะทำให้ได้การแจกแจงแรงยกใกล้เคียงกับแบบวงรี การเปลี่ยนแปลงค่า δ เป็นฟังก์ชันของ λ สำหรับปีกที่มีค่า AR ต่างๆ แสดงให้เห็นในรูป 5.23 ซึ่งเป็นผลการคำนวณ สังเกตว่าปีกที่มีการสอบปีก สามารถออกแบบให้มีแรงต้านเหนียวใกล้เคียงกับค่าต่ำสุด และยังสร้างได้ง่ายกว่าปีกรูปวงรีมากอีกด้วย ดังนั้นอากาศยานส่วนใหญ่จึงเลือกใช้ปีกที่มีการสอบปีก มากกว่าปีกรูปวงรี



รูป 5.23 ตัวประกอบ δ เป็นฟังก์ชันของอัตราสอบปีก (Taper ratio) (Bertin & Cummings, 2025)

ตัวอย่าง 5.1 ปีกมีรูปร่างแบบวงรี และมีการแจกแจงแรงยกแบบวงรี มี $AR = 6$ มีระยะทางปีก 12 m ถ้าภาระกรรมปีก (Wing loading) เท่ากับ 900 N/m^2 เมื่อบินที่ความเร็ว 250 km/hr ที่ระดับน้ำทะเล จงคำนวณแรงต้านเหนี่ยวนำสำหรับปีกอันนี้

วิธีทำ พื้นที่ปีกและแรงยกของปีก เป็น

$$S = \frac{b^2}{AR} = \frac{12^2}{6} = 24 \text{ m}^2 \quad L = 21,600 \text{ N.}$$

เนื่องจากรูปร่างและการแจกแจงแรงยกเป็นแบบวงรี ดังนั้นค่าสัมประสิทธิ์แรงยกของหน้าตัดแผนอากาศจะมีค่าคงที่ตลอดแนวปีก และเท่ากับสัมประสิทธิ์แรงยกของปีก ดังนั้น

$$c_l = C_L = \frac{L}{q_\infty S} = 0.845$$

แรงต้านเหนี่ยวนำคำนวณจากสมการ (5.39) และ (5.53)

$$D_i = \frac{1}{2} \rho_\infty V_\infty^2 C_{D,i} S = \frac{LC_{D,i}}{C_L} = \frac{LC_L}{\pi AR} = 969 \text{ N}$$

ตอบ

ซึ่งมีค่า 4.49 % ของแรงยก

การคำนวณแสดงว่าสำหรับสัมประสิทธิ์แรงยกที่ให้ และพื้นที่ปีกที่กำหนดแรงต้านเหนี่ยวนำจะแปรผกผันกับ AR

กำลังจากเครื่องยนต์ที่ต้องใช้เพื่อเอาชนะแรงต้านเหนี่ยวนำของปีกนี้ คือ

$$P = D_i V_\infty = 40,375 \text{ N-m/s (J/s) (54.14 HP.)}$$

ตอบ

ตัวอย่าง 5.2 จงวิเคราะห์คุณสมบัติของปีกรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าที่มีค่า $AR = 6$ บินที่มุมปะทะ α ปีกไม่มีการบิดปีก สมมติให้หน้าตัดแผนอากาศของปีกเป็นแบบไม่มีความโค้ง นั่นคือ $\alpha_{L=0} = 0$ ตลอดแนวปีก

วิธีทำ ปีกเป็นรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า ดังนั้นความยาวคอร์ดจะมีค่าคงที่ $c(y) = c$ และสมมติให้ค่าความชันของโค้งแรงยกของหน้าตัดแผนอากาศ $a_o = 2\pi$ ดังนั้นสมการ (5.60) จะเป็น

$$\alpha(\theta_o) = \frac{2b}{\pi c} \sum_{n=1}^N A_n \sin n\theta_o + \sum_{n=1}^N n A_n \frac{\sin n\theta_o}{\sin \theta_o}$$

ทั้งตัวห้อย o เพื่อความสะดวก และสำหรับปีกสี่เหลี่ยมผืนผ้า $\frac{b}{c} = AR$ ดังนั้นจะได้

$$\alpha(\theta) = \frac{2AR}{\pi} \sum_{n=1}^N A_n \sin n\theta \left(1 + \frac{n\pi}{2AR \sin \theta}\right) \quad (i)$$

สังเกตว่าการแจกแจงแรงยกบนปีกจะสมมาตร ดังนั้นจากรูป 5.21 สัมประสิทธิ์ A_n จะมีค่าเฉพาะ $n = 1, 3, 5, 7, 9, \dots$ เลือกให้ $N = 7$ นั่นคือ เลือกอนุกรมที่ประกอบด้วย 4 เทอมสำหรับ

แทนการแจกแจง Γ และจาก $AR = 6$ ดังนั้นทุกตำแหน่ง $\theta = \cos^{-1}(2y/b)$ ตามแนวทางปีกสมการ (1) จะสมจริงเสมอเขียนสมการ (i) ใหม่เป็น

$$A_1 \sin \theta \left(1 + \frac{\pi}{12 \sin \theta}\right) + A_3 \sin 3\theta \left(1 + \frac{3\pi}{12 \sin \theta}\right) + A_5 \sin 5\theta \left(1 + \frac{5\pi}{12 \sin \theta}\right) + A_7 \sin 7\theta \left(1 + \frac{7\pi}{12 \sin \theta}\right) = \alpha \left(\frac{\pi}{2AR}\right)$$

เพื่อหาค่า A_1 A_3 A_5 และ A_7 เลือกตำแหน่ง 4 ตำแหน่งตามแนวทางปีกข้างหนึ่ง (เพราะแรงยกสมมาตรบนปีก) ในที่นี้เลือก $\theta = \frac{\pi}{8}$, $\frac{\pi}{4}$, $\frac{3\pi}{8}$ และ $\frac{\pi}{2}$ จะได้ชุดสมการสี่สมการที่มีตัวไม่ทราบค่าสี่ตัว ดังนี้

$$0.6445 A_1 + 2.8200 A_3 + 4.0841 A_5 + 2.2153 A_7 = \alpha \left(\frac{\pi}{2AR}\right)$$

$$0.9689 A_1 + 14.925 A_3 - 2.0161 A_5 - 2.5397 A_7 = \alpha \left(\frac{\pi}{2AR}\right)$$

$$1.1857 A_1 - 0.7080 A_3 - 0.9249 A_5 + 2.7565 A_7 = \alpha \left(\frac{\pi}{2AR}\right)$$

$$1.2618 A_1 - 1.7854 A_3 + 2.3090 A_5 - 2.8326 A_7 = \alpha \left(\frac{\pi}{2AR}\right)$$

ซึ่งคำตอบของสมการเป็น

$$A_1 = 0.2402 \alpha, \quad A_3 = 0.0289 \alpha, \quad A_5 = 0.0057 \alpha, \quad A_7 = 0.00099 \alpha$$

เพราะฉะนั้นสัมประสิทธิ์แรงยกของปีกจะได้จากสมการ (5.62)

$$C_L = \pi AR A_1$$

$$= 4.527 \alpha$$

ตอบ

และสัมประสิทธิ์แรงต้านเหนี่ยวนำได้จากสมการ (5.69)

$$C_{D,i} = \frac{C_L^2}{\pi AR} (1 + \delta)$$

$$\text{เมื่อ } \delta = \sum_{n=2}^N n \left(\frac{A_n}{A_1} \right)^2 = \frac{3A_3^2 + 5A_5^2 + 7A_7^2}{A_1^2} = 0.0464$$

$$\text{เพราะฉะนั้น } C_{D,i} = \frac{(4.527\alpha)^2}{\pi(6)} (1 + 0.0464)$$

ซึ่งมีค่าประมาณ 5 % สูงกว่า $C_{D,i}$ ของปีกวงรีที่มี AR เท่ากัน อีกประการหนึ่งเมื่อเปรียบเทียบกับสัมประสิทธิ์แรงยกของปีกที่มีค่า AR เท่ากัน และมีแรงยกกระจายอย่างวงรี (หัวข้อ 5.8) ซึ่งมีค่าความชันโค้งแรงยกตามสมการ (5.79)

$$(C_L)_{el} = \frac{a_o \alpha}{1 + a_o / \pi AR} = 4.7124 \alpha$$

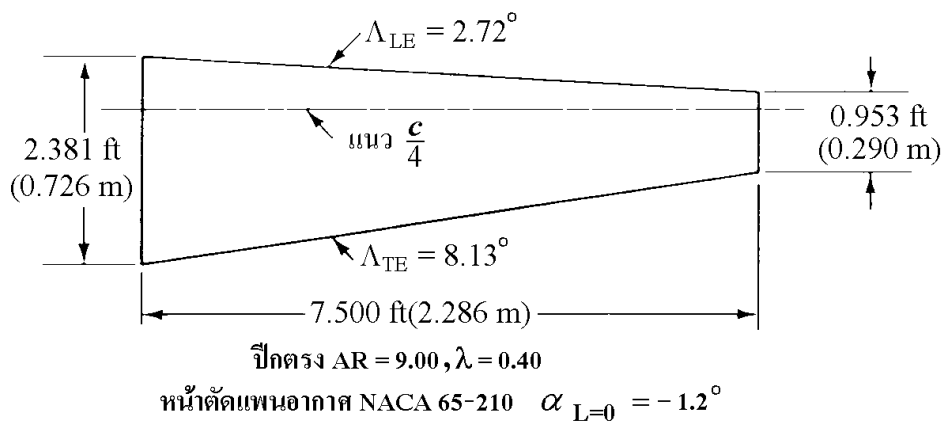
จะเห็นว่าเส้นโค้งแรงยกของปีกสี่เหลี่ยมผืนผ้า มีความชันต่ำกว่าประมาณ 4 % ผลลัพธ์ที่ได้ ยืนยันถึงลักษณะที่ได้กล่าวไว้ในตอนต้นว่าคุณสมบัติของปีกที่มีรูปร่างต่างไปจะใกล้เคียงกับปีกวงรี (Elliptic wing) สังเกตด้วยว่าสัมประสิทธิ์ A_n ของอนุกรมฟูเรียร์ที่ใช้แทนการแจกแจง Γ บนปีกมีค่าที่ ส่งผลกับอนุกรมจริงๆ ไม่ก็เทอม ในตัวอย่างของเราค่าสัมประสิทธิ์ตัวที่ 7 $A_7 = 0.000995$ ถ้าทำการ คำนวณต่อไปโดยใช้สัมประสิทธิ์มากตัวกว่านี้ สัมประสิทธิ์ตัวต่อไป เช่น A_9 จะมีค่าน้อยลงไปอีกจน เกือบไม่มีผลกับค่า $\Gamma(y)$ โดยทั่วไปสำหรับปีกที่มีแรงยกสมมาตรกันบนปีกทั้งสองข้างและไม่มีการบิด ปีกมากนัก Glauert แสดงให้เห็นว่าการใช้สัมประสิทธิ์ A_n เพียง 4 ตัวจะให้รายละเอียดของแรง เพียงพอสำหรับการวิเคราะห์โดยวิธีนี้

ในกรณีที่ไม่ต้องการรายละเอียดมากนักอาจลดจำนวนสัมประสิทธิ์ A_n ในอนุกรมเหลือเพียง 3 ตัวเพื่อความสะดวก ในกรณีนี้ของตัวอย่าง 5.2 จะคำนวณสัมประสิทธิ์ได้

$$A_1 = 0.2398\alpha \quad A_2 = 0.02799\alpha \quad A_3 = 3.9793 \times 10^{-3}\alpha$$

ซึ่งใกล้เคียงกับคำตอบแรกสำหรับสัมประสิทธิ์ 4 ตัว

ตัวอย่าง 5.3 จงคำนวณคุณสมบัติของปีกที่มีรูปร่างตามที่ปรากฏในรูป มีหน้าตัดแพนอากาศเป็น NACA 65-210 คงที่ และไม่มีมุมบิดปีก ค่า AR ของปีก = 9 และ Taper ratio = 0.4 ที่มุมปะทะ 4°



วิธีทำ รูปร่างปีกเป็นสี่เหลี่ยมคางหมู $AR = 9$ $\lambda = 0.4$ เพราะฉะนั้นพื้นที่ปีกเป็น

$$S = 0.5(c_r + c_t)b = 0.5 c_r(1 + \lambda)b$$

และ

$$AR = \frac{2b}{c_r + c_t}$$

จะได้ความสัมพันธ์จากสมการ (5.60)

$$\alpha(\theta_o) = \frac{4b}{a_o c(\theta_o)} \sum_{n=1}^N A_n \sin n\theta_o + \alpha_{L=0}(\theta_o) + \sum_{n=1}^N n A_n \frac{\sin n\theta_o}{\sin \theta_o} \quad (1)$$

เมื่อ $\alpha(\theta_o) = 4^\circ$ $\alpha_{L=0}(\theta_o) = -1.2^\circ$ $c(y_o) = c_r - (c_r - c_t) \frac{y_o}{(b/2)}$

เพื่อความสะดวกเลือกพิจารณาบนปีกซ้าย $c(\theta_o) = c_r [1 - (1 - \lambda) \cos \theta_o]$

นั่นคือ
$$\frac{4b}{a_o c(\theta_o)} = \frac{2ARc_r(1 + \lambda)}{a_o c(\theta_o)} = \frac{2AR(1 + \lambda)}{a_o [1 - (1 - \lambda) \cos \theta_o]}$$

แทนค่า $AR = 9$ $\lambda = 0.4$ และ $a_o = 2\pi$ จะได้

$$= \frac{1}{0.24933(1 - 0.6 \cos \theta_o)}$$

$$= \frac{4.011}{(1 - 0.6 \cos \theta_o)}$$

แทนค่าในสมการ (1) แล้วจัดเทอมใหม่จะได้

$$(\alpha(\theta_o) - \alpha_{L=0}(\theta_o)) = \frac{4.011}{(1 - 0.6 \cos \theta_o)} \sum_{n=1}^N A_n \sin n\theta_o + \sum_{n=1}^N nA_n \frac{\sin n\theta_o}{\sin \theta_o}$$

เลือกใช้สัมประสิทธิ์ A_n ในอนุกรมเพียง 4 เทอม A_1, A_3, A_5, A_7 จะได้

$$0.09076 = \frac{4.011}{(1 - 0.6 \cos \theta_o)} [A_1 \sin \theta_o + A_3 \sin 3\theta_o + A_5 \sin 5\theta_o + A_7 \sin 7\theta_o]$$

$$+ \frac{1}{\sin \theta_o} [A_1 \sin \theta_o + 3A_3 \sin 3\theta_o + 5A_5 \sin 5\theta_o + 7A_7 \sin 7\theta_o] \quad (2)$$

เลือกตำแหน่ง θ_o ตามแนวกางปีก 4 ตำแหน่ง คือที่ $\theta_o = \frac{\pi}{8}, \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{8}$ และ $\frac{\pi}{2}$ แทนค่าในสมการ

(2) เพื่อหาค่า A_n จะได้

$$\theta_o = \frac{\pi}{8} \Rightarrow 0.00386 = 0.18897 A_1 + 0.66154 A_3 + 0.86686 A_5 + 0.44411 A_7$$

$$\theta_o = \frac{\pi}{4} \Rightarrow 0.00921 = 0.60150 A_1 + 0.80451 A_3 - 1.00752 A_5 - 1.21053 A_7$$

$$\theta_o = \frac{3\pi}{8} \Rightarrow 0.01611 = 1.03101 A_1 - 0.57407 A_3 - 0.72109 A_5 + 2.09577 A_7$$

$$\theta_o = \frac{\pi}{2} \Rightarrow 0.02263 = 1.24933 A_1 - 1.74799 A_3 + 2.24665 A_5 - 2.74531 A_7$$

แก้สมการได้สัมประสิทธิ์ $A_1 = 1.6459 \times 10^{-2}$ $A_3 = 7.3218 \times 10^{-5}$ $A_5 = 8.5789 \times 10^{-4}$

$$A_7 = -9.6964 \times 10^{-5}$$

เพราะฉะนั้น ค่า C_L ที่มุมปะทะ 4° จะเป็น

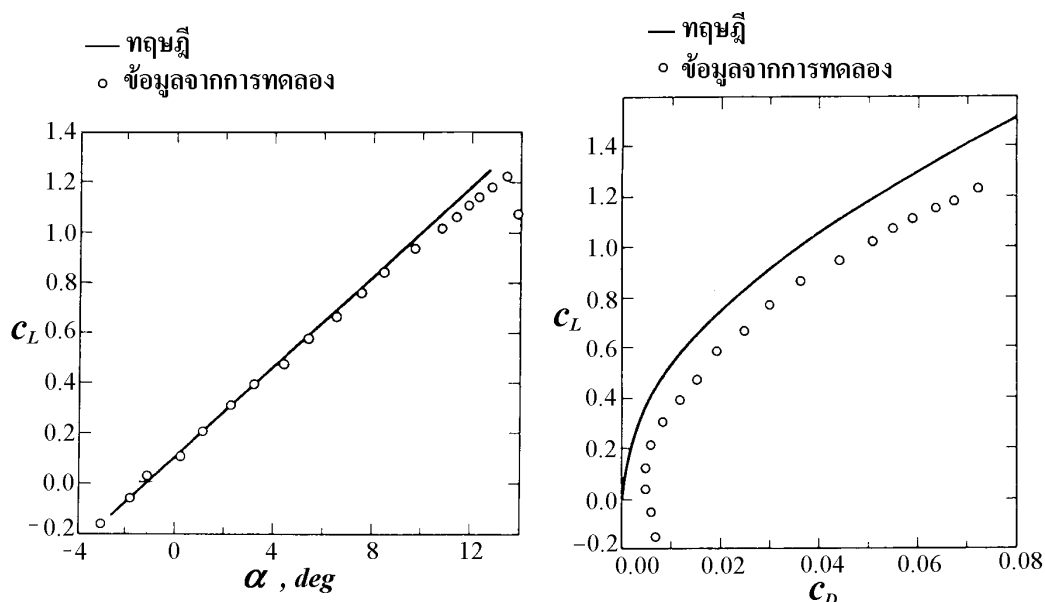
$$C_L = A_1 \pi AR = 0.4654 \quad \text{ตอบ}$$

และค่า $C_{D,i}$ ที่มุมปะทะ 4° จะเป็น

$$C_{D,i} = \frac{C_L^2}{\pi AR} \left(1 + \frac{3A_3^2}{A_1^2} + \frac{5A_5^2}{A_1^2} + \frac{7A_7^2}{A_1^2}\right)$$

$$= 0.00766 (1.0136) = 0.000776 \quad \text{ตอบ}$$

ตัวอย่างนี้เหมือนกับตัวอย่าง 5.2 แม้ปีกจะมีรูปร่างแตกต่างออกไปแต่การกระจายแรงยกตามแนวแกนปีก ถึงแม้จะไม่ใช้แบบวงรีก็มีค่าใกล้เคียง ดังที่เห็นได้จากสัมประสิทธิ์ A_n ของอนุกรมฟูเรียร์ที่มีค่าน้อยมากหลังจากเทอมที่ 7 เป็นต้นไป



รูป 5.24 C_L และ C_D ของปีกตามตัวอย่าง 5.3 จากผลการทดลองเปรียบเทียบกับผลการคำนวณ (Anderson, 2016)

ผลการคำนวณตามตัวอย่าง 5.3 เมื่อนำไปเปรียบเทียบกับผลการทดลองในอุโมงค์ลม จะได้ผลลัพธ์ตามรูป 5.24 สังเกตได้ว่าผลการคำนวณให้คำตอบที่น่าพอใจ

อีกประการหนึ่งในการพิจารณาสัมประสิทธิ์แรงต้านของปีก การคำนวณพิจารณาเฉพาะแรงต้านเหนี่ยวนำและไม่ได้นำผลจากแรงเสียดทานผิวไว้ด้วย ดังนั้นความแตกต่างของการคำนวณและการทดลองของโค้งความสัมพันธ์ระหว่าง C_L และ C_D (เรียก Drag polar) จะเป็นส่วนที่เป็นผลจากแรงเสียดทานผิวดังที่ได้กล่าวไว้ในหัวข้อ 5.1

ตัวอย่าง 5.4 พิจารณาปีกสอบ และมีมุมบิดปีกที่มีคุณสมบัติที่โคนปีกและที่ปลายปีกเป็น

	โคน	ปลาย
คอร์ด	3.048 m	1.524 m
a_0	5.5/rad	5.8/rad
มุมปะทะสมบูรณ์	5.5°	3.5°

ให้ถือว่าคุณสมบัติมีการเปลี่ยนแปลงเป็นแบบเชิงเส้นจากโคนปีกไปยังปลายปีก และปีกมีระยะทางปีก 12.192 m จงคำนวณคุณลักษณะของปีก

วิธีทำ จากข้อมูลปีก พื้นที่ปีก $S = 0.5 (c_r + c_t) b$

$$= 0.5 (3.048 + 1.524) 12.192 \text{ m}^2$$

$$= 27.85 \text{ m}^2$$

$$AR = \frac{b^2}{S}$$

$$= \frac{12.192^2 \text{ m}^2}{27.85 \text{ m}^2}$$

$$= 5.333$$

ที่ระยะ y ใดๆ จากโคนปีก (θ จากปลายปีก)

$$c = c_r - (c_r - c_t) \frac{y}{b/2} = 3.048(1 - 0.5 \cos \theta)$$

$$a_o = 5.5 \left(1 + \frac{5.5 - 5.8}{5.5} \frac{y}{b/2} \right)$$

$$= 5.5 (1 + 0.5455 \cos \theta)$$

$$(\alpha - \alpha_{L=0}) = \alpha_a = 5.5 \left[1 - \frac{5.5 - 3.5}{5.5} \frac{y}{b/2} \right]$$

$$= 5.5 (1 - 0.36364 \cos \theta)$$

นำไปแทนค่าในสมการ (5.60)

$$\alpha(\theta_o) = \frac{4b}{a_o c(\theta_o)} \sum_{n=1}^N A_n \sin n\theta_o + \alpha_{L=0}(\theta_o) + \sum_{n=1}^N n A_n \frac{\sin n\theta_o}{\sin \theta_o}$$

$$\alpha(\theta_o) - \alpha_{L=0}(\theta_o) = \frac{4b}{a_o c(\theta_o)} \sum_{n=1}^N A_n \sin n\theta_o + \sum_{n=1}^N n A_n \frac{\sin n\theta_o}{\sin \theta_o}$$

ที่ค่า θ_o ต่างกัน 4 ค่า คือที่ $\theta_o = \frac{\pi}{8}, \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{8}$ และ $\frac{\pi}{2}$ เพื่อหาค่า A_n

$$\text{ที่ } \theta_o = \frac{\pi}{8} \Rightarrow 0.004739 = 0.22079 A_1 + 0.89202 A_3 + 1.25100 A_5 + 0.66688 A_7$$

$$\theta_o = \frac{\pi}{4} \Rightarrow 0.011637 = 0.66319 A_1 + 0.98957 A_3 - 1.31595 A_5 - 1.64234 A_7$$

$$\theta_o = \frac{3\pi}{8} \Rightarrow 0.032998 = 1.11573 A_1 - 0.67935 A_3 - 0.89654 A_5 + 2.68878 A_7$$

$$\theta_o = \frac{\pi}{2} \Rightarrow 0.032998 = 1.34375 A_1 - 2.03125 A_3 - 2.71875 A_5 - 3.40625 A_7$$

เมื่อแก้สมการจะได้

$$A_1 = 0.020329 \quad A_3 = -0.000955 \quad A_5 = 0.001029 \quad A_7 = -0.0002766$$

นั่นคือ

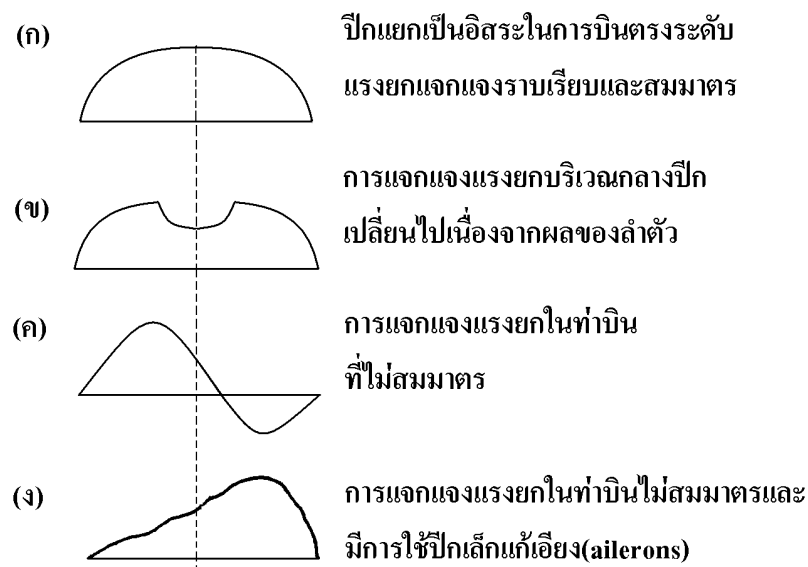
$$C_L = \pi A_1 AR$$

$$\begin{aligned}
&= 0.3406 \\
C_{D,i} &= \frac{C_L^2}{\pi AR} (1 + \delta) \\
&= \frac{C_L^2}{\pi AR} \left(1 + \frac{3A_3^2}{A_1^2} + \frac{5A_5^2}{A_1^2} + \frac{7A_7^2}{A_1^2} \right) \\
&= 0.007068
\end{aligned}$$

ตอบ

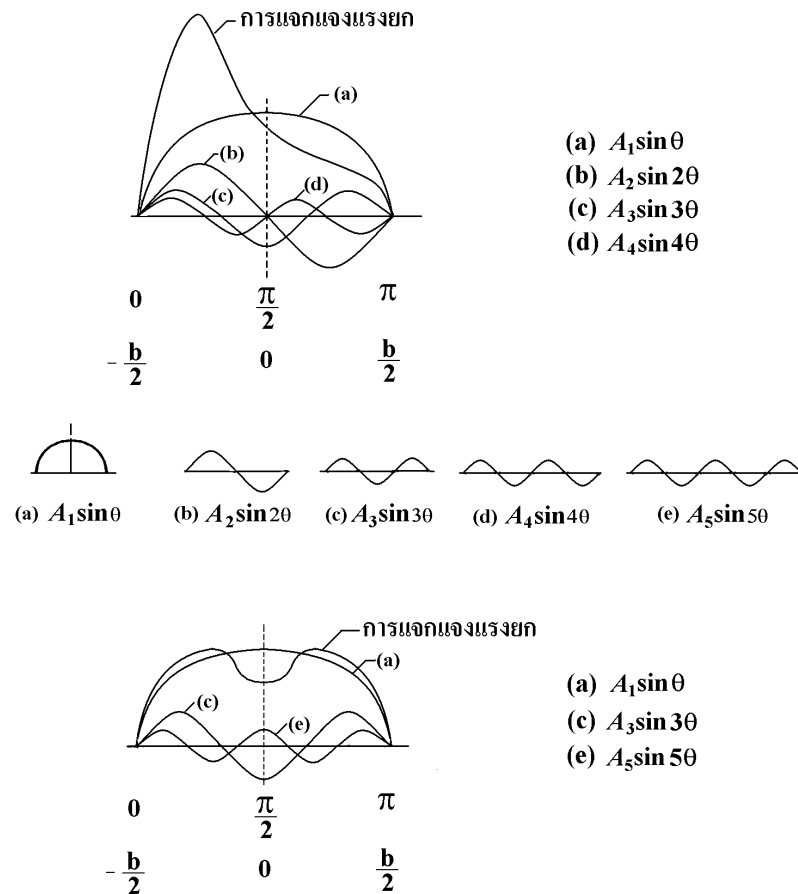
5.7 การแจกแจงแรงยกทั่วไปแบบไม่สมมาตร (Asymmetrical lift distribution)

ในหัวข้อ 5.4.4 ได้ใช้วิธีการแทนแรงยกที่มีการแจกแจงอย่างทั่วไปแบบสมมาตร โดยใช้อนุกรมฟูรีเยร์ที่มีเฉพาะสัมประสิทธิ์ที่เป็นเทอมคี่ ผลการคำนวณให้คำตอบที่น่าพอใจเมื่อใช้สัมประสิทธิ์ในอนุกรมเพียง 4 เทอม แต่วิธีการที่ใช้ยังคงจำกัดอยู่เฉพาะกรณีที่มีการแจกแจงแรงยกเป็นศูนย์ที่ปลายและเพิ่มค่าขึ้นจนสูงสุดที่โคนปีกจากปลายปีกทั้งสองด้าน แต่ในความเป็นจริง การที่ลำตัวอากาศยานมีตำแหน่งอยู่ที่กึ่งกลางของปีก หรือกะเปาะเครื่องยนต์ที่ตำแหน่งใดๆ ตามแนวกางปีกจะมีผลต่อลักษณะการแจกแจงแรงยกเฉพาะตำบลให้มีการเปลี่ยนแปลงไปจากรูปแบบพื้นฐานได้ทั้งสิ้น ยิ่งไปกว่านั้นการแจกแจงแรงยกบนปีกจะเปลี่ยนแปลงไปอย่างสิ้นเชิงในลักษณะการบินที่ไม่สมมาตร อย่างเช่นในขณะที่มีการใช้ปีกเล็กแก้อียง (Ailerons) หรือขณะอากาศยานอยู่ในอาการหมุนรอบแกนลำตัว (Roll) ซึ่งปีกข้างที่หมุนขึ้นจะมีค่าแรงยกลดลงอย่างมาก และอาจจะมีค่าเป็นลบที่มุมปะทะอันหนึ่งได้ ในกรณีเหล่านี้การแจกแจงแรงยกของเราแน่นอนว่าจะไม่ราบเรียบและสมมาตรกับแกนกลาง แต่อาจจะมีการบิดเบี้ยวและไม่สมมาตรอย่างที่เราแสดงในรูป 5.25 ก็ได้



รูป 5.25 การแจกแจงแรงยกแบบต่างๆบนปีก (Kuethe & Chow, 1997)

สังเกตว่าถึงแม้การแจกแจงแรงยกจะมีลักษณะอย่างไรก็ตาม แต่การแทนการแจกแจง Γ ตามแนวทางปิกด้วยสมการ $\Gamma = 2bV_\infty \sum_{n=1}^N A_n \sin n\theta$ ยังคงกระทำได้เช่นเดิม เพียงแต่สำหรับ การแจกแจงแบบไม่สมมาตร สัมประสิทธิ์ A_n ในอนุกรมจะไม่ใช้มีเพียงเทอมคี่เท่านั้น แต่จะ ประกอบด้วยเทอมคู่ด้วย รูป 5.26 แสดงลักษณะสำคัญนี้



รูป 5.26 การแจกแจงแรงยกโดยกำหนดจากอนุกรมฟูรีเยร์ซายน์ (Kuethe & Chow, 1997)

โดยการกำหนดการแจกแจง Γ ตามแนวทางปิกด้วยอนุกรมฟูรีเยร์ซายน์เราอาจวิเคราะห์ได้เช่นเดียวกับในหัวข้อ 5.6 ว่า

$$L = \int_{-b/2}^{b/2} \rho_\infty V_\infty \Gamma dy = \int_0^\pi \rho_\infty V_\infty 2bV_\infty \sum_{n=1}^N A_n \sin n\theta \frac{b}{2} \sin \theta d\theta$$

$$L = \rho_\infty V_\infty^2 b^2 \int_0^\pi \sum_{n=1}^N A_n \sin n\theta \sin \theta d\theta$$

แทนค่า $b^2 = AR \cdot S$ จะได้ผลลัพธ์เหมือนกับสมการ (5.62)

$$C_L = \frac{L}{\frac{1}{2}\rho_\infty V_\infty^2 S} = \pi A_1 AR \quad (5.71)$$

ทำนองเดียวกันเราอาจสรุปได้ว่า

$$C_{D,i} = \frac{C_L^2}{\pi AR} (1 + \delta) \quad (5.72)$$

$$\text{เมื่อ } \delta = \sum_{n=2}^N n \left(\frac{A_n}{A_1} \right)^2 = \frac{3A_3^2 + 5A_5^2 + 7A_7^2 + \dots + nA_n^2}{A_1^2}$$

สมการ (5.71) และ (5.72) เป็นสมการเดียวกับสมการ (5.62) และ (5.69) ในหัวข้อ 5.6 เพียงแต่ว่าสัมประสิทธิ์ A_n ในสมการจะไม่จำกัดอยู่เฉพาะเทอมเลขคู่และมีจำนวนเทอมน้อยเพียง 4 เทอม แต่สัมประสิทธิ์ A_n ของอนุกรมจะต้องมีจำนวนเทอมมากพอที่จะแทนลักษณะการแจกแจงแรงยกที่เกิดขึ้นบนปีกได้อย่างเหมาะสม การหาค่าสัมประสิทธิ์ A_n อาจทำได้เช่นเดียวกันกับวิธีที่ใช้กับตัวอย่าง 5.2 5.3 และ 5.4 เพียงแต่จะต้องกำหนดตำแหน่งตามแนวแกนปีก (θ จาก $0 \rightarrow \pi$) เป็นจำนวนหลายจุด เพื่อให้สอดคล้องกับจำนวนสัมประสิทธิ์ A_n ที่ต้องการ เพื่อให้การแทนการแจกแจงแรงยกสมจริง

5.8 ผลของอัตราเรียวยาวปีก (Effect of Aspect Ratio)

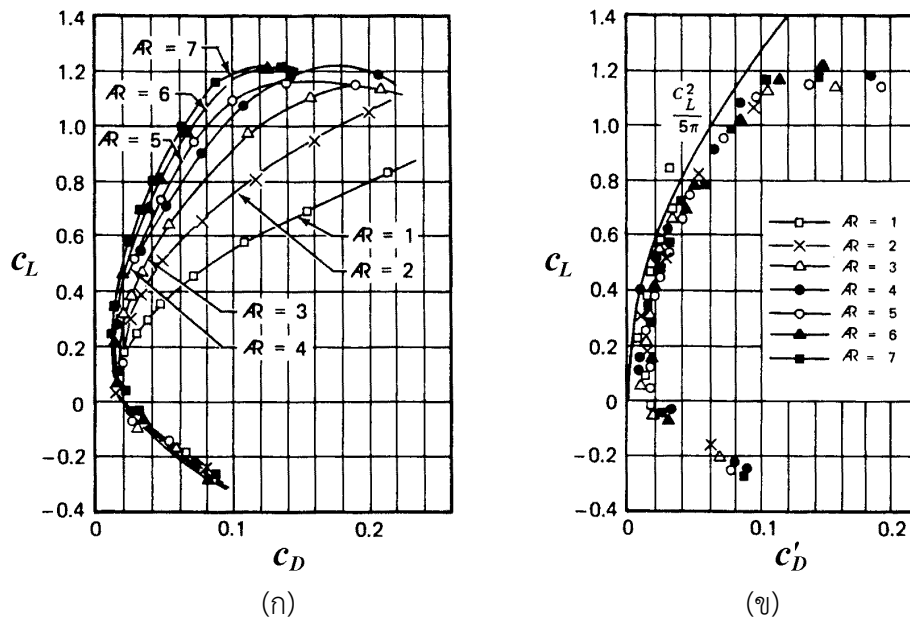
ดังที่ได้กล่าวแล้วว่าสำหรับการบินตรงระดับการแจกแจงแรงยกบนปีกตรงที่มีรูปร่างใดๆ จะแตกต่างไปจากการแจกแจงอย่างวงรีเพียงเล็กน้อยเท่านั้น และแรงต้านเหนี่ยวนำจะเป็นสัดส่วนกลับกับค่าอัตราเรียวยาว (Aspect ratio, AR) ของปีกตามสมการ (Anderson, 2016)

$$C_{D,i} = \frac{C_L^2}{\pi AR} (1 + \delta) \quad (5.69)$$

ค่า δ ในสมการมีค่าน้อย เพราะฉะนั้นค่า AR ที่มีค่าอยู่ระหว่าง 6 ถึง 22 สำหรับอากาศยานความเร็วต่ำกว่าเสียงทั่วไปและเครื่องร่อนจึงมีผลต่อการเปลี่ยนแปลงค่า $C_{D,i}$ มากกว่าผลจากค่า δ ซึ่งจากตัวอย่างที่ผ่านมาและจากรูป 5.23 จะมีค่าอยู่ระหว่าง 0 ถึง 0.25 สำหรับการเปลี่ยนแปลงค่า AR ในช่วงใช้งาน เพราะฉะนั้นสิ่งที่ถูกคำนึงถึงเป็นประการแรกสำหรับความพยายามลดแรงต้านเหนี่ยวนำในการออกแบบปีก จึงไม่ใช่การที่จะพยายามทำให้การกระจายแรงยกเป็นแบบวงรี หรือใกล้เคียง (พยายามที่จะลด δ) แต่เป็นความพยายามที่จะทำให้ปีกมีค่า AR สูงสุดเท่าที่จะทำได้ จริงๆ แล้วการที่ทฤษฎีปีกยาวจำกัดชี้ให้เห็นว่า $C_{D,i}$ เป็นสัดส่วนกลับกับ AR ถือเป็นชัยชนะอันยิ่งใหญ่ของตัวทฤษฎีที่เดียว Prandtl เองนำผลการทดลอง (ซึ่งถือว่าเป็นผลการทดลองคลาสสิก) ของปีกสี่เหลี่ยมผืนผ้าที่มี AR จาก 1 ถึง 7 มายืนยันผลลัพธ์อันนี้ ในรูป 5.27 แรงยกและแรงต้านในรูปสัมประสิทธิ์จากผลการทดลองนี้ ถูกนำมาพล็อตเป็นกราฟ “Drag polar” สำหรับปีกทั้ง 7 อัน จากสมการ (5.4) คงจำได้ว่าสัมประสิทธิ์แรงต้านรวมของปีกเขียนได้ในรูป

$$C_D = C_d + \frac{C_L^2}{\pi e AR} \quad (5.73)$$

เมื่อ e คือค่าตัวประกอบประสิทธิภาพของระยะทางปีก (Span efficiency factor) $= \frac{1}{(1 + \delta)}$



รูป 5.27 ผลการทดลองของพรานด์ (Prandtl) แสดงผลของ AR ที่มีต่อ “Drag polar” ของปีก (Anderson, 2016)

การเปลี่ยนแปลงแบบพาราโบลาของ C_D กับ C_L อย่างเป็นในสมการ (5.73) สะท้อนให้เห็นชัดจากข้อมูลการทดลองในรูป 5.27 ถ้าเราพิจารณาปีก 2 ปีก ที่มี AR ต่างกันเป็น AR_1 และ AR_2 สมการ (5.70) จะให้ค่า C_{D1} และ C_{D2} สำหรับปีกทั้งสองเป็น

$$C_{D1} = C_d + \frac{C_L^2}{\pi e AR_1} \quad (5.74a)$$

และ

$$C_{D2} = C_d + \frac{C_L^2}{\pi e AR_2} \quad (5.74b)$$

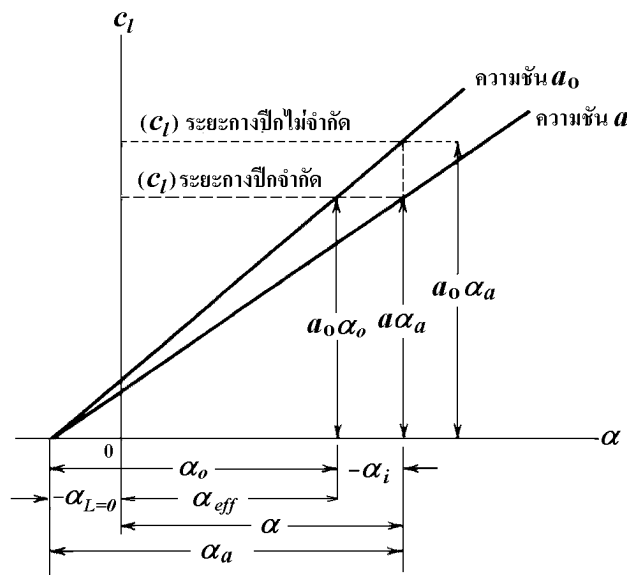
สมมติว่าปีกทั้งสองอยู่ที่ C_L เดียวกัน และเพราะปีกทั้งสองใช้หน้าตัดแพนอากาศเหมือนกันจึงมีค่า C_d อันเดียวกัน ยิ่งกว่านั้นค่า e ที่แตกต่างกันระหว่างปีกทั้งสองมีค่าเพียงเล็กน้อย และอาจตัดทิ้งได้ ดังนั้นจะได้ความสัมพันธ์จากการลบสมการ (5.74a) กับ (5.74b)

$$C_{D1} - C_{D2} = \frac{C_L^2}{\pi e} \left(\frac{1}{AR_1} - \frac{1}{AR_2} \right) \quad (5.75)$$

สมการ (5.75) นำมาใช้ปรับสัดส่วนข้อมูลของปีกที่มี AR_2 เทียบกลับไปเป็นกรณีของค่า AR_1 ได้ ตัวอย่างเช่น Prandtl ปรับข้อมูลในรูป 5.27 ก ไปเป็นข้อมูลของปีกที่มี $AR = 5$ ในรูป 5.27 ข ซึ่งในกรณีนี้ สมการ (5.75) จะเป็น

$$C_{D1} = C_{D2} + \frac{C_L^2}{\pi e} \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{AR_2} \right) \quad (5.76)$$

เมื่อแทนค่าของ C_{D2} และ AR_2 ที่สัมพันธ์กันตามลำดับจากข้อมูลในรูป 5.27 ก ในสมการ (5.76) Prandtl พบว่าผลลัพธ์ที่ได้สำหรับ C_D กับ C_L ของปีกทั้ง 7 จะยุบรวมไปอยู่เกือบจะบนเส้นโค้งอันเดียวกันอย่างในรูป 5.27 ข ซึ่งยืนยันความสัมพันธ์ของ AR กับ $C_{D,i}$



รูป 5.28 โค้งแรงยกเปรียบเทียบระหว่างปีกยาวมากและปีกยาวจำกัด (Bertin & Cummings 2025)

ข้อแตกต่างของปีกกับแผนอากาศอีกประการหนึ่งนอกจากเรื่องแรงต้านเหนี่ยวนำก็คือ ผลที่เกิดขึ้นกับโค้งแรงยก ในบทที่ 4 เราแสดงให้เห็นแล้วว่าค่าความชันของโค้งแรงยกของแผนอากาศกำหนดโดย $a_0 \equiv \frac{dc_l}{d\alpha}$ ถ้าเรากำหนดเช่นเดียวกันให้ค่าโค้งแรงยกของปีกมีความชัน $a \equiv \frac{dC_L}{d\alpha}$ เมื่อเปรียบเทียบความชันของโค้งแรงยกของปีกกับความชันของโค้งแรกของหน้าตัดแผนอากาศของตัวปีกเองจะพบว่า $a < a_0$ เพื่อให้เห็นได้ชัดเจนย้อนกลับไปรูป 5.4 ซึ่งแสดงให้เห็นผลของมุมดาวน์วอชที่มีกับการไหลผ่านแผนอากาศ ณ หน้าตัดหนึ่งของปีก สังเกตว่าถึงแม้ว่ามุมปะทะของปีกจะเป็น α แต่หน้าตัดแผนอากาศจะรับรู้ถึงมุมปะทะที่มีผลต่อแรงยกที่เล็กกว่าเสมอเรียกว่า “มุมปะทะสัมฤทธิ์ผล” (Effective angle of attack) α_{eff} เมื่อ $\alpha_{eff} = \alpha - \alpha_i$ พิจารณาปีกวงรีที่ไม่มีมุมบิดปีก ดังนั้นจากหัวข้อ 5.5 ค่า α_i และ α_{eff} จะมีค่าคงที่ตลอดแนวกางปีก นอกจากนั้นค่า c_l ของหน้าตัดจะมี

ค่าคงที่ตลอดแนวทางปีกด้วย และทำให้ $C_L = c_l$ สมมติว่าเราพล็อตค่า C_L ของปีกเทียบกับมุม α_{eff} ตามโค้งเส้นบนของรูป 5.28 เพราะว่าเราใช้มุม α_{eff} โค้งแรงยกจะมีความชันที่สัมพันธ์กับความชันของปีกยาวไม่จำกัด a_o แต่ในความเป็นจริงมุมปะทะของปีกที่เราจะสังเกตเห็นคือมุมระหว่างแนวคอร์ดและกระแสอิสระ คือ มุม α ดังนั้น C_L ของปีกโดยทั่วไปจะคิดการเปลี่ยนแปลงเทียบกับมุม α อย่างที่แสดงตามโค้งเส้นล่างของรูป 5.28 แต่ $\alpha > \alpha_{eff}$ จึงเหมือนกับว่าแกนนอนของโค้งเส้นล่างถูกยืดออก และเส้นโค้งเส้นล่างจะมีความลาดชันน้อยกว่า และมีค่าเท่ากับ a รูป 5.28 แสดงให้เห็นว่า $a_o > a$ ผลของปีกที่มีความยาวจำกัดจึงเป็นการลดความชันของโค้งแรงยก ลักษณะของโค้งแรงยกของปีกอีกอย่างหนึ่งได้จากการที่มุมปะทะเหนี่ยวนำกับแรงต้านเหนี่ยวนำจะมีค่าเป็นศูนย์เมื่อแรงยกเป็นศูนย์ ดังนั้น เมื่อ $C_L = 0$, $\alpha = \alpha_{eff}$ ตลอดทั้งแนวทางปีก ผลก็คือ ค่า $\alpha_{L=0}$ ของปีกยาวจำกัดจะเป็นค่าเดียวกันกับของหน้าตัดแพนอากาศของปีก หรือของปีกยาวไม่จำกัด ซึ่งแสดงในรูป 5.28

ค่าความชัน a_o และ a จะสัมพันธ์กันตามนี้ จากโค้งเส้นบนของรูป 5.28

$$\frac{dC_L}{d(\alpha - \alpha_i)} = a_o$$

หรือ $C_L = a_o(\alpha - \alpha_i) + \text{cont.}$ (5.77)

แทนค่า α_i สำหรับปีกวงรีตามสมการ(5.51) ในสมการ(5.74) จะได้

$$C_L = a_o(\alpha - \frac{C_L}{\pi AR}) + \text{cont.} \quad (5.78)$$

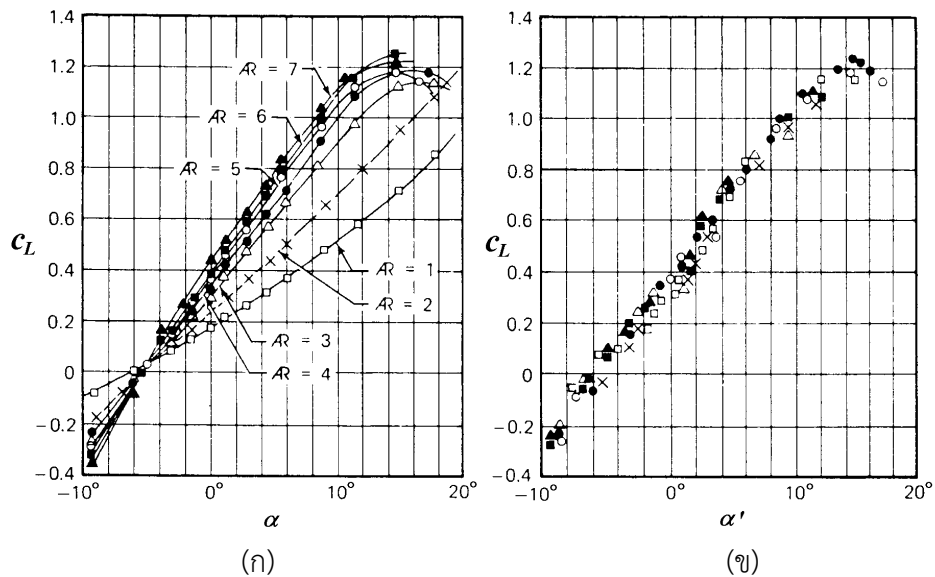
หาอัตราการเปลี่ยนแปลงของสมการ(5.78) เทียบกับ α จะได้

$$\frac{dC_L}{d\alpha} = a = \frac{a_o}{1 + a_o / \pi AR} \quad (5.79)$$

สมการ (5.79) ให้ความสัมพันธ์ระหว่าง a และ a_o สำหรับปีกวงรียาวจำกัด สำหรับปีกที่มีการแจกแจงแรงยกเป็นรูปใดๆ สมการ (5.79) จะเปลี่ยนไปเล็กน้อย เป็น

$$a = \frac{a_o}{1 + (a_o / \pi AR)(1 + \tau)} \quad (5.80)$$

เมื่อค่า τ ในสมการเป็นฟังก์ชันของสัมประสิทธิ์ A_n ของอนุกรมฟูเรียร์ที่แทนการแจกแจงแรงยกบนปีกคล้ายกับ δ ค่า τ ได้รับการคำนวณโดย “Glauert” ในปี 1920 สำหรับปีกที่มี AR และ λ ต่างๆ ค่าโดยทั่วไปจะอยู่ในช่วงระหว่าง 0.05 ถึง 0.25



รูป 5.29 ผลของ AR ที่มีต่อโค้งแรงยก จากผลการทดลองของ Prandtl (Anderson, 2016)

สิ่งสำคัญที่สุดในสมการ (5.79) และ (5.80) คือการเปลี่ยนแปลงค่า AR สังเกตว่าสำหรับปีกที่มี AR ต่ำ ความแตกต่างระหว่าง a_0 และ a อาจมีค่ามาก แต่เมื่อ $AR \rightarrow \infty$ ค่า $a \rightarrow a_0$ ผลของ AR ที่มีต่อโค้งแรงยกแสดงในรูป 5.29 ก ซึ่งเป็นผลการทดลองของปีกสี่เหลี่ยมผืนผ้าที่มี AR ต่างๆ กัน สังเกตค่า $\frac{dC_L}{d\alpha}$ ที่ลดลงเมื่อ AR ลดลง นอกจากนั้นเมื่อใช้ความสัมพันธ์จากที่ผ่านมา Prandtl ปรับสัดส่วนของข้อมูลในรูป 5.29 ก ไปที่ค่า $AR = 5$ ผลที่ได้ คือ โค้งทั้งหมดเกือบตกบนโค้งเดียวกันตามที่แสดงในรูป 5.29 ข ซึ่งยืนยันผลของสมการ (5.79) และ (5.80)

ตัวอย่าง 5.5 พิจารณาปีก มี $AR = 8$ และมีอัตราสอบปีก 0.8 หน้าตัดแพนอากาศเป็นรูปสมมาตร และบาง จงคำนวณสัมประสิทธิ์แรงยกและแรงต้านเหนี่ยวนำสำหรับปีกเมื่อมุมปะทะอยู่ที่ 5° สมมติให้ ค่า $\delta = \tau$

วิธีทำ จากรูป 5.18 ค่า $\delta = 0.055$ ดังนั้นจากข้อสมมติ τ จะมีค่า 0.055 ด้วย จากสมการ (5.80) สมมติ $a_0 = 2\pi$ จากทฤษฎีแพนอากาศบาง

$$a = \frac{a_0}{1 + (a_0/\pi AR)(1 + \tau)} = \frac{2\pi}{1 + (2\pi/8\pi)(1 + 0.055)}$$

$$= 4.97 \text{ rad}^{-1} = 0.0867 \text{ deg}^{-1}$$

เพราะว่าแพนอากาศเป็นรูปสมมาตร $\alpha_{L=0} = 0^\circ$ ดังนั้น

$$C_L = a\alpha = (0.0867/\text{deg})(5^\circ) = 0.4335$$

จากสมการ (5.69)

$$C_{D,i} = \frac{C_L^2}{\pi AR} (1 + \delta) = \frac{(0.4335)^2 (1 + 0.055)}{8\pi} = 0.00789 \quad \text{ตอบ}$$

ตัวอย่าง 5.6 ปีกสี่เหลี่ยมผืนผ้า มีค่า $AR = 6$ มีตัวประกอบ $\delta = 0.055$ และมีค่า $\alpha_{L=0} = -2^\circ$ มีมุมปะทะ 3.4° ค่า $C_{D,i} = 0.01$ จงคำนวณหาค่าสัมประสิทธิ์แรงต้านเหนี่ยวนำของปีกแบบเดียวกัน (ปีกสี่เหลี่ยมผืนผ้า และมีหน้าตัดแพนอากาศเหมือนกัน) ที่มุมปะทะเดียวกัน แต่มีค่า $AR = 10$ สมมติให้ค่า $\delta = \tau$ และที่ $AR = 10$, $\delta = 0.105$

วิธีทำ เราต้องจำไว้เสมอว่า ถึงแม้มุมปะทะจะมีค่าเท่ากันในสองกรณีนี้ ($AR = 6$ และ $AR = 10$) ค่า C_L จะมีค่าต่างกันเพราะ AR มีผลต่อความชันของโค้งแรงยก ก่อนอื่นเราคำนวณ C_L สำหรับปีกที่มี $AR = 6$ จากสมการ (5.69)

$$C_L^2 = \frac{\pi AR C_{D,i}}{(1 + \delta)} = \frac{\pi(6)(0.01)}{(1 + 0.055)} = 0.1787$$

ดังนั้น

$$C_L = 0.423$$

ความชันของโค้งแรงยกของปีกจึงเป็น

$$\begin{aligned} \frac{dC_L}{d\alpha} &= \frac{0.423}{3.4^\circ - (-2^\circ)} \\ &= 0.078/\text{deg} = 4.485/\text{rad} (\cong 1.43\pi) \end{aligned}$$

ดังนั้นความชันของโค้งแรงยกของหน้าตัดแพนอากาศ (ปีกยาวไม่จำกัด) จะได้จากสมการ (5.80)

$$\begin{aligned} \frac{dC_L}{d\alpha} = a &= \frac{a_o}{1 + (a_o / \pi AR)(1 + \tau)} \\ 4.485 &= \frac{a_o}{1 + (1.055 a_o / \pi(6))} \\ &= \frac{a_o}{1 + 0.056 a_o} \end{aligned}$$

จะได้ค่า $a_o = 5.989/\text{rad}$ เพราะว่าปีกอีกอันหนึ่งใช้หน้าตัดแพนอากาศแบบเดียวกัน ดังนั้น a_o เป็นตัวเดียวกัน และค่าความชันของโค้งแรงยกของปีกอันที่สอง ($AR = 10$) จะเป็น

$$\begin{aligned} a &= \frac{a_o}{1 + (a_o / \pi AR)(1 + \tau)} \\ &= \frac{5.989}{1 + [(5.989)(1.05) / \pi(10)]} \\ &= 4.95/\text{rad} = 0.086/\text{deg} \end{aligned}$$

ดังนั้น C_L สำหรับปีกอันที่สองจะเป็น

$$\begin{aligned} C_L &= a(\alpha - \alpha_{L=0}) \\ &= 0.086[3.4^\circ - (-2^\circ)] \\ &= 0.464 \\ C_{D,i} &= \frac{C_L^2}{\pi AR} (1 + \delta) = \frac{(0.464)^2 (1.105)}{10\pi} \\ &= 0.0076 \end{aligned}$$

ตอบ

หมายเหตุ : ปัญหานี้กำหนดค่า C_L ให้เท่ากันสำหรับปีกทั้งสองแทนการกำหนดให้มุมปะทะเท่ากัน และจะสามารถคำนวณ $C_{D,i}$ ได้โดยตรงวัตถุประสงค์ของตัวอย่างนี้เพื่อย้ำให้เห็นว่าความสัมพันธ์ในสมการ (5.69) จะใช้ได้ก็ต่อเมื่อปีกทั้งสองอยู่ที่ค่า C_L เดียวกันเท่านั้น

5.9 ปีกที่มีการบิดปีก (Twisted Wing)

ในหัวข้อที่ผ่านมาเราใช้ทฤษฎีแนวแรงยกพิจารณาคุณลักษณะของปีกตรงที่ไม่มีการบิด หรือปีกที่มีแนวแรงยกศูนย์ของหน้าตัดแพนอากาศในแนวแกว่งปีกวางอยู่ในระนาบเดียวกัน และในตัวอย่าง 5.4 เราใช้วิธีการสำหรับพิจารณาปีกตรงมาประยุกต์ใช้กับปีกที่มีการบิดปีก สำหรับการประมาณขั้นต้น ผลการคำนวณสามารถนำไปใช้ได้โดยไม่ถือว่ามีความผิดพลาดร้ายแรง

การบิดปีก (Twist) กระทำเพื่อให้ปีกมีคุณลักษณะทางอากาศพลศาสตร์ (คือการแจกแจงแรงยกและโมเมนต์ตามแนวแกว่งปีก) ตามที่ต้องการ การบิดปีกกระทำได้สองวิธีตามที่เคยกล่าวมาแล้วคือการบิดรูปร่างของปีก (Geometric twist) ซึ่งได้จากการบิดแกนปีกไปจนมุมปะทะระหว่างแนวคอर्डของหน้าตัดตามแนวแกว่งปีกกับกระแสมีค่าเพิ่มขึ้นหรือลดลงจากโคนปีกไปยังปลายปีก (Anderson, 2016) ถ้ามุมปะทะมีค่าลดลงเรียกว่าปีกบิดลง หรือมี “Washout” อีกวิธีหนึ่งคือการเปลี่ยนรูปร่างหน้าตัดแพนอากาศตามแนวแกว่งปีก ซึ่งทำให้มุมปะทะที่แรงยกเป็นศูนย์ของแต่ละหน้าตัดมีค่าเปลี่ยนไปตามแนวแกว่งปีกและยังทำให้ค่าความโก่ง (Camber) และตำแหน่งความโก่งสูงสุด (Max camber) เปลี่ยนไปด้วย ในลักษณะนี้เรียกว่าปีกมีการบิดทางอากาศพลศาสตร์ หรือมี “Aerodynamic twist” ในกรณีที่หน้าตัดมีค่าความโก่งลดลงจากโคนปีกไปยังปลายปีกเรียกว่าปีกบิดลงทางอากาศพลศาสตร์ หรือมี “Aerodynamic washout”

เมื่อทราบรูปร่างและการบิดของปีก การประมาณคุณลักษณะของปีกจะสามารถทำได้โดยวิธีเดียวกับที่ทำในหัวข้อ 5.6 ตัวอย่าง 5.4 ข้อแตกต่างระหว่างปีกตรงกับปีกที่มีการบิดปีก คือการที่มุมปะทะ α หรือมุมปะทะสมบูรณ์ α_a มีค่าไม่คงที่ตลอดแนวแกว่งปีกสำหรับปีกที่มีการบิดปีก ทำให้คุณลักษณะที่มุมปะทะของปีกค่าหนึ่งต้องทำการคำนวณออกมาตามขั้นตอน ส่วนที่มุมปะทะอื่นก็ต้อง

ทำการคำนวณใหม่ ต่างจากการคำนวณสำหรับปีกตรง (ดูตัวอย่าง 5.2 และ 5.3) ที่มีมุม α และ α_a คงที่ตามแนวแกนปีก และการคำนวณจะให้ค่าคุณสมบัติขึ้นกับมุมปะทะ ซึ่งนำไปใช้ที่มุมปะทะใดก็ได้

นอกจากนี้สำหรับปีกที่มีการบิดปีกอย่างฉับพลัน เช่น ปีกที่มีการใช้แฟลป (Flap) บางช่วงของปีก หรือปีกที่มีการติดตั้งกระเปาะเครื่องยนต์ การพิจารณาการแจกแจงแรงยกตามแนวแกนปีก ถึงแม้จะใช้วิธีเดียวกับหัวข้อ 5.6 แต่รายละเอียดของการแจกแจงแรงยกทำให้การพิจารณาอนุกรมฟูรีเยร์ที่มีเพียง 4 เทอม สำหรับแทน $\Gamma(y)$ จะไม่เหมาะสม

การพิจารณาปีกที่มีการบิดปีกอาจทำได้ดังต่อไปนี้ ที่มุมปะทะปีกอันหนึ่ง (ทั่วไปมักอ้างอิงมุมปะทะโคนปีก เป็นมุมปะทะปีก) เราจะคำนวณคุณลักษณะปีกเช่นเดียวกับที่ทำกับปีกตรงในหัวข้อ 5.6 แต่จะกำหนดให้อนุกรมที่แทนการแจกแจง $\Gamma(y)$ มีเทอมในอนุกรม k เทอม จำนวน k จะมากกว่า 4 และขึ้นกับรายละเอียดที่แสดงการแจกแจงแรงยกว่ามีมากเพียงใด การแก้สมการเพื่อหาค่าสัมประสิทธิ์ A_n ของอนุกรม ทำโดยเลือกตำแหน่งตามแนวแกนปีก k ตำแหน่งที่ระยะ y_j หรือ θ_j , $j = 1, 2, 3, \dots k$ ซึ่งมีความยาวคอร์ดและคุณสมบัติของหน้าตัดตามรูปร่างและการบิดของปีก ที่แต่ละตำแหน่ง θ_j จะได้ความสัมพันธ์ตามสมการ (5.60) จำนวน k สมการ ซึ่งสามารถนำไปแก้สมการหาค่า A_n ได้

สมมติการแจกแจง Γ ตามแนวแกนปีกเป็น (Katz & Plotkin, 2001)

$$\Gamma(\theta) = \frac{1}{2} a_{os} c_r V_\infty \sum_{n=1}^k A_n \sin n\theta^1 \quad (5.81)$$

เมื่อ a_{os} = ความชันของโค้งแรงยกของหน้าตัดแพนอากาศที่โคนปีก

c_r = ความยาวคอร์ดของโคนปีก

สำหรับการแจกแจง Γ ในสมการ (5.81) จะได้ความสัมพันธ์

$$C_L = \frac{a_{os} c_r \pi b}{4S} A_1 \quad (5.82)$$

ซึ่งมีที่มาเหมือนสมการ (5.62) สำหรับตำแหน่ง θ_j ใดๆ ตามแนวแกนปีก จะได้ความสัมพันธ์

$$\alpha(\theta_j) - \alpha_{L=0}(\theta_j) = \frac{a_{os} c_r}{a_o(\theta_j) c(\theta_j)} \sum_{n=1}^k A_n \sin n\theta_j + \frac{a_{os} c_r}{4b} \sum_{n=1}^k n A_n \frac{\sin n\theta_j}{\sin \theta_j} \quad (5.83)$$

เพื่อความสะดวกแทน $\alpha(\theta_j) - \alpha_{L=0}(\theta_j)$ ด้วย α_{aj} มุมปะทะสมบูร์ณ ณ ตำแหน่ง θ_j และเขียน a_{oj} กับ c_j แทน $a_o(\theta_j)$ กับ $c(\theta_j)$ เพื่อป้องกันความสับสน สมการ(5.83) จะเขียนใหม่เป็น

$$\alpha_{aj} = \frac{a_{os} c_r}{a_{oj} c_j} \sum_{n=1}^k A_n \sin n\theta_j + \frac{a_{os} c_r}{4b} \sum_{n=1}^k n A_n \frac{\sin n\theta_j}{\sin \theta_j} \quad (5.84)$$

¹ Γ ในสมการ (5.81) เหมือนกับ Γ ที่ใช้ในสมการ (5.60) แต่เปลี่ยนค่าคงที่หน้าอนุกรมจาก $2bV_\infty$ เป็น

$\frac{1}{2} a_{os} c_r V_\infty$ เพื่อความสะดวกในหัวข้อนี้

เมื่อเขียนสมการ (5.84) สำหรับตำแหน่ง θ k ตำแหน่ง $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_k$ และแก้ชุดสมการหาค่า A_n ; $n = 1, 2, \dots, k$ ได้ หลังจากได้ A_n จะคำนวณหาการแจกแจงมุมปะทะเหนียวน้ำ α_{ij} และมุมปะทะสัมฤทธิ์ผล α_{effj} ได้จาก

$$\alpha_{oj} = \alpha_{effj} - \alpha_{L=0j} = \frac{a_{os} c_r}{a_{oj} c_j} \sum_{n=1}^k A_n \sin n\theta_j \quad (5.85)$$

และ

$$\alpha_{ij} = \alpha_{aj} - \alpha_{oj} = \frac{a_{os} c_r}{4b} \sum_{n=1}^k n A_n \frac{\sin n\theta_j}{\sin \theta_j} \quad (5.86)$$

ขอให้สังเกตด้วยว่าการเลือกตำแหน่ง θ_j ตามแนวกางปีกเพื่อให้ได้คำตอบที่สมจริงจะต้องเลือกตำแหน่ง θ_j ให้ถี่ในบริเวณที่คุณสมบัติของหน้าตัดมีการเปลี่ยนแปลงเกิดขึ้นมากหรือฉับพลันตามที่กล่าวมาแล้ว เช่นบริเวณใกล้ปลายปีกหรือบริเวณติดตั้งกะเปาะเครื่องยนต์

ค่า α_{ij} และ α_{oj} จะนำไปคำนวณค่าความชัน a_j (ของโค้งระหว่าง c_l และ α_a) ของหน้าตัดได้โดยพิจารณาใช้ความสัมพันธ์ในรูป 5.28

$$a_j = \frac{a_{oj}}{1 + (\alpha_{ij} / \alpha_{oj})} \quad (5.87)$$

จากมุม α_{ij} และ α_{oj} ของหน้าตัดที่ตำแหน่ง θ_j เมื่อแทนในสมการ (5.87) ความชัน a_j ที่ได้และค่ามุมปะทะสมบูรณ์ α_{aj} นำไปคำนวณค่า c_l ของหน้าตัด ณ ตำแหน่ง θ_j หรือ c_{lj} ได้ นั่นคือเราจะทราบลักษณะการแจกแจง c_l ของปีก ที่มุมปะทะปีกที่กำหนด สำหรับที่มุมปะทะอื่น จะต้องทำการคำนวณอย่างเดียวกันนี้ไปทุกๆ มุมปะทะ ในกรณีที่เรานำค่า k มาก เช่น 8 หรือ 16 ตำแหน่ง (หรือแม้จะใช้ $k = 4$ เหมือนในหัวข้อ 5.6) การคำนวณจะเป็นเรื่องยุ่งยากและเสียเวลาเป็นอย่างมากเมื่อจะต้องทำไปทุกมุมปะทะเพื่อให้ครอบคลุมตลอดย่านมุมปะทะ α_a (สมมติว่าไม่มีการร่วงหล่นเกิดขึ้นบนหน้าตัดใดๆ) แทนที่จะต้องทำการคำนวณไปทุกมุมปะทะเพื่อหาคุณลักษณะของปีก เราอาจใช้วิธีการพิจารณาที่ทำให้สะดวกกว่าที่จะได้อธิบายต่อไปนี้

สำหรับปีกตรงที่ไม่มีการบิดปีก (ทั้งทางรูปร่างและทางอากาศพลศาสตร์) แนวแรงยกเป็นศูนย์ (Zero lift line, Z.L.L.) ของหน้าตัดแพนอากาศตลอดแนวกางปีกจะอยู่ในแนวเดียวกันหรืออยู่ในระนาบเดียวกัน ดังนั้นที่มุมปะทะที่แนว Z.L.L. อยู่ในแนวกระแสน้ำไหลแรงยกและ C_L บนปีกจะมีค่าเป็นศูนย์ (c_l ของหน้าตัดตลอดแนวกางปีกจะเป็นศูนย์ทั้งหมด) ถ้าปีกมีการบิดสมมติว่าให้ปลายปีกมีมุมปะทะลดลงน้อยกว่าโคนปีก แนว Z.L.L. ของปลายปีกรวมถึงหน้าตัดอื่นตลอดแนวกางปีกจะทำมุมลบกับกระแสน้ำไหล ในตอนนี้นำแรงยกบนปีกโดยรวมจะเป็นลบ ถ้าต้องการให้แรงยกบนปีกเป็นศูนย์คงเห็นแล้วว่าเราต้องเพิ่มมุมปะทะขึ้นมาจนถึงค่าหนึ่ง ในสภาพนี้แรงยกหรือ C_L ของปีกจะเป็นศูนย์ แต่แรงยกหรือ c_l ของหน้าตัดตามแนวกางปีกจะมีบางส่วนเป็นบวก (ส่วนทางโคน) และจะลดลงจนเป็นลบทางปลายปีก เรียกมุมปะทะนี้ว่า “มุมปะทะแรงยกเป็นศูนย์ของปีก” $\alpha_{L=0w}$ และเรียกแนวนี้

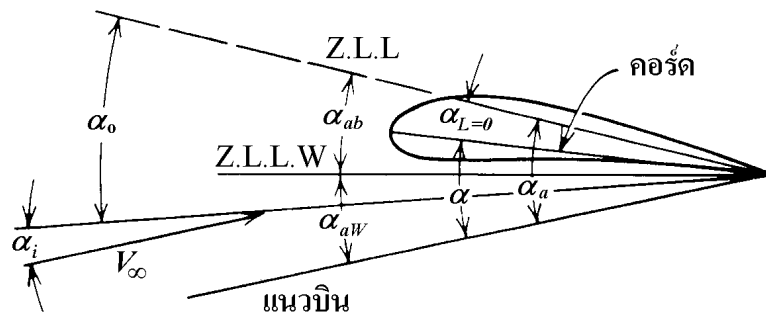
ว่า “แนวแรงยกศูนย์ของปีก”(Zero lift line of wing, Z.L.L.W.) ความสัมพันธ์ของแนวและมุมต่างๆ สำหรับหน้าตัดใดๆ ของปีกแสดงในรูป 5.30 จากรูปจะเห็นว่าสำหรับหน้าตัดใดๆ ตามแนว กางปีก แนวแรงยกเป็นศูนย์ของหน้าตัดและของปีกจะไม่อยู่ในแนวเดียวกัน และมุมที่คิดระหว่าง Z.L.L. และ Z.L.L.W. ของหน้าตัดจะมีค่าคงที่ขึ้นอยู่กับมุมบิดปีก ส่วนมุมที่คิดระหว่างแนว Z.L.L.W. กับกระแส จะไม่ขึ้นกับมุมบิดของปีก แต่เปลี่ยนแปลงไปตามมุมปะทะของปีก ให้ α_{ab} เป็นมุมปะทะระหว่าง Z.L.L. และ Z.L.L.W. และให้ α_{aw} เป็นมุมปะทะปีกที่วัดจากแนว Z.L.L.W. ดังนั้น ณ หน้าตัดใดๆ ตามแนวกางปีก

$$\alpha_a = \alpha_{ab} + \alpha_{aw} \quad (5.88)$$

เราเรียก α_{ab} ว่า “Basic absolute angle of attack” และเรียก α_{aw} ว่า “Additional absolute angle of attack” จากเหตุผลจากที่ได้อธิบายไปแล้ว จากสมการ (5.88) ถ้าคูณตลอดด้วยความชันของโค้งแรงยกของหน้าตัด a จะได้ว่า

$$c_l = c_{lb} + c_{la} \quad (5.89)$$

หรือ เราพิจารณาแรงยกของหน้าตัดตามแนวกางปีกประกอบด้วยสองส่วน ส่วนที่หนึ่ง c_{lb} เป็นแรงยกจาก α_{ab} ถือเป็น “แรงยกมูลฐาน” (Basic lift) ซึ่งคงที่และขึ้นอยู่กับมุมบิดปีก ส่วนที่สอง c_{la} เป็นแรงยกที่ได้จาก α_{aw} ถือเป็น “แรงยกเพิ่มเติม” (Additional lift) จะไม่ขึ้นกับการบิดปีก แต่ขึ้นกับมุมปะทะปีก



รูป 5.30 แนว Z.L.L. และ Z.L.L.W. ของหน้าตัดแพนอากาศปีกที่มีการบิดปีก (Katz & Plotkin, 2001)

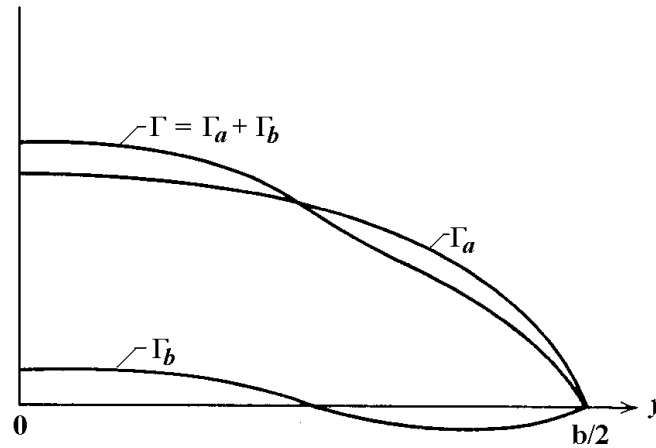
ในทำนองเดียวกับสมการ (5.89) การแจกแจง Γ และ L' อาจแบ่งเป็นสองส่วนได้แบบเดียวกัน คือ

$$\Gamma = \Gamma_b + \Gamma_a \quad \text{และ} \quad L' = L'_b + L'_a$$

รูป 5.31 แสดงการแจกแจง Γ ส่วนที่เป็น Γ มูลฐาน และส่วนที่เป็น Γ เพิ่มเติม จากรูปจะเห็นว่า

$$\rho_\infty V_\infty \int_{-b/2}^{b/2} \Gamma_b dy = \int_{-b/2}^{b/2} L'_b dy = 0$$

ส่วนของแรงยกเพิ่มเติมของแต่ละหน้าตัด c_{la} จะเปลี่ยนค่าไปตามมุมปะทะที่เพิ่มหรือลด อาจเขียน c_{la} ให้ขึ้นกับค่า C_L ของปีกที่มุมปะทะนั้นๆ ได้ว่า



รูป 5.31 การแจกแจง Γ พื้นฐาน (Basic), Γ_b , และ Γ เพิ่มเติม (Additional), Γ_a , ตามแนวปีก (Anderson, 2016)

$$c_{la} = c'_{la} C_L$$

และเขียนสมการ (5.89) ใหม่ได้เป็น

$$c_l = c_{lb} + c'_{la} C_L \quad (5.90)$$

เมื่อ c'_{la} เป็นค่าคงที่แสดงสัดส่วนของ c_{la} กับ C_L จากสมการจะเห็นว่า ทั้ง c_{lb} และ c'_{la} จะเป็นค่าคงที่สำหรับหน้าตัดใดๆ และมีการแจกแจงตามแนวปีกตายตัว ดังนั้นเมื่อใดที่เราสามารถกำหนดการแจกแจง c_{lb} และ c'_{la} ของปีกได้แล้ว ก็สามารถนำไปใช้ในสมการ (5.90) เพื่อคำนวณการแจกแจง c_l ที่ C_L อื่นๆ ของปีกได้

การหาค่า c_{lb} และ c'_{la} ทำได้โดยการหาการแจกแจง c_l ของปีกที่ C_L สองค่า ซึ่งทำได้โดยพิจารณาหาคุณลักษณะของปีกที่มุมปะทะสองมุมปะทะ α_{aj1} และ α_{aj2} โดยใช้วิธีการในหัวข้อ 5.6 ค่าสัมประสิทธิ์ A_n ; $n = 1, 2, \dots, k$ ของอนุกรมที่แทนการแจกแจง Γ ของปีกที่มุมปะทะทั้งสองที่ได้จากการแก้สมการจะนำไปหาค่า C_L ของปีกที่มุมปะทะทั้งสอง และการแจกแจง c_l ตามแนวปีกได้ ดังนั้นสำหรับตำแหน่ง θ_j ใดๆ ตามแนวปีก เราจะได้จากมุมปะทะทั้ง 2 และสมการ (5.90) ว่า

$$\begin{aligned} c_{lj1} &= c_{lbj} + c'_{laj} C_{L1} \\ c_{lj2} &= c_{lbj} + c'_{laj} C_{L2} \end{aligned} \quad (5.91)$$

จะเห็นว่าสมการ (5.91) เป็นสมการพีชคณิตธรรมดา เมื่อทราบค่า C_{L1} , C_{L2} , c_{lj1} และ c_{lj2} ของปีก จะหาค่า c_{lbj} และ c'_{laj} ได้ และหลังจากทราบค่า c_{lbj} และ c'_{laj} แล้ว ที่มุมปะทะอื่น (หรือที่ C_L อื่น) ของปีกการแจกแจง c_l ตามแนวปีกจะหาได้จากสมการ (5.90) โดยไม่ต้องทำการ

คำนวณอีก เมื่อทราบการแจกแจง c_l ก็สามารถคำนวณการแจกแจงแรงต้านเหนี่ยวนำตลอดแนว
ทางปีก ได้จาก

$$c_{di} = c_l \alpha_i \quad (5.92)$$

โดย α_i คำนวณจาก

$$\alpha_i = \alpha_a - \alpha_o = \frac{c_l}{a} - \frac{c_l}{a_o}$$

ดังนั้น
$$c_{di} = c_l^2 \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{a_o} \right) \quad (5.93)$$

นอกจากนี้เราอาจกำหนดค่าความชันเฉลี่ย (Weighted mean slope) สำหรับทั้งปีกเป็น

$$\bar{a} = \frac{1}{S} \int_{-b/2}^{b/2} a c_l dy \quad (5.94)$$

ดังนั้น
$$C_L = \bar{a} \alpha_{aw} \quad (5.95)$$

สุดท้ายนี้ควรจำไว้ว่าวิธีการที่เราพิจารณามาเหมาะกับปีกที่มี AR พอสมควร และไม่มีมุมหลัง
หรือมีเพียงเล็กน้อย เพื่อให้แนวแรงยกของปีกอยู่ในมุมตั้งฉากกับทิศทางของกระแสอิสระ จริงๆ แล้ว
สมการ (5.92) และ (5.93) ใช้ได้เฉพาะกับรูปร่างปีกดังกล่าว ดังนั้นสำหรับปีกกล่อง หรือปีกที่มี AR ต่ำ
ต้องพิจารณาโดยวิธีอื่น เช่น วิธี “Source-doublet-vorticity panel method” หรือ ใช้ทฤษฎี
พื้นผิวแรงยก (Lifting surface) ที่จะกล่าวถึงต่อไป

ตัวอย่าง 5.6 พิจารณาคุณสมบัติของปีกที่มีรูปร่างและการบิดปีก ดังนี้

$$AR = 6 \quad \lambda = \frac{c_t}{c_r} = 0.55$$

มุมบิดปีกเปลี่ยนแปลงเป็นเชิงเส้นตรง จากศูนย์ที่โคนลดลงเป็น -4° ที่ปลาย มุมบิดที่เป็นลบ แสดงการบิดลง
(Washout) หน้าตัดแพนอากาศเป็นแบบเดียวกันตลอดแนวทางปีกไม่มีการบิดทางอากาศพลศาสตร์
(Aerodynamic twist) ค่าความชัน a_o ของหน้าตัดมีค่า 2π คงที่ตลอดแนวทางปีก

ก. จงคำนวณคุณสมบัติทางอากาศพลศาสตร์ c_{lb} และ c'_{la} ของปีกนี้

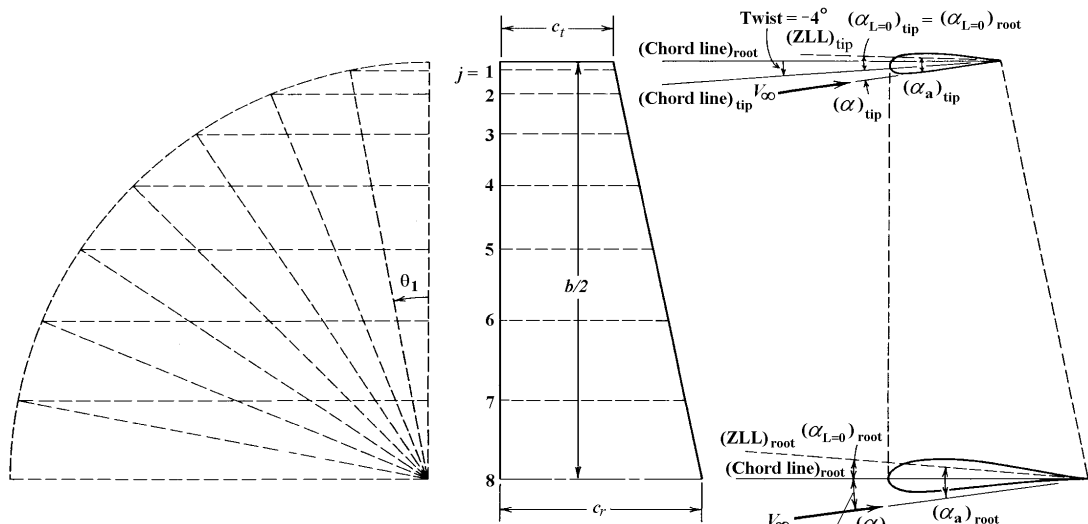
ข. เมื่อบินที่ระดับน้ำทะเลที่ความเร็ว 250 km/hr ภาระกรรมปีก (Wing load) = 800 N/m²
จงคำนวณ การแจกแจง c_l และ c_{di} ตามแนวทางปีก ณ เงื่อนไขนี้

วิธีทำ ก. คำนวณหา c_{lb} และ c'_{la} ได้ตามวิธีที่อธิบายมาในตอนต้น โดยเลือกตำแหน่งตามแนว
ทางปีก 8 ตำแหน่งสำหรับครึ่งปีก ตามที่แสดงในรูป 5.32 ที่ตำแหน่ง θ_j ทั้งแปดตำแหน่งคำนวณ
คุณสมบัติของปีกได้ตามตาราง 5.1

ตามที่แสดงในรูป 5.32 เลือกตำแหน่ง 8 ตำแหน่งตามแนวทางปีก จากปลายปีกถึงโคนปีก
ดังนั้นค่า $k = 8$ ในสมการ (5.81) ถ้ากำหนดตำแหน่งตามแนวทางปีกและคอร์ด ณ ตำแหน่งนั้นใน

รูปไรรมิติ $\bar{y} = \frac{y}{b/2}$ และ $C = \frac{c}{c_r}$ สำหรับปีกรูปสี่เหลี่ยมคางหมู จะได้ว่าที่ตำแหน่ง j ในแนวกางปีก

$$\theta_j = \frac{\pi}{2} \frac{j}{k}, \quad \bar{y} = \cos \theta_j \quad \text{และ} \quad C_j = \frac{c_j}{c_r} = 1 - (1 - \lambda) \cos \theta_j$$



รูป 5.32 ปีกสี่เหลี่ยมคางหมูมีการบิดทางรูปร่างในตัวอย่าง 5.6 (Anderson, 2016)

ตาราง 5.1 การคำนวณค่าตัวแปรตามตำแหน่งทั้ง 8 ตามแนวกางปีก

j	1	2	3	4	5	6	7	8
θ_j (rad)	0.196	0.93	0.589	0.785	0.982	1.178	1.374	1.57
$\frac{y}{b/2} = \cos \theta_j$	0.981	0.924	0.831	0.7	0.555	0.383	0.195	0
$C_j = c_j/c_r$	0.559	0.584	0.626	0.682	0.75	0.828	0.912	1
α_{aj}	$\alpha_a - 3.92^\circ$	$\alpha_a - 3.7^\circ$	$\alpha_a - 3.33^\circ$	$\alpha_a - 2.83^\circ$	$\alpha_a - 2.22^\circ$	$\alpha_a - 1.53^\circ$	$\alpha_a - 0.78^\circ$	α_a
a_{oj}	2π	2π	2π	2π	2π	2π	2π	2π

และแสดงให้เห็นได้ว่า

$$\frac{a_{os} c_r}{4b} = \frac{\pi}{AR(1 + \lambda)}$$

เขียนสมการ (5.84) ได้เป็น

$$\alpha_{aj} = \frac{c_r}{c_j} \sum_{n=1}^k A_n \sin n\theta_j + \frac{\pi}{AR(1+\lambda)} \sum_{n=1}^k nA_n \frac{\sin n\theta_j}{\sin \theta_j}$$

หรือ

$$\alpha_{aj} = \sum_{n=1}^K \left[\frac{c_r}{c_j} + \frac{\pi n}{AR(1+\lambda) \sin \theta_j} \right] A_n \sin n\theta_j \quad (5.96)$$

อย่าลืม $k = 8$ ในสมการ (5.96) นั่นคืออนุกรมมี 8 เทอม แต่จากหัวข้อที่ผ่านมาเนื่องจากภาระกรรมบนปีกเป็นรูปสมมาตร ดังนั้นเทอมในอนุกรมเหลือเฉพาะเทอมที่ $n = 1, 3, 5, 7, \dots, 15$ เราจึงเปลี่ยน k ในอนุกรมเป็น $k = 15$ เพื่อกันความเข้าใจผิดและความสับสน

เมื่อแทนค่า $AR = 6$ และ $\lambda = 0.55$ ในสมการ (5.96) แล้วพิจารณาที่มุมปะทะสองมุม ในที่นี้เลือกมุม $\alpha_a = 3^\circ$ และ 6° จะได้ว่าที่ $\alpha_a = 3^\circ$ เขียนสมการ (5.96) ที่ θ_j แต่ละตำแหน่งได้เป็น

ที่ $j = 1, \quad \theta_j = \frac{\pi}{2} \frac{j}{k} = \frac{\pi}{16} \text{ rad}$

$$(3 - 3.92) \frac{\pi}{180} = 0.6867A_1 + 3.8797A_3 + 8.6863A_5 + 13.6443A_7 + 17.044A_9 \\ + 17.3344A_{11} + 13.5157A_{13} - 5.4375A_{15} \quad (1)$$

ที่ $j = 2, \quad \theta_j = \frac{\pi}{2} \frac{j}{k} = \frac{\pi}{8} \text{ rad}$

$$(3 - 3.7) \frac{\pi}{180} = 0.9931A_1 + 4.0285A_3 + 5.6595A_5 + 3.0198A_7 - 3.6955A_9 \\ - 10.5527A_{11} - 12.1837A_{13} - 5.7221A_{15} \quad (2)$$

ที่ $j = 3, \quad \theta_j = \frac{\pi}{2} \frac{j}{k} = \frac{3\pi}{16} \text{ rad}$

$$(3 - 3.33) \frac{\pi}{180} = 1.2252A_1 + 3.356A_3 + 0.9059A_5 - 4.8662A_7 - 5.88.02A_9 \\ + 1.6122A_{11} + 9.3185A_{13} + 5.9613A_{15} \quad (3)$$

ที่ $j = 4, \quad \theta_j = \frac{\pi}{2} \frac{j}{k} = \frac{\pi}{4} \text{ rad}$

$$(3 - 2.83) \frac{\pi}{180} = 1.3746A_1 + 2.0502A_3 - 2.7259A_5 - 3.4014A_7 + 4.0771A_9 \\ + 4.7525A_{11} - 5.4284A_{13} - 6.1037A_{15} \quad (4)$$

ที่ $j = 5, \quad \theta_j = \frac{\pi}{2} \frac{j}{k} = \frac{5\pi}{16} \text{ rad}$

$$(3 - 2.22) \frac{\pi}{180} = 1.4464A_1 + 0.4983A_3 - 3.3002A_5 + 2.3196A_7 + 2.774A_9 \\ - 5.6903A_{11} + 1.2865A_{13} + 6.1787A_{15} \quad (5)$$

ที่ $j = 6, \quad \theta_j = \frac{\pi}{2} \frac{j}{k} = \frac{3\pi}{8} \text{ rad}$

$$(3 - 1.53) \frac{\pi}{180} = 1.4535A_1 - 0.8813A_3 - 1.1632A_5 + 3.4814A_7 - 4.1546A_9$$

$$+1.9962A_{11} + 2.2882A_{13} - 6.1867A_{15} \quad (6)$$

$$\text{ที่ } j = 7, \quad \theta_j = \frac{\pi}{2} \frac{j}{k} = \frac{7\pi}{16} \text{ rad}$$

$$(3 - 0.78) \frac{\pi}{180} = 1.4132A_1 - 1.7707A_3 - 1.5654A_5 + 0.6831A_7 - 0.8204A_9 \\ + 2.7161A_{11} - 4.6365A_{13} + 6.1433A_{15} \quad (7)$$

$$\text{ที่ } j = 8, \quad \theta_j = \frac{\pi}{2} \frac{j}{k} = \frac{\pi}{2} \text{ rad}$$

$$(3) \frac{\pi}{180} = 1.3378A_1 - 2.0134A_3 + 2.689A_5 - 3.3646A_7 + 4.0402A_9 \\ - 4.7158A_{11} + 5.3914A_{13} - 6.067A_{15} \quad (8)$$

แก้สมการ (1) ถึง (8) หาค่า A_n ได้ดังต่อไปนี้

$$A_1 = 0.1644 \times 10^{-1} \quad A_3 = -0.8803 \times 10^{-2} \quad A_5 = 0.1664 \times 10^{-2} \quad A_7 = -0.8336 \times 10^{-3}$$

$$A_9 = 0.4014 \times 10^{-3} \quad A_{11} = -0.2877 \times 10^{-3} \quad A_{13} = 0.1984 \times 10^{-3} \quad A_{15} = -0.1572 \times 10^{-3}$$

เพราะฉะนั้น จากสมการ (5.82) คำนวณแรงยกของปีกในรูปสัมประสิทธิ์ได้

$$C_L = \frac{a_{os} c_r \pi b}{4S} A_1 \\ = \frac{\pi^2}{(1 + \lambda)} A_1 \\ = 0.104$$

และคำนวณสัมประสิทธิ์แรงยกของหน้าตัด c_l ที่ตำแหน่ง θ_j ทั้ง 8 ตามแนวทางปีก ได้จาก

$$c_{lj} = \frac{\rho V_\infty \Gamma}{\frac{1}{2} \rho V_\infty^2 c_j} = \frac{a_{os} c_r}{c_j} \sum_{n=1}^K A_n \sin n\theta_j$$

เมื่อแทนค่า A_n จากข้างบนจะได้

$$c_{l1} = -0.0099 \quad c_{l2} = -0.0068 \quad c_{l3} = 0.0124 \quad c_{l4} = 0.0448$$

$$c_{l5} = 0.0860 \quad c_{l6} = 0.1282 \quad c_{l7} = 0.1652 \quad c_{l8} = 0.1809$$

ค่า c_l ที่ได้แสดงการแจกแจง c_l ที่มุมปะทะ $\alpha_a = 3^\circ$ สำหรับวิธีการเช่นเดียวกันแต่พิจารณาที่มุมปะทะ 6° สมการ (1) ถึง (8) จะเหมือนเดิมทุกอย่างแต่เปลี่ยนค่า α_a ทางซ้ายของสมการจาก 3° เป็น 6° จะได้ชุดของสมการที่มีคำตอบเป็น

$$A_1 = 0.5454 \times 10^{-1} \quad A_3 = -0.7032 \times 10^{-2} \quad A_5 = 0.3137 \times 10^{-2} \quad A_7 = -0.7019 \times 10^{-3}$$

$$A_9 = 0.6451 \times 10^{-3} \quad A_{11} = -0.3016 \times 10^{-3} \quad A_{13} = 0.2817 \times 10^{-3} \quad A_{15} = -0.2045 \times 10^{-3}$$

ดังนั้น สัมประสิทธิ์แรงยกของปีกที่มุมปะทะ $\alpha_a = 6^\circ$ จะเป็น

$$\begin{aligned}
 C_L &= \frac{a_o c_r \pi b}{4S} A_1 \\
 &= \frac{\pi^2}{(1+\lambda)} A_1 \\
 &= 0.347
 \end{aligned}$$

และคำนวณการแจกแจง c_l ตามแนวแกนปีกที่ตำแหน่ง θ_j ทั้ง 8 ได้เป็น

$$c_{l1} = 0.1028 \quad c_{l2} = 0.1813 \quad c_{l3} = 0.2425 \quad c_{l4} = 0.2953$$

$$c_{l5} = 0.3438 \quad c_{l6} = 0.3856 \quad c_{l7} = 0.4167 \quad c_{l8} = 0.4199$$

รายละเอียดการแจกแจง c_l และค่า C_L ที่มุมปะทะทั้งสองสามารถนำไปหาการแจกแจง c_{lb} และ c'_{la} ของปีกได้ง่ายๆ ดังนี้ คือ

ที่ตำแหน่ง $j = 1$ เขียนสมการ (5.90) สำหรับที่มุมปะทะทั้งสองได้คือ

$$\begin{aligned}
 \text{ที่ } \alpha_a = 3^\circ \quad c_{l1,3^\circ} &= c_{lb1} + c'_{la1} C_{L3^\circ} \\
 - 0.0099 &= c_{lb1} + c'_{la1} (0.104)
 \end{aligned} \tag{9}$$

$$\begin{aligned}
 \text{ที่ } \alpha_a = 6^\circ \quad c_{l1,6^\circ} &= c_{lb1} + c'_{la1} C_{L6^\circ} \\
 0.1028 &= c_{lb1} + c'_{la1} (0.347)
 \end{aligned} \tag{10}$$

สมการ (9) และ (10) เมื่อนำมาแก้แบบพีชคณิตจะได้

$$c_{lb1} = -0.0583 \quad \text{และ} \quad c'_{la1} = 0.4642$$

เมื่อพิจารณาไปทั้ง 8 ตำแหน่งจะได้การแจกแจง c_{lb} และ c'_{la} เป็น

$$c_{lb1} = -0.0583 \quad c_{lb2} = -0.0874 \quad c_{lb3} = -0.0862 \quad c_{lb4} = -0.0630$$

$$c_{lb5} = -0.0260 \quad c_{lb6} = 0.0164 \quad c_{lb7} = 0.0564 \quad c_{lb8} = 0.0788$$

และ

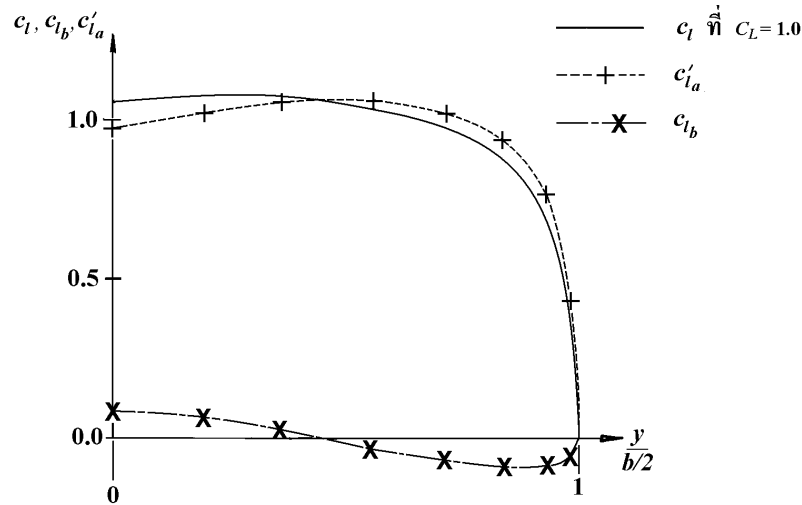
$$c'_{la1} = 0.4642 \quad c'_{la2} = 0.7744 \quad c'_{la3} = 0.9473 \quad c'_{la4} = 1.0321$$

$$c'_{la5} = 1.0644 \quad c'_{la6} = 1.0632 \quad c'_{la7} = 1.0375 \quad c'_{la8} = 0.9824$$

ค่า c_{lb} และ c'_{la} จะมีค่าคงที่สำหรับปีกแต่ละอัน ดังนั้นหลังจากคำนวณได้การแจกแจงของทั้งคู่ การแจกแจง c_l ของปีกที่มุมปะทะอื่น ก็สามารทำได้โดยใช้ค่า C_L ที่มุมปะทะนั้นกับสมการ(5.89) ซึ่งจะหุ่นเวลาที่ต้องทำการคำนวณโดยการแก้สมการตามวิธีข้างบนไปได้มาก สังเกตว่าค่า c'_{la} ที่ได้จะเท่ากับ c_{la} ที่ $C_L = 1.0$ ดังนั้นในตำราทั่วไปมักใช้ c_{la} และ c'_{la} ในความหมายเดียวกัน คือ เป็น “Additional lift” ได้ ในรูป 5.33 แสดงการแจกแจง c_{lb} และ c'_{la} ที่คำนวณได้ตามตัวอย่างนี้

ข. สำหรับสภาพการบินที่กำหนด พิจารณาหา c_l และ c_{di} ได้ดังนี้ ก่อนอื่นจากภาระกรรมปีก (Wing load) ที่กำหนด คำนวณหาสัมประสิทธิ์แรงยกของปีกได้จาก

$$\text{ภาระกรรมปีก} = \frac{w}{S} = 800 \text{ N/m}^2$$



รูป 5.33 การแจกแจง c_l , c_{l_b} และ c'_{l_a} ของปีกตามตัวอย่าง 5.6 (Anderson, 2016)

$$C_L = \frac{L}{\frac{1}{2}\rho V_\infty^2 S} = \left(\frac{w}{S}\right) \frac{1}{\frac{1}{2}\rho V_\infty^2}$$

$$C_L = \frac{800}{\frac{1}{2}(1.226)(250 \times 1000/3600)^2} \frac{\text{N/m}^2}{\text{kg/m}^3 \cdot \text{m}^2/\text{s}^2}$$

$$= 0.271$$

ที่ $C_L = 0.271$ ใช้ข้อมูลจากข้อ ก. จะคำนวณมุม α_a ของปีกได้

$$\alpha_a = \alpha_{a1} + \frac{(\alpha_{a2} - \alpha_{a1})}{C_{L2} - C_{L1}}(C_L - C_{L1})$$

$$= 3^\circ + \frac{(6^\circ - 3^\circ)}{0.347 - 0.104}(0.271 - 0.104)$$

$$\alpha_a = 5.06^\circ = 0.0883 \text{ rad}$$

การพิจารณาคูณลักษณะของปีกตอนนี้ทำได้สองแบบ คือ ใช้มุม α_a ที่ได้ไปแทนทางซ้ายของสมการ (1) ถึง (8) แล้วคำนวณหาสัมประสิทธิ์ A_n โดยตรงเพื่อนำค่าที่ได้ไปหาการแจกแจง c_l หรืออีกทางหนึ่งคือใช้ c_{l_b} และ c'_{l_a} ที่ได้ในข้อ ก. มาคำนวณการแจกแจง c_l ที่ $C_L = 0.271$ ในตัวอย่างนี้เราจะทำดูทั้งสองแบบ

สำหรับวิธีแรก $\alpha_a = 5.06^\circ$ ค่าสัมประสิทธิ์ A_n ของอนุกรมจะเป็น

$$A_1 = 0.0425 \quad A_3 = -0.0076 \quad A_5 = 0.0027 \quad A_7 = -0.0008$$

$$A_9 = -0.0006 \quad A_{11} = -0.0003 \quad A_{13} = 0.0003 \quad A_{15} = -0.0002$$

คำนวณการแจกแจง c_l ได้

$$c_{l1} = 0.0674 \quad c_{l2} = 0.1222 \quad c_{l3} = 0.1701 \quad c_{l4} = 0.2163$$

$$c_{l5} = 0.2621 \quad c_{l6} = 0.3041 \quad c_{l7} = 0.3372 \quad c_{l8} = 0.3447$$

ส่วนวิธีที่สองใช้ค่า c_{lb} และ c'_{la} ที่คำนวณได้จากข้อ ก. กับค่า $C_L = 0.271$ แทนในสมการ

$$(5.90) \quad c_l = c_{lb} + c'_{la} C_L \text{ จะได้}$$

$$c_{l1} = 0.0674 \quad c_{l2} = 0.1222 \quad c_{l3} = 0.1701 \quad c_{l4} = 0.2163$$

$$c_{l5} = 0.2621 \quad c_{l6} = 0.3041 \quad c_{l7} = 0.3372 \quad c_{l8} = 0.3447$$

คำตอบจากสองวิธีถูกต้องตรงกันถึงทศนิยม 4 หลัก แต่วิธีที่สองง่ายกว่าวิธีที่ 1 มาก (เมื่อคิดถึงว่าไม่ต้องแก้สมการ 8 สมการ 8 ตัวแปร) ดังนั้นการพิจารณาการแจกแจง c_l ที่มุมปะทะอื่นก็สามารถทำได้ง่าย ๆ เช่นกัน

เมื่อทราบการแจกแจง c_l แล้ว จะสามารถคำนวณมุมปะทะเหนี่ยวนำได้จากสมการ (5.86) และคำนวณสัมประสิทธิ์ c_{di} ได้จากสมการ (5.92) จากสมการ (5.86)

$$\begin{aligned} \alpha_{ij} &= \frac{a_{os} c_r}{4b} \sum_{n=1}^k n A_n \frac{\sin n\theta_j}{\sin \theta_j} \\ &= \frac{\pi}{AR(1+\lambda)} \sum_{n=1}^k n A_n \frac{\sin n\theta_j}{\sin \theta_j} \end{aligned}$$

แทนค่า A_n จากด้านบน จะได้มุมปะทะเหนี่ยวนำเมื่อแปลงเป็นองศา คือ

$$\alpha_{i1} = 0.516^\circ \quad \alpha_{i2} = 0.244^\circ \quad \alpha_{i3} = 0.177^\circ \quad \alpha_{i4} = 0.253^\circ$$

$$\alpha_{i5} = 0.442^\circ \quad \alpha_{i6} = 0.75^\circ \quad \alpha_{i7} = 1.198^\circ \quad \alpha_{i8} = 1.911^\circ$$

และคำนวณ c_{di} ได้จากสมการ (5.92) $c_{di} = c_l \alpha_i$

$$c_{di1} = 0.00061 \quad c_{di2} = 0.00052 \quad c_{di3} = 0.00052 \quad c_{di4} = 0.00096$$

$$c_{di5} = 0.00202 \quad c_{di6} = 0.00398 \quad c_{di7} = 0.00705 \quad c_{di8} = 0.01149$$

ค่าความชันโค้งแรงยกของหน้าตัด จะได้จาก $c_{li} = a_j \alpha_{aj}$

$$a_1 = 3.414/\text{rad} \quad a_2 = 5.153/\text{rad} \quad a_3 = 5.641/\text{rad} \quad a_4 = 5.569/\text{rad}$$

$$a_5 = 5.303/\text{rad} \quad a_6 = 4.945/\text{rad} \quad a_7 = 4.521/\text{rad} \quad a_8 = 3.908/\text{rad}$$

ค่าความชันของโค้งแรงยกเฉลี่ย $\bar{a}$ คำนวณได้จาก

$$\begin{aligned} \bar{a} &= \frac{1}{S} \int_{-b/2}^{b/2} a c \, dy \\ &= \frac{1}{(1+\lambda)} \int_0^1 a \left(\frac{c}{c_s} \right) d \left(\frac{y}{b/2} \right) \end{aligned}$$

เมื่อประมาณค่าอินทิเกรตโดยใช้กฎพื้นที่สี่เหลี่ยมคางหมู จะได้

$$\bar{a} = \frac{1}{(1+\lambda)} \sum_{j=1}^{k-1} (a_j \frac{c_j}{c_s} + a_{j+1} \frac{c_{j+1}}{c_s}) (\frac{y_j}{b/2} - \frac{y_{j+1}}{b/2})$$

แทนค่า a_j , c_j , c_s , y_j จากที่ผ่านมา จะได้

$$\bar{a} = 4.824/\text{rad}$$

ดังนั้นค่ามุมปะทะสมบูรณ์ของปีกวัดจาก Z.L.L.W.

$$\alpha_{aw} = \frac{C_L}{a} = \frac{0.271}{4.824} = 0.056 \text{ rad} = 3.218^\circ$$

และ C_{Di} ของปีก คำนวณได้จาก

$$\begin{aligned} C_{Di} &= \frac{\pi^3}{AR(1+\lambda)^2} \sum_{n=1}^k n A_n^2 \\ &= \frac{\pi^3}{AR(1+\lambda)^2} [A_1^2 + 3A_3^2 + 5A_5^2 + \dots + 15A_{15}^2] \\ &= 0.0044 \end{aligned}$$

นั่นคือ คุณลักษณะของปีกภายใต้สภาวะการบิน คือ

$$\text{สัมประสิทธิ์แรงยก } C_L = 0.271$$

$$\text{สัมประสิทธิ์แรงต้านเหนี่ยวนำ } C_{Di} = 0.0041$$

$$\text{ความชันโค้งแรงยกเฉลี่ย } \bar{a} = 4.824/\text{rad}$$

$$\text{มุมปะทะสมบูรณ์วัดจาก Z.L.L.W. } \alpha_{aw} = 3.218^\circ$$

$$\text{มุมปะทะสมบูรณ์ของโคนปีก } \alpha_{ag} = 5.06^\circ$$

ตอบ

จากตัวอย่างคงเห็นแล้วว่าปีกที่มีการบิดปีกมีการคำนวณในแนวทางเดียวกับปีกตรง เพียงแต่จะยุ่งยากกว่า นอกจากนี้สังเกตจากรูป 5.33 รายละเอียดการแจกแจง c_l เมื่อใช้อนุกรม 8 เทอม ให้รายละเอียดได้ดี แต่ถ้าปีกมีการบิดอย่างฉับพลันการคำนวณต้องเพิ่มจำนวนเทอมขึ้นอีก การที่ต้องแก้ปัญหาที่มีการแก้สมการลักษณะนี้สะดวกกว่ามากถ้าใช้โปรแกรมคอมพิวเตอร์ช่วย

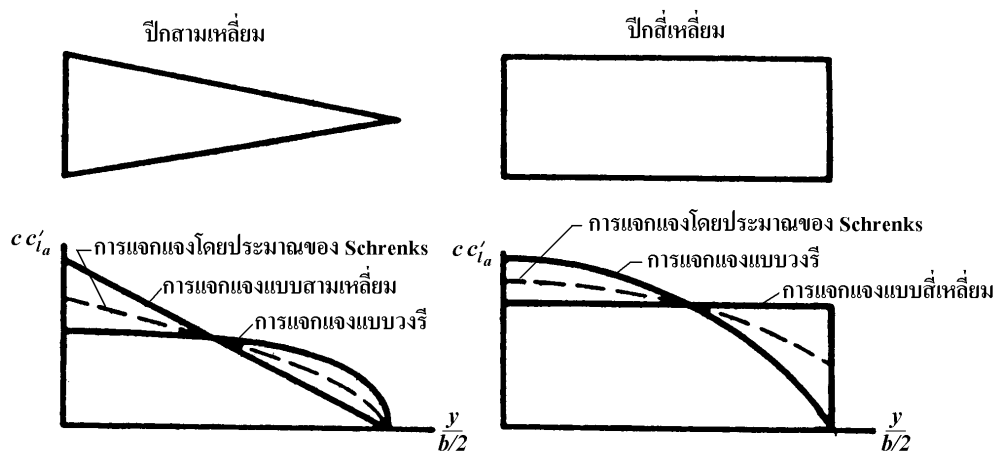
5.10 การคำนวณแรงยกเพิ่มเติมโดยประมาณ

(Approximate Calculation of additional lift)

การพิจารณาคุณลักษณะของปีกในหัวข้อ 5.6 และ 5.9 ถึงแม้จะให้รายละเอียดของการแจกแจงแรงยกได้ดี แต่ก็ต้องใช้การคำนวณที่ยาวและยุ่งยาก ที่จริงแล้วส่วนสำคัญของการแจกแจงแรงยกแบบทั่วไปของปีก คือ การที่มันเบี่ยงเบนไปจากการแจกแจงแรงยกแบบวงรีทำให้มีดาวนัวอชเปลี่ยนแปลงไปตลอดแนวปีก ต่างจากดาวนัวอชที่มีค่าคงที่ไปตลอดแนวปีกของการแจกแจงแรงยกแบบวงรี ในหัวข้อ 5.5 ปีกที่มีรูปร่างเป็นวงรี (Elliptic wing) จะสร้างแรงยกที่แจกแจงเป็น

แบบวงรีตลอดแนวกางปีก ดังนั้นเราอาจคาดว่าปีกที่มีรูปร่างเป็นสี่เหลี่ยม (Rectangular wing) หรือปีกสี่เหลี่ยมคางหมู (Taper wing) จะมีการแจกแจงแรงยกที่เป็นแบบเดียวกับรูปทรงปีกเช่นกัน ซึ่งจากการคำนวณในตัวอย่าง 5.2 ถึง 5.5 คงทำให้เห็นแล้วว่าเป็นการสรุปหรือคาดคะเนที่ผิด การแจกแจงแรงยกของปีกสี่เหลี่ยมเบี่ยงเบนไปเพียงเล็กน้อยจากการแจกแจงแรงยกแบบวงรี (ซึ่งสังเกตได้จากค่าสัมประสิทธิ์ A_n ในอนุกรมที่ใช้แทนการแจกแจงแรงยก) และสัมประสิทธิ์แรงยก C_L ของปีกมีค่าขึ้นกับสัมประสิทธิ์ A_1 ของเทอม $\sin \theta$ ในอนุกรมเท่านั้น จากแนวโน้มอันนี้ “Schrenk” (1940) ได้ทำการตรวจสอบผลการทดลองของปีกที่มีการบิดปีกจำนวนมาก และสรุปได้ว่าค่าประมาณของการแจกแจงแรงยกขั้นต้นในส่วนของแรงยกเพิ่มเติม หรือแรงยกที่เกิดควบคู่กับความยาวคอर्डของปีกที่ไม่มีการบิดปีกจะมีค่าที่ทุกตำแหน่งตามแนวกางปีกเป็นสัดส่วนกับระยะทางที่อยู่ระหว่าง การแจกแจงความยาวคอर्डแบบวงรีและความยาวคอर्डจริงของปีกที่มีพื้นที่เท่ากัน และมีช่วงกางปีก (Span) เท่ากัน ตามตัวอย่างที่แสดงในรูป 5.34 นั่นคือเมื่อพิจารณาจากความยาวคอर्डวงรี และความยาวคอर्डจริงของปีกที่มีพื้นที่และ ระยะกางปีกเท่ากัน ค่าประมาณ c'_{la} ของ Schrenk จะเป็น (Anderson, 2016)

$$c'_{la} = \frac{1}{2} \left[1 + \frac{4S}{\pi bc} \sqrt{1 - \left(\frac{2y^2}{b} \right)} \right] \quad (5.97)$$



รูป 5.34 การประมาณแรงยกเพิ่มเติม c'_{la} ของ “Schrenk” (Anderson, 2016)

ในส่วนของ c_{lb} เนื่องจากการบิดปีก ค่าโดยประมาณของปีกที่มีอัตราสอบ (Taper) และการบิดปีก คือ

$$c_{lb} = \frac{a_o}{2} (\alpha_{wo} + \epsilon) \quad (5.98)$$

เมื่อ a_o = ความชันของโค้งแรงยกของหน้าตัด

α_{w_0} = มุมปะทะที่แรงยกปีกเป็นศูนย์ วัดจากแนว Z.L.L ของหน้าตัดที่โคนปีกเป็นแนวอ้างอิง

$$\cong -\frac{\varepsilon_T (1+2\lambda)}{3 (1+\lambda)}$$

ε_T = มุมบิดที่ปลายปีก มีค่าเป็น + สำหรับบิดขึ้น “Washin”
มีค่าเป็น - สำหรับบิดลง “Washout”

$$\varepsilon = \text{มุมบิดของหน้าตัด} = \frac{2\varepsilon_T}{b}|y|$$

ค่าโดยประมาณของสัมประสิทธิ์แรงยกมูลฐาน c_{l_b} และสัมประสิทธิ์แรงยกเพิ่มเติม c'_{l_a} เป็นการพิจารณาคุณสมบัติของปีกอย่างรวดเร็วไม่ต้องผ่านขั้นตอนยุ่งยากอย่างที่ผ่านมา

ตัวอย่าง 5.6 ปีกมี $AR = 9.02$ $\lambda = 0.4$ มีหน้าตัดแพนอากาศที่เป็น NACA 65-210 ถ้าปีกมีการบิดลง (Washout) 2° จงประมาณการแรงแฉง c_l ของปีกที่ $C_L = 1.22$

วิธีทำ ใช้สมการ (5.97) และ (5.98) คำนวณค่า c_{l_b} และ c'_{l_a} โดยประมาณที่ระยะ $\frac{y}{b/2}$ 6 ตำแหน่ง

ตามรูป 5.35 ที่ $\frac{y}{b/2} = 0, 0.2, 0.4, 0.6, 0.8, 1.0$

โดยที่

$$\varepsilon_T = -2^\circ$$

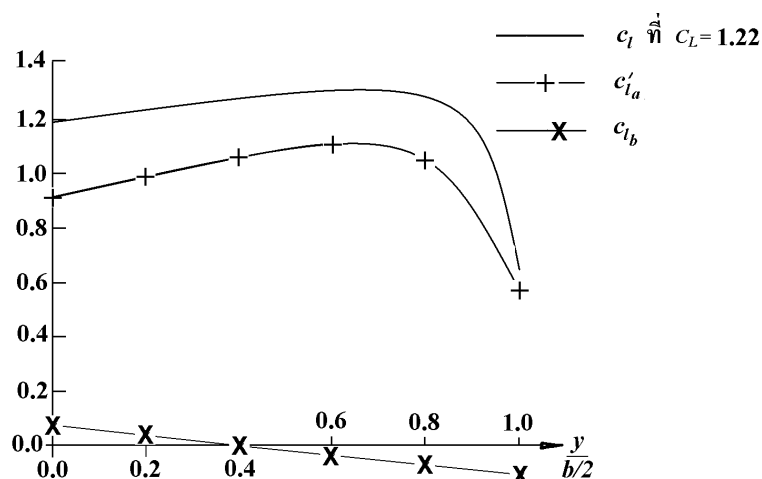
$$\begin{aligned}\alpha_{w_0} &= -\frac{(-2^\circ)(1+2 \times 0.4)}{3(1+0.4)} \\ &= 0.057^\circ = 0.015 \text{ rad}\end{aligned}$$

$$S = c_r(1+\lambda)$$

$$\frac{c}{c_r} = 1 - (1-\lambda) \frac{y}{b/2}$$

นั่นคือ

$$\frac{4S}{\pi bc} = \frac{2}{\pi} \frac{(1+\lambda)}{1-(1-\lambda)\frac{y}{b/2}}$$



รูป 5.35 การทำนายการแจกแจงแรงยกของปีกในตัวอย่าง 5.6 (Anderson, 2016)

ตารางการคำนวณ

$\frac{y}{b/2}$	0	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0 *
c_{l_b}	0.047	0.025	0.00031	-0.019	-0.041	-0.063
c'_{l_a}	0.945	0.996	1.037	1.057	1.014	0.5

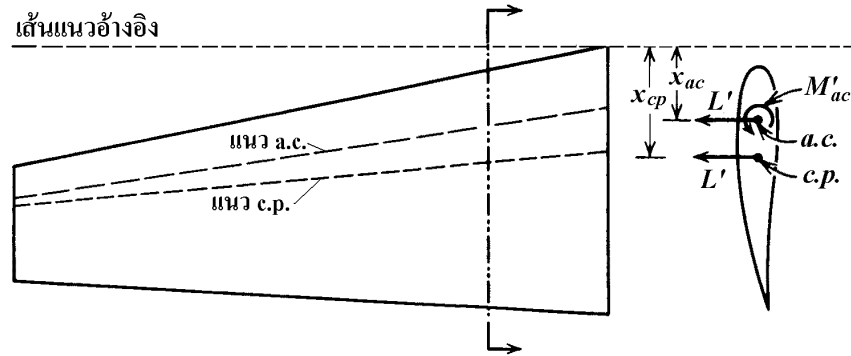
ผลการคำนวณแสดงในตารางเป็นค่า c_{l_b} และ c'_{l_a} ค่า c_l ที่ $C_L = 1.22$ คำนวณจาก

$$c_l = c_{l_b} + c'_{l_a} (1.22)$$

เปรียบเทียบกับตัวอย่าง 5.5 และ 5.6 จะเห็นว่ายกเว้นบริเวณปลายปีกที่ค่าแรงยกเพิ่มเติม (Additional lift) จะผิดจากความจริงไปมากหน่อยแล้ว การคำนวณโดยวิธีของ Schrenk ให้ค่าโดยประมาณที่ดีทีเดียว และมีวิธีการที่สะดวกกว่าการคำนวณหลักเป็นอย่างมาก แนะนำให้ลองคำนวณตัวอย่าง 5.5 โดยวิธีของ Schrenk แล้วนำค่าที่ได้เปรียบเทียบกับผลลัพธ์จากการคำนวณตรงประโยชน์ที่เห็นได้ชัดสำหรับวิธีนี้คือการประมาณภาระกรรมของปีก เพื่อประเมินความแข็งแรงของโครงสร้าง ซึ่งคงเห็นแล้วว่าการประมาณค่าภาระกรรมของปีกให้เป็นสัดส่วนกับคอร์ดไม่เหมาะสมเป็นอย่างยิ่ง

5.11 คุณสมบัติอื่นของปีก

คุณสมบัติที่สำคัญของปีกที่ต้องพิจารณานอกจาก C_L , C_D และอื่นๆ ก็คือตำแหน่งจุดศูนย์ความดัน (C.P.) จุดศูนย์อากาศพลศาสตร์ (A.C.) รวมถึงโมเมนต์ของปีกรอบแนวอ้างอิงใดๆ



รูป 5.36 โมเมนต์ของปีกรอบแนวอ้างอิง (Bertin & Cummings, 2025)

ในการพิจารณาคุณลักษณะของปีก ตัวแปรที่สำคัญคือตำแหน่งหรือแนวของจุดศูนย์ความดันของปีก $X_{c.p.}$ ซึ่งได้จากการเฉลี่ยน้ำหนักของระยะจุดศูนย์ความดัน $x_{c.p.}$ ของหน้าตัดตลอดระยะทางปีก (Weighted average of $x_{c.p.}$) ที่มุมปะทะอันหนึ่งจากแนวอ้างอิง คือ

$$X_{c.p.} = -\frac{M_{RL}}{L} \quad (5.99)$$

เมื่อ M_{RL} เป็นโมเมนต์รอบแนวอ้างอิง คำนวณได้จาก

$$\begin{aligned} M_{RL} &= -\int_{-b/2}^{b/2} L' x_{c.p.} dy \\ &= -\int_{-b/2}^{b/2} L' x_{a.c.} dy + \int_{-b/2}^{b/2} M'_{a.c.} dy \end{aligned} \quad (5.100)$$

ในสมการ (5.100) $x_{a.c.}$ และ $M'_{a.c.}$ คือ ตำแหน่งของจุด a.c. และโมเมนต์รอบจุด a.c. ของหน้าตัด (ดูรูป 5.36) เป็นคุณสมบัติของรูปแผนอากาศของหน้าตัด ซึ่งขึ้นกับระยะ y ตามแนวทางปีก แต่จะไม่ขึ้นกับมุมปะทะ (เป็นสิ่งที่พิสูจน์แล้วในบทที่ 4) ส่วน L' เป็นแรงยกต่อหนึ่งหน่วยระยะทางปีกของหน้าตัด ซึ่งขึ้นอยู่กับทั้งตำแหน่ง y และมุมปะทะสมบูรณ์ α_a ของหน้าตัด สิ่งที่มาคือ (ดูรูป 5.30) M_{RL} จะเป็นฟังก์ชันของมุมปะทะสมบูรณ์ของปีก α_{a_w} ตามสมการ (5.95) ดังนั้นจากสมการ (5.99) $X_{c.p.}$ จะเป็นฟังก์ชันของ α_{a_w} ด้วย ถ้าเราแทน L' ในรูปของ “แรงยกมูลฐาน” และ “แรงยกเพิ่มเติม” (Basic & Additional lift) สมการ (5.100) จะเป็น

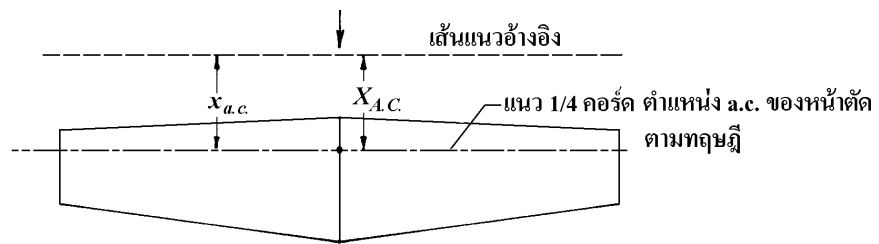
$$X_{c.p.} = -\frac{\int_{-b/2}^{b/2} [-(c_{l_b} + c'_{l_a} C_L) x_{a.c.} c + c_{m_{a.c.}} c^2] dy}{\int_{-b/2}^{b/2} c'_{l_a} C_L c dy} \quad (5.101)$$

จากรูป 5.36 สังเกตว่าเราอาจพิจารณาแรงกระทำบนหน้าตัดในเทอมของแรงยก L' ของหน้าตัดกระทำที่ $x_{c.p.}$ หรือในเทอมของ L' ของหน้าตัดกระทำที่ $x_{a.c.}$ รวมกับโมเมนต์รอบ a.c., $M'_{a.c.}$

ก็ได้ ดังนั้นระยะ $X_{A.C.}$ ระหว่างแนวอ้างอิงถึงจุดศูนย์กลางอากาศพลศาสตร์ของปีก (Wing aerodynamics center) จะได้จาก

$$X_{A.C.} = \frac{\int_{-b/2}^{b/2} c'_{l_a} c x_{a.c.} dy}{\int_{-b/2}^{b/2} c'_{l_a} c dy} \quad (5.102)$$

สมการ (5.102) แสดงว่าจุดศูนย์กลางอากาศพลศาสตร์ของปีก (A.C.) อยู่ที่ตำแหน่งของจุดcentroid (Centroid) ของ “แรงยกเพิ่มเติม” (Additional lift) ขอให้สังเกตด้วยว่าสำหรับปีกที่มีแนว a.c. ของหน้าตัดอยู่ในแนวเดียวกัน หรือ $x_{a.c.}$ คงที่ ตำแหน่ง $X_{A.C.}$ จะอยู่ในแนวเดียวกับ $x_{a.c.}$ นั่นเอง



รูป 5.37 จุดศูนย์กลางอากาศพลศาสตร์ตามทฤษฎีของปีกตรงรอบแนวอ้างอิง (Bertin & Cummings, 2025)

สิ่งที่ได้ตามมาคือ c_{l_b} และ $c_{m_{a.c.}}$ ในสมการ (5.101) จะเป็นตัวกำหนดขนาดของโมเมนต์รอบ A.C., $M_{A.C.}$ ของปีก ซึ่งได้มาจากนิยามของจุด A.C. ที่ว่าโมเมนต์รอบจุดนี้จะไม่เปลี่ยนแปลงไปตามมุมปะทะ (หรือไม่เปลี่ยนแปลงตาม “Additional lift”) ดังนั้นถ้ากำหนดให้ $\Delta x_{a.c.}$ เป็นระยะจากแนว A.C. ไปถึงจุด a.c. ของหน้าตัด และกำหนดให้สัมประสิทธิ์โมเมนต์รอบจุดศูนย์กลางอากาศพลศาสตร์ของปีก

$$C_{MAC} = \frac{M_{A.C.}}{q_\infty \bar{c} S}$$

²⁾ อาจอ้างอิง C_{MAC} อีกแบบหนึ่งโดยใช้นิยามของ “Mean aerodynamic chord”

$$\bar{c} = \frac{\int_{-b/2}^{b/2} c^2 dy}{\int_{-b/2}^{b/2} c dy} = \frac{\int_{-b/2}^{b/2} c^2 dy}{S}$$

ในกรณีนี้ สำหรับปีกที่ไม่มีการบิดปีก $c_{l_b} = 0$ และ $c_{m_{a.c.}}$ คงที่ สมการ (5.103) จะเป็น

$$\begin{aligned} \frac{M_{A.C.}}{q_\infty \bar{c} S} &= \frac{\bar{c}}{\bar{c}} \int_{-1/2}^{1/2} c_{m_{a.c.}} \left(\frac{c}{\bar{c}} \right)^2 d\left(\frac{y}{b} \right) = c_{m_{a.c.}} \frac{\bar{c}}{\bar{c}} \frac{1}{b} \int_{-b/2}^{b/2} \frac{c^2}{\bar{c}^2} dy \\ &= c_{m_{a.c.}} \end{aligned}$$

หรือ $C_{MAC} = c_{m_{a.c.}}$ นั่นเอง

เมื่อ $\bar{c} = \frac{S}{b}$ คือความยาวคอร์ดเฉลี่ย จะได้

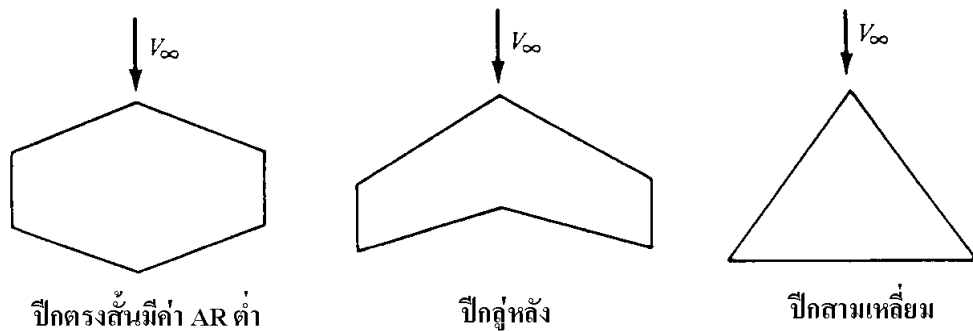
$$C_{MAC} = \int_{-1/2}^{1/2} \left[-c_{lb} \frac{\Delta x_{a.c.} c}{\bar{c}^2} + c_{m.a.c.} \left(\frac{c}{\bar{c}} \right)^2 \right] d\left(\frac{y}{b} \right) \quad (5.103)$$

หรืออาจพิจารณาจากผลของการย้ายโมเมนต์จากจุด a.c. ของหน้าตัดไปยังแนว A.C. ของปีก

$$M_{A.C.} = \int_{-1/2}^{1/2} (M'_{a.c.} - L'_b \Delta x_{a.c.}) d\left(\frac{y}{b} \right) \quad (5.104)$$

5.12 การพิจารณาแรงยกของปีกด้วยวิธีวอร์เทกเลททิส (Vortex Lattice Method)

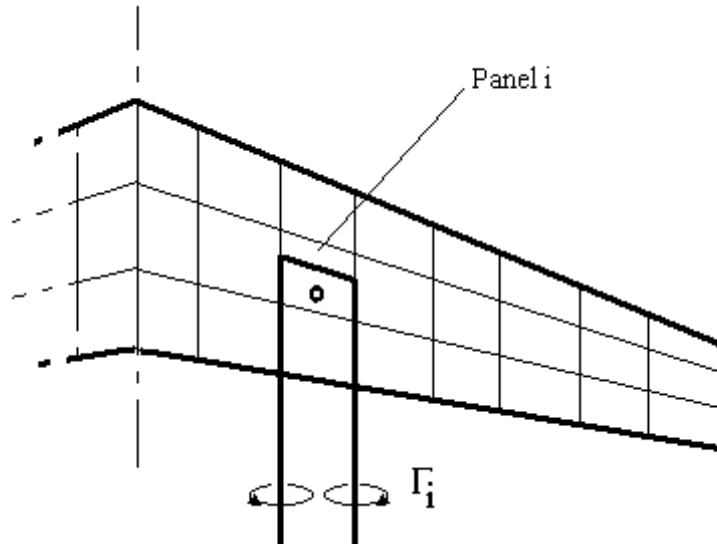
ทฤษฎีแนวแรงยกของพรานด์ในหัวข้อที่ผ่านมาใช้ได้กับปีกตรงที่มีอัตราเรียวปีกพอสมควร แต่สำหรับปีกที่มีอัตราเรียวปีกต่ำ ปีกคู่ หรือปีกสามเหลี่ยม อย่างที่แสดงในรูป 5.38 ไม่เหมาะที่จะคำนวณผลที่เกิดขึ้นโดยทฤษฎีนี้ นอกจากนี้ทฤษฎียังไม่ให้รายละเอียดการแจกแจงแรงยกตามแนวคอร์ด ดังนั้นสำหรับปีกแบบนี้จำเป็นต้องใช้แบบจำลองปีกที่ซับซ้อนกว่าโดยขยายแนวแรงยกที่เกิดจากวอร์เทครูปเกือกม้าที่กระจายตามแนวกางปีก ด้วยชุดอนุกรมของแนวแรงยกย่อยๆ ที่กระจายอยู่บนระนาบของปีก ในหัวข้อนี้จะได้แสดงวิธีการและแบบจำลองที่ใช้วิเคราะห์ปีกเหล่านี้ในเบื้องต้น อย่างไรก็ตาม เนื้อหาเกินขอบเขตที่จะพิจารณาเรื่องนี้โดยละเอียดในเอกสารฉบับนี้ ผู้เขียนสนับสนุนให้ผู้สนใจวิธีเชิงตัวเลขในการวิเคราะห์ปีกได้ศึกษาจากตำราที่เกี่ยวข้อง



รูป 5.38 รูประนาบปีกที่ไม่เหมาะจะใช้วิเคราะห์ด้วยทฤษฎีแนวแรงยก (Anderson, 2016)

การพิจารณาคูณลักษณะที่สำคัญของปีกที่มีรูปร่างทั่วไปไม่จำกัดเฉพาะปีกตรง ทำได้ด้วยวิธีเชิงตัวเลขที่เรียกว่าวิธีวอร์เทกเลททิส (Vortex Lattice Method) สำหรับการไหลไร้ความหนืดไร้การอัดตัว วิธีวอร์เทกเลททิสจะพิจารณาให้ปีกประกอบขึ้นจากกลุ่มของแผ่นแรงยก (Lifting panel) หรือปีกย่อยๆ ที่แต่ละแผ่นจะบรรจุไว้ด้วยวอร์เทครูปเกือกม้าหนึ่งชุดที่มีบาวด์วอร์เทคของวอร์เทครูปเกือกม้าของปีกย่อยนี้จะอยู่ที่แนว $\frac{1}{4}$ คอร์ด และมีวอร์เทคปลายปีกทอดตัวไปข้างหลังจากปลายทั้งสองตาม

ตัวอย่างที่แสดงในรูป 5.39 ในทำนองนี้การเปลี่ยนแปลงแรงยกของปีกทั้งตามแนวคอร์ดและตามแนวทางปีกอาจจัดให้มีการเปลี่ยนแปลงเป็นขั้นๆ จากปีกย่อยอันหนึ่งไปยังปีกย่อยอีกอันได้



รูป 5.39 แบบจำลองปีกของวิธีวอร์เทกแลททิส (Moran, 2010)

กำลังของบาวด์วอร์เทคบนปีกย่อยแต่ละอันจะถูกคำนวณโดยใช้เงื่อนไขการไหลผ่านผิวปีกเป็นตัวกำหนดเงื่อนไขที่กล่าวคือความเร็วของกระแสอากาศจะอยู่ในแนวสัมผัสกับผิวปีก หรือส่วนของความเร็วในแนวตั้งฉากกับผิวปีกจะเป็นศูนย์ เงื่อนไขนี้จะนำไปใช้ที่ตำแหน่ง $3/4$ คอร์ดในแนวกึ่งกลางของปีกย่อยแต่ละอัน โดยส่วนของความเร็วตั้งฉากจะประกอบด้วยส่วนของความเร็วของกระแสอิสระร่วมกับส่วนของความเร็วเหนี่ยวนำจากชุดของวอร์เทครูปเกือกม้าจากปีกย่อยทั้งหมดรวมกัน ความเร็วเหนี่ยวนำของวอร์เทครูปเกือกม้าจากปีกย่อยนี้จะขึ้นกับกำลังของวอร์เทค แต่ละตัว ดังนั้นจากปีกย่อยทั้งหมดชุดของสมการที่ขึ้นกับกำลังของปีกย่อยในรูปสมการพีชคณิตเชิงเส้นจะถูกสร้างขึ้นชุดของสมการนี้จะอยู่ในรูป

$$V_n = 0 = V_\infty \sin \theta + w_i \quad (5.105a)$$

เมื่อ w_i คือส่วนของความเร็วตั้งฉากกับผิวบนปีกย่อย i จากผลของวอร์เทครูปเกือกม้าทุกตัว

$$w_i = \sum_{j=1}^N A_{ij} \Gamma_j$$

ดังนั้น

$$\sum_{j=1}^N A_{ij} \Gamma_j = -V_\infty \sin \theta \quad (5.105b)$$

Γ_j ในอนุกรมคือกำลังของวอร์เทคบนปีกย่อย j และสัมประสิทธิ์ A_{ij} จะแทนความเร็วเหนี่ยวนำบนปีกย่อย i เนื่องจากวอร์เทคบนปีกย่อย j ถ้าสมมติให้ปีกย่อยทุกอันอยู่บนระนาบเดียวกันโดยประมาณ สัมประสิทธิ์ A_{ij} สามารถคำนวณได้โดยง่ายจากการประยุกต์กฎของบิโอท-ซาวาร์ต

จากรูป 5.41 เทอมทางขวาของสมการ (5.105b) ขึ้นอยู่กับความเร็วกระแสอิสระ มุมปะทะของปีก และความชันของระนาบปีกย่อยเนื่องจากความโค้งของปีก ดังนั้นกำลังของวอร์เทกบนปีกย่อยแต่ละอันหาได้จากการแก้ชุดของสมการ (5.105b) โดยใช้ข้อมูลจากสมการ (5.106)

สัมประสิทธิ์แรงยกของปีก ณ มุมปะทะคำนวณได้โดยรวมแรงยกที่แจกแจงอยู่บนปีกย่อย แรงยกบนปีกย่อยแต่ละอันสามารถคำนวณได้จากทฤษฎีของคุตต้าและจูโควสกี เมื่อทราบกำลังของวอร์เทกบนปีกย่อย

$$L_i = \rho V_\infty \Gamma_i 2k \quad \text{แรงยกบนปีกย่อย } i$$

และ

$$L = \sum_{i=1}^N L_i \quad \text{แรงยกบนปีก}$$

ความเร็วดาวนวอชที่เกิดขึ้นบนปีกย่อยแต่ละอันสามารถคำนวณได้ในทำนองเดียวกัน พร้อมกับการเบี่ยงเบนของกระแสอากาศที่ผ่านปีกย่อยแต่ละอันไปจากแนวของกระแสอิสระ ผลของความเร็วดาวนวอชเหล่านี้ได้กล่าวไว้แล้วในตอนต้นของบทนี้ คือ มันทำให้ทิศทางของกระแสอากาศที่เข้าหาปีกย่อยแต่ละอันเหมือนกับมุมตกเล็กน้อยเป็นผลให้ทิศทางของแรงยกที่เกิดขึ้นมีแนวเอียงไปด้านหลังเล็กน้อย และทำให้เกิดส่วนของแรงในทิศทางขนานกับการเคลื่อนที่ของปีก หรือแรงต้านเหนี่ยวนำ โดยรวมแรงต้านเหนี่ยวนำบนปีกย่อยแต่ละอันเข้าด้วยกันตลอดแนวกางปีก จะได้แรงต้านเหนี่ยวนำของปีก

$$D_{\text{panel},i} = \rho V_\infty \Gamma_i 2k \sin \alpha_i \quad \text{แรงต้านบนปีกย่อย } i$$

$$D_i = \sum_{i=1}^N D_{\text{panel},i} \quad \text{แรงต้านเหนี่ยวนำของปีก}$$

มุมปะทะเหนี่ยวนำ α_i เป็นตัวแทนของมุมที่แรงยกโดยรวมเอียงไปทางด้านหลัง และต้องคำนวณจากความเร็วเหนี่ยวนำบนบาวด์วอร์เทคของปีกย่อยแต่ละอันที่เป็นผลจากการเหนี่ยวนำของวอร์เทกบนปีกย่อยอันอื่นๆ กับกระแสอิสระ

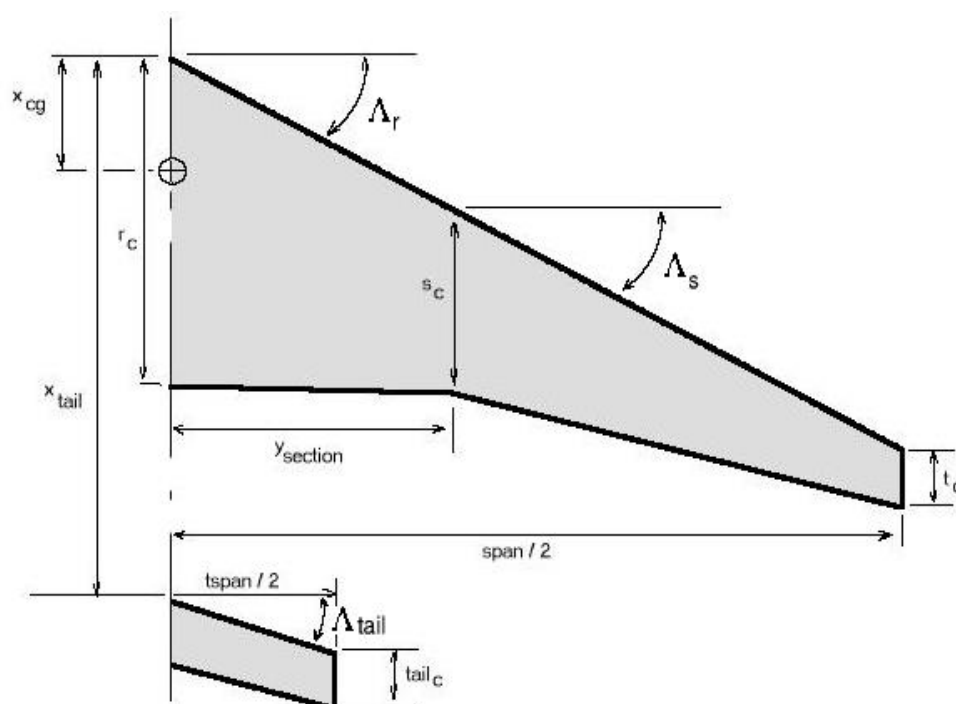
สำหรับโมเมนต์รอบขายหน้าของโคนปีกจะสามารถคำนวณได้ โดยรวมผลคูณของแรงยกบนแต่ละปีกย่อยกับระยะตั้งฉากจากขายหน้าโคนปีกมาถึงจุดกึ่งกลางของบาวด์วอร์เทคของปีกย่อยนั้น

5.7.1 โปรแกรมคอมพิวเตอร์

โดยดำเนินการตามวิธีวอร์เทคแลททิสที่ได้กล่าวมา เราอาจสร้างโปรแกรมคอมพิวเตอร์เพื่อคำนวณคุณสมบัติของปีกที่มีรูปร่างและลักษณะทางเรขาคณิตแบบต่างๆ ได้ โปรแกรมตัวอย่างสามารถคำนวณคุณสมบัติของปีกโดยสมมติให้รูปร่างของปีกเปลี่ยนแปลงแบบเชิงเส้นได้สองบริเวณ และมีส่วนของหางที่เป็นรูปร่างอย่างง่าย (Moran, 2010) อย่างที่แสดงในรูป 5.42 ในโปรแกรมบริเวณแรกของปีก คือ บริเวณจากส่วนโคนปีกถึงตำแหน่งใดๆตามแนวกางปีก ต่อจากส่วนนี้ไปถึงปลายปีกจะเป็นบริเวณที่สอง คุณสมบัติของหน้าตัดสามารถกำหนดให้เปลี่ยนแปลงแบบเชิงเส้นตรงในแต่ละบริเวณ จากโคนปีกไปกลางปีก และต่อไปยังปลายปีกได้ หรืออาจกำหนดให้คงที่

ตลอดแนวกางปีกก็ได้ ภาระกรรมปีกสมมุติให้สมมาตรรอบแนวโคนปีก โปรแกรมยังสามารถกำหนดตำแหน่งของระนาบทางด้านหลังของโคนปีกโดยมีความยาวคอर्डและมุมลู่อหลังคงที่ นอกจากนี้ยังสามารถกำหนดตำแหน่งจุดศูนย์ถ่วง (CG position) เป็นสัดส่วนของความยาวคอर्डที่โคนปีกจากชายหน้า เพื่อให้เป็นจุดอ้างอิงสำหรับสัมประสิทธิ์โมเมนต์ C_M ของปีก คุณสมบัติของหน้าตัดแพนอากาศสำหรับโคนปีก กลางปีก และปลายปีก อาจกำหนดได้โดยการกำหนดความยาวคอर्ड และ มุมปะทะแรงยกเป็นศูนย์ ซึ่งจะใช้สร้างเส้นโค้งเฉลี่ยของแต่ละหน้าตัดที่สัมพันธ์กับรูปร่างหน้าตัดแพนอากาศที่ต้องการ และสุดท้ายสามารถกำหนดมุมติดตั้งหางได้

โปรแกรมใช้วิธีออร์ทอกอนัลเทคแฮทิส หาคำตอบในรูปของ สัมประสิทธิ์แรงยกกับมุมปะทะ สัมประสิทธิ์โมเมนต์ปีกเทียบกับมุมปะทะ และสัมประสิทธิ์โมเมนต์แรงต้านเหนียวนำกับกำลังสองของสัมประสิทธิ์แรงยก ที่มุมปะทะที่กำหนดโปรแกรมยังให้คำตอบที่เป็นการแจกแจงความต่างสัมประสิทธิ์ความดัน

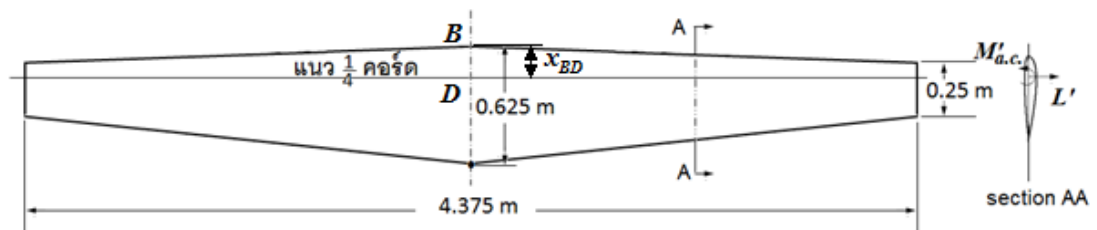


รูป 5.42 ตัวแปรในการกำหนดรูปร่างลักษณะของปีก (Moran, 2010)

ที่ได้กล่าวมาทั้งหมดเป็นเพียงตัวอย่างเบื้องต้นของวิธีออร์ทอกอนัลเทคแฮทิสซึ่งเป็นวิธีที่ถูกนำมาใช้อย่างกว้างขวางในการวิเคราะห์คุณลักษณะของปีกยาวจำกัด ซึ่งผู้เรียนควรจะค้นคว้าต่อในรายละเอียดจากตำราที่เกี่ยวข้องซึ่งมีหลายเล่มที่ให้รายละเอียดในเรื่องนี้ไว้อย่างดี รายชื่อตำราเหล่านี้ได้แสดงไว้ในรายการเอกสารอ้างอิงท้ายเอกสารนี้

แบบฝึกหัดบทที่ 5

1. ไยวอร์เทคกำลัง Γ ขดเป็นรูปวงกลมรัศมี R จงแสดงความเร็วที่ถูกเหนี่ยวนำให้เกิดขึ้นที่จุดศูนย์กลางในเทอมของ Γ และ R
2. พิจารณาไยวอร์เทคในข้อ 1 ถ้ามีเส้นตรงลากผ่านจุดศูนย์กลางตั้งฉากกับระนาบของวงกลมไยวอร์เทค จงหาความเร็วของจุดบนเส้นตรงที่อยู่ห่างเป็นระยะ A จากแนวระนาบ
3. แพนอากาศ NACA 23012 วัดความชันโค้งแรงยกได้ $0.1080 \text{ degree}^{-1}$ และ $\alpha_{L=0} = -1.3^\circ$ พิจารณาปีกที่ใช้แพนอากาศนี้ เมื่อ $AR = 8$ มีอัตราสอปีก 0.8 สมมติให้ค่า $\delta = \tau$ จงคำนวณสัมประสิทธิ์แรงยกและแรงต้านเหนี่ยวนำของปีกนี้ที่มุมปะทะ 7°
4. อากาศยานเบาชนิดหนึ่งมีพื้นที่ปีก 170 ft^2 ระยะกางปีก 32 ft น้ำหนักรวมสูงสุด 2450 lb ปีกใช้หน้าตัดแพนอากาศ NACA 65 - 415 มีความชันโค้งแรงยก $0.1033 \text{ degree}^{-1}$ และ $\alpha_{L=0} = -3^\circ$ สมมติให้ค่า $\tau = 0.12$ ถ้าอากาศยานบินเดินทางด้วยความเร็ว 120 mi/hr ในบรรยากาศที่ระดับน้ำทะเล จงหามุมปะทะของปีกเมื่ออากาศยานบินตรงระดับด้วยน้ำหนักรวมสูงสุด
5. อากาศยานในข้อ 4 ถ้าตัวประกอบประสิทธิภาพของปีก (Span efficiency factor) $e = 0.064$ จงคำนวณแรงต้านเหนี่ยวนำของอากาศยาน
6. พิจารณาปีกยาวจำกัด (Finite wing) ด้วยค่า Aspect ratio = 6 สมมติว่าการกระจายแรงยกเป็นรูปวงรี ความชันของโค้งแรงยกสำหรับแพนอากาศเป็น $0.1/\text{องศา}$ จงคำนวณความชันโค้งแรงยกสำหรับ (ก) ปีกตรง (ข) ปีกคู่ ด้วย half-chord line sweep ของ 45°
7. อากาศยานต้นแบบถูกแผนแบบให้ทำการบินที่ระยะสูง $3,000 \text{ m}$ ด้วยความเร็ว 150 km/hr เป็นปีกสี่เหลี่ยมคางหมูตามระนาบปีกที่แสดงในรูป มีความยาวคอร์ดที่โคนปีก $c_r = 0.625 \text{ m}$ ความยาวคอร์ดที่ปลายปีก $c_t = 0.25 \text{ m}$ มีความยาวคอร์ดเฉลี่ยอากาศพลศาสตร์ = 0.55 m มีระยะกางปีก (span) = 4.375 m ปีกมีค่าสัมประสิทธิ์โมเมนต์ก้มเงยรอบจุดศูนย์กลางอากาศพลศาสตร์, $C_{M_{a.c.}} = -0.01$ จงคำนวณหาค่าโมเมนต์ก้มเงยรอบชายหน้าของโคนปีก (จุด B ในรูป)



บรรณานุกรม

- Abbott, I. H., & von Doenhoff, A. E. (1959). Theory of wing sections: Including a summary of airfoil data. Dover Publications.
- Anderson, J. D., Jr. (2016). Fundamentals of aerodynamics (6th ed.). McGraw-Hill Education.
- Bertin, J. J., & Cummings, R. M. (2025). Aerodynamics for engineers (7th ed.). Cambridge University Press.
- Hess, J. L., & Smith, A. M. O. (1967). Calculation of potential flow about arbitrary bodies. In D. Küchemann (Ed.), Progress in Aeronautical Sciences (Vol. 8). Pergamon Press.
- Houghton, E. L., & Carpenter, P. W. (2019). Aerodynamics for engineering students. CBS Publishers & Distributors.
- Katz, J., & Plotkin, A. (2001). Low-speed aerodynamics (2nd ed.). Cambridge University Press.
- Kuethe, A. M., & Chow, C.-Y. (1997). Foundations of aerodynamics. Wiley.
- Moran, J. (2010). An introduction to theoretical & computational aerodynamics. Dover Publications.
- Nakayama, Y. (Ed.). (1988). Visualized flow. Pergamon Press.
- กนก ทองสว่าง และคณะ (2569), การวิเคราะห์หาค่าคุณลักษณะเฉพาะทางอากาศพลศาสตร์ของอากาศยานไร้คนขับพลังงานแสงอาทิตย์สมรรถนะสูง เพดานบินต่ำ M Solar-X โดยใช้อุโมงค์ลมความเร็วต่ำกว่าเสียง, ตีพิมพ์ในวารสารวิชาการมหาวิทยาลัยอีสเทิร์นเอเซีย ปีที่ 20 ฉบับที่ 2.
- วันชัย เจียจันทร์, กนก ทองสว่าง และ คมกริช แก้วฉาย (2561), การวิเคราะห์หาค่าคุณลักษณะเฉพาะทางอากาศพลศาสตร์ของอากาศยานไร้คนขับขนาดเล็กแบบไร้หาง โดยใช้อุโมงค์ลมความเร็วต่ำกว่าเสียง, วารสารวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยียานเรืออากาศ ปีที่ 14, หน้า 77 - 85.
- วันชัย เจียจันทร์, กนก ทองสว่าง และคณะ (2563), การออกแบบและวิเคราะห์คุณลักษณะทางอากาศพลศาสตร์ของอากาศยานไร้คนขับยุทธวิธีระยะประชิด, ตีพิมพ์ในเอกสารการประชุมวิชาการเครือข่ายวิศวกรรมเครื่องกลแห่งประเทศไทย, ครั้งที่ 34, หน้า 106 - 114.

ภาคผนวก

ผนวก ก

บรรยากาศมาตรฐานสากล (International Standard Atmosphere: ISA)

ผนวก ก แสดงค่าบรรยากาศมาตรฐานสากล จัดทำเป็นหน่วย SI และหน่วย British Engineering Units

สัญลักษณ์ในตาราง: h = ระยะสูง, T = อุณหภูมิ, p = ความดัน, ρ = ความหนาแน่น,

μ = ความหนืดเชิงพลศาสตร์, ν = ความหนืดจลน์, a = ความเร็วเสียง

ตาราง ก.1 บรรยากาศมาตรฐานสากล หน่วย SI (0–30,000 m)

h (m)	T (°C)	p (Pa)	ρ (kg/m ³)	$\mu \times 10^5$ (kg/m·s)	$\nu \times 10^5$ (m ² /s)	a (m/s)
0	15.00	101,325	1.22500	1.7894	1.4607	340.29
500	11.75	95,461	1.16727	1.7737	1.5195	338.37
1,000	8.50	89,875	1.11164	1.7579	1.5813	336.43
1,500	5.25	84,556	1.05807	1.7420	1.6464	334.49
2,000	2.00	79,495	1.00649	1.7260	1.7149	332.53
2,500	-1.25	74,683	0.95686	1.7099	1.7870	330.56
3,000	-4.50	70,109	0.90912	1.6937	1.8630	328.58
3,500	-7.75	65,764	0.86323	1.6775	1.9433	326.58
4,000	-11.00	61,640	0.81913	1.6611	2.0279	324.58
4,500	-14.25	57,728	0.77677	1.6447	2.1173	322.56
5,000	-17.50	54,020	0.73612	1.6281	2.2118	320.53
5,500	-20.75	50,507	0.69711	1.6115	2.3117	318.49
6,000	-24.00	47,181	0.65970	1.5948	2.4174	316.43
6,500	-27.25	44,035	0.62384	1.5779	2.5293	314.36
7,000	-30.50	41,061	0.58950	1.5610	2.6480	312.27
7,500	-33.75	38,251	0.55662	1.5439	2.7738	310.18
8,000	-37.00	35,600	0.52517	1.5268	2.9072	308.06
8,500	-40.25	33,099	0.49509	1.5095	3.0490	305.94
9,000	-43.50	30,742	0.46635	1.4922	3.1997	303.79
9,500	-46.75	28,524	0.43890	1.4747	3.3600	301.64
10,000	-50.00	26,436	0.41271	1.4571	3.5307	299.46
10,500	-53.25	24,474	0.38773	1.4394	3.7125	297.27
11,000	-56.50	22,632	0.36392	1.4216	3.9065	295.07
11,500	-56.50	20,916	0.33633	1.4216	4.2269	295.07

h (m)	T (°C)	p (Pa)	ρ (kg/m ³)	$\mu \times 10^5$ (kg/m·s)	$\nu \times 10^5$ (m ² /s)	a (m/s)
12,000	-56.50	19,330	0.31083	1.4216	4.5737	295.07
12,500	-56.50	17,865	0.28726	1.4216	4.9489	295.07
13,000	-56.50	16,510	0.26548	1.4216	5.3549	295.07
13,500	-56.50	15,259	0.24536	1.4216	5.7942	295.07
14,000	-56.50	14,102	0.22675	1.4216	6.2695	295.07
14,500	-56.50	13,033	0.20956	1.4216	6.7838	295.07
15,000	-56.50	12,045	0.19367	1.4216	7.3403	295.07
15,500	-56.50	11,131	0.17899	1.4216	7.9425	295.07
16,000	-56.50	10,287	0.16542	1.4216	8.5941	295.07
16,500	-56.50	9,507	0.15288	1.4216	9.2991	295.07
17,000	-56.50	8,787	0.14129	1.4216	10.0620	295.07
17,500	-56.50	8,120	0.13058	1.4216	10.8874	295.07
18,000	-56.50	7,505	0.12068	1.4216	11.7806	295.07
18,500	-56.50	6,936	0.11153	1.4216	12.7470	295.07
19,000	-56.50	6,410	0.10307	1.4216	13.7927	295.07
19,500	-56.50	5,924	0.09526	1.4216	14.9242	295.07
20,000	-56.50	5,475	0.08803	1.4216	16.1485	295.07
20,500	-56.00	5,060	0.08118	1.4244	17.5458	295.41
21,000	-55.50	4,678	0.07487	1.4271	19.0604	295.75
21,500	-55.00	4,325	0.06907	1.4299	20.7018	296.09
22,000	-54.50	4,000	0.06373	1.4326	22.4802	296.43
22,500	-54.00	3,700	0.05881	1.4353	24.4068	296.77
23,000	-53.50	3,422	0.05428	1.4381	26.4934	297.11
23,500	-53.00	3,167	0.05011	1.4408	28.7531	297.44
24,000	-52.50	2,930	0.04627	1.4435	31.1997	297.78
24,500	-52.00	2,712	0.04273	1.4463	33.8482	298.12
25,000	-51.50	2,511	0.03947	1.4490	36.7147	298.45
25,500	-51.00	2,325	0.03646	1.4517	39.8167	298.79
26,000	-50.50	2,153	0.03369	1.4544	43.1728	299.13
26,500	-50.00	1,994	0.03113	1.4571	46.8032	299.46
27,000	-49.50	1,847	0.02878	1.4598	50.7296	299.80
27,500	-49.00	1,712	0.02660	1.4625	54.9756	300.13
28,000	-48.50	1,586	0.02460	1.4653	59.5661	300.47

h (m)	T (°C)	p (Pa)	ρ (kg/m ³)	$\mu \times 10^5$ (kg/m·s)	$\nu \times 10^5$ (m ² /s)	a (m/s)
28,500	-48.00	1,470	0.02275	1.4680	64.5284	300.80
29,000	-47.50	1,363	0.02104	1.4707	69.8917	301.14
29,500	-47.00	1,264	0.01947	1.4734	75.6872	301.47
30,000	-46.50	1,172	0.01801	1.4761	81.9488	301.80

ตาราง ก.2 บรรยากาศมาตรฐานสากล หน่วย British Engineering Units (0–100,000 ft)

h (ft)	T (°R)	p (lb/ft ²)	$\rho \times 10^3$ (slug/ft ³)	$\mu \times 10^7$ (slug/ft·s)	$\nu \times 10^4$ (ft ² /s)	a (ft/s)
0	518.67	2116.22	2.3769	3.7372	1.5723	1116.45
2,500	509.75	1931.89	2.2078	3.6871	1.6700	1106.81
5,000	500.84	1760.79	2.0481	3.6366	1.7756	1097.09
7,500	491.92	1602.18	1.8974	3.5856	1.8898	1087.28
10,000	483.01	1455.33	1.7553	3.5342	2.0135	1077.39
12,500	474.09	1319.58	1.6215	3.4823	2.1476	1067.40
15,000	465.18	1194.27	1.4956	3.4300	2.2934	1057.31
17,500	456.26	1078.77	1.3774	3.3772	2.4519	1047.13
20,000	447.35	972.49	1.2664	3.3240	2.6247	1036.85
22,500	438.43	874.86	1.1625	3.2702	2.8132	1026.47
25,000	429.52	785.31	1.0651	3.2160	3.0193	1015.98
27,500	420.60	703.34	0.9742	3.1613	3.2451	1005.38
30,000	411.69	628.43	0.8893	3.1060	3.4927	994.66
32,500	402.77	560.12	0.8102	3.0502	3.7649	983.83
35,000	393.85	497.96	0.7365	2.9939	4.0648	972.89
37,500	389.97	441.69	0.6598	2.9691	4.4999	968.08
40,000	389.97	391.68	0.5851	2.9691	5.0744	968.08
42,500	389.97	347.34	0.5189	2.9691	5.7223	968.08
45,000	389.97	308.01	0.4601	2.9691	6.4529	968.08
47,500	389.97	273.14	0.4080	2.9691	7.2768	968.08
50,000	389.97	242.21	0.3618	2.9691	8.2058	968.08
52,500	389.97	214.79	0.3209	2.9691	9.2535	968.08
55,000	389.97	190.47	0.2845	2.9691	10.4350	968.08
57,500	389.97	168.91	0.2523	2.9691	11.7672	968.08
60,000	389.97	149.78	0.2238	2.9691	13.2696	968.08
62,500	389.97	132.82	0.1984	2.9691	14.9639	968.08
65,000	389.97	117.79	0.1760	2.9691	16.8744	968.08
67,500	391.00	104.46	0.1556	2.9757	19.1193	969.36
70,000	392.37	92.68	0.1376	2.9844	21.6880	971.06
72,500	393.75	82.27	0.1217	2.9932	24.5910	972.75
75,000	395.12	73.05	0.1077	3.0019	27.8702	974.44
77,500	396.49	64.90	0.0954	3.0106	31.5730	976.13

h (ft)	T (°R)	p (lb/ft ²)	$\rho \times 10^3$ (slug/ft ³)	$\mu \times 10^7$ (slug/ft·s)	$v \times 10^4$ (ft ² /s)	a (ft/s)
80,000	397.86	57.67	0.0844	3.0192	35.7523	977.82
82,500	399.23	51.28	0.0748	3.0279	40.4673	979.51
85,000	400.60	45.61	0.0663	3.0366	45.7846	981.19
87,500	401.98	40.58	0.0588	3.0452	51.7785	982.86
90,000	403.35	36.12	0.0522	3.0538	58.5325	984.54
92,500	404.72	32.17	0.0463	3.0624	66.1397	986.21
95,000	406.09	28.66	0.0411	3.0710	74.7046	987.88
97,500	407.46	25.54	0.0365	3.0796	84.3437	989.55
100,000	408.83	22.77	0.0324	3.0882	95.1875	991.21

ที่มา : International Standard Atmosphere (ISA) (Anderson, 2016)

ผนวก ข

เฉลยแบบฝึกหัด

บทที่ 1

1. $\rho = 0.326 \text{ kg/m}^3$
2. $T = 501.26 \text{ R} = 278.48 \text{ K}$ หรือประมาณ 5.33 deg C
3. $x_{cp} = c/2$ จากซ้ายหน้า
4. $N' = 112,333.33 \text{ N/m}$; $A' = 1,273.75 \text{ N/m}$; $L' = 110,405.55 \text{ N/m}$;
 $D' = 20,760.88 \text{ N/m}$; $M'_{LE} = -57,833.33 \text{ N-m/m}$; $M'_{c/4} = -29,750.00 \text{ N-m/m}$;
 $x_{cp} = 0.51484 \text{ m}$ จากซ้ายหน้า
5. $C_l = 1.1675$; $C_d = 0.2788$
- 6.

alpha (deg)	x_{cp} / c
-2	1.0900
0	0.4100
2	0.3364
4	0.3063
6	0.2924
8	0.2833
10	0.2770
12	0.2710
14	0.2660

9. เงื่อนไขความคล้ายคลึงทางพลศาสตร์ต้องมีรูปทรงคล้ายกัน และตัวแปรสำคัญ เช่น M_∞ และ Re ต้องเท่ากัน จากข้อนี้ $M_1 = M_2 = 0.352$ แต่การไหลทั้งสองยังไม่คล้ายคลึงกันทางพลศาสตร์เนื่องจาก Re ไม่เท่ากัน

10. $V_{\text{test}} = 222.37 \text{ m/s}$; $T_{\text{test}} = 184.35 \text{ K}$; $\rho_{\text{test}} = 1.908 \text{ kg/m}^3$

11. $p_{\text{wing}} = 7.4317 \times 10^4 \text{ N/m}^2$

12. $C_D = 4/3 = 1.333$

บทที่ 2

3. สมการเส้นกระแส: $y/x = \text{ค่าคงที่}$ หรือ $y = C_1 x$

4. สมการเส้นกระแส: $x^2 + y^2 = \text{ค่าคงที่}$

5. สมการเส้นกระแส: $r = \text{ค่าคงที่}$

6. สมการเส้นกระแส: $xy = \text{ค่าคงที่}$

7. ก) อัตราการเปลี่ยนแปลงปริมาตรต่อปริมาตรเดิม = 0

ข) Vorticity = 0 (ยกเว้นที่จุดกำเนิด)

8. ก) อัตราการเปลี่ยนแปลงปริมาตรต่อปริมาตรเดิม = 0

ข) Vorticity = 0 (ยกเว้นที่จุดกำเนิด)

9. ไม่เป็นสนามไร้การหมุน เพราะ Vorticity = $2C$

11. ฟังก์ชันเส้นกระแส: $\psi = Cxy + \text{ค่าคงที่}$

ศักย์ความเร็ว: $\phi = (C/2)(x^2 - y^2) + \text{ค่าคงที่}$

เส้น ϕ คงที่ ตั้งฉากกับเส้น ψ คงที่

12. $\text{grad } T \text{ ที่จุด } (1,2) = 6i + 1j$

ขนาด $|\text{grad } T| = \sqrt{37} \approx 6.083$

ทิศทาง = $\tan^{-1}(1/6) \approx 9.46^\circ$ จากแกน $+x$

เส้นเกรเดียนต์ผ่านจุด (1,2): $3y^2 - x^2 = 11$

เส้นอนุกรมวิธานที่ผ่านจุด (1,2): $x^3y = 2$

13. สมการเส้นกระแสผ่านจุด (1,2): $xy = 2$

14. $u = x + y$, $v = -y$

15. การไหลไร้การอัดตัว: ข), ค) และ ง)

16. ก) ที่จุด (2,3): $u = 2$, $v = -4$, $|V| = \sqrt{20} \approx 4.472$, ทิศทาง = -63.43° จากแกน $+x$

ข) ส่วนความเร็วในทิศทำมุม 30° กับแกน $x = \sqrt{3} - 2 \approx -0.268$

บทที่ 3

1. ก) $u = 2$ m/s, $v = -4$ m/s, $|V| = 4.472$ m/s, ทิศทาง = -63.43 องศาจากแกน x

ข) ส่วนความเร็วในทิศทำมุม 30 องศา กับแกน $x = -0.268$ m/s

4. ก) -1

ข) $1/3$

ค) $-11/3$

5. ศักย์ความเร็ว: $\phi = x^2y + y + C$

6. $\vec{\nabla}p/\rho$ ที่จุด (1, 2) = (0, -2)

7. ความเร็วของกระแสน้ำ = 0.990 m/s

8. ความดันที่จุดชะงัก = 1.0286×10^5 N/m²

ความดันที่จุดซึ่ง $V = 60$ m/s = 1.0065×10^5 N/m²

9. ความเร็วที่ตำแหน่ง AA = 114.5 m/s

10. สัมประสิทธิ์แรงต้านของแพนอากาศ $c_d = 0.0627$

12. ก) เส้นกระแสผ่านจุดชะงัก: $\psi = 0$ หรือ $100y(1 - 25/r^2) + (628/2\pi) \ln(r/5) = 0$

ข) จุดชะงักอยู่บน $r = 5$ m ที่ $\sin(\theta) = -0.100$ หรือ $\theta = -5.74$ องศา และ 185.74 องศา

ค) Circulation รอบวัตถุ = 628 m²/s

ง) ความเร็วที่อนันต์ $V = 100$ m/s

จ) แรงยกต่อหน่วยความยาว = $6.28 \times 10^4 \rho_\infty$ N/m และแรงต้าน = 0

14. รูปร่างเส้นกระแสไม่เหมือนเดิม เพราะเมื่อ V_∞ เพิ่มขึ้นสองเท่า แต่ Γ คงเดิม ค่า $\Gamma/(V_\infty R)$ เปลี่ยนไป
15. ก) รูปร่างข้างควรรอยู่ที่ $\theta = +/ - 30$ องศาจากแนวหัวท่อด้านหน้า หรือเทียบเท่า $\theta = 150$ องศา และ 210 องศา ตามการวัดมุมรอบทรงกระบอก
- ข) ความไวของ probe: $\left| \frac{\partial p}{\partial \theta} \right| = 3.464 \text{ q}_\infty/\text{เรเดียน}$ หรือ ประมาณ 0.0605 $\text{q}_\infty/\text{ต่อองศา}$

บทที่ 4

- $L' \approx 3.86 \text{ lb/ft}$
 $M'_{c/4} \approx -0.48 \text{ lb-ft/ft}$
- $\alpha \approx 2 \text{ deg}$
- $c_l = 0.165$
 $c_{m,LE} = -0.041$
- (ก) $\alpha_{L=0} = -4.15 \text{ deg}$
(ข) c_l ที่ $\alpha = 3 \text{ deg}$ คือ 0.785
- $c_{m,c/4} = -0.106$
 $x_{cp}/c = 0.385$
- เทียบค่าทดลองโดยประมาณของ NACA 4412 ที่ $\alpha = 3 \text{ deg}$:
 $c_{l(\text{exp})} \approx 0.75$, $c_{m,c/4(\text{exp})} \approx -0.09$, $x_{cp}/c_{(\text{exp})} \approx 0.370$
ความคลาดเคลื่อนโดยประมาณ: $c_l \approx 4.6\%$, $c_{m,c/4} \approx 18\%$, $x_{cp}/c \approx 4.2\%$
- Mean line สำหรับภาระกรรมคงที่:
ถ้าให้ $c_p(x,0^+) - c_p(x,0^-) = K$ คงที่: $\bar{y}/c = -(K/(4\pi))[(x/c) \ln(x/c) + (1 - x/c) \ln(1 - x/c)]$
- $C_D = 0.00847$
- $x_{ac} = 0.25c$, $c_{m,ac} = (\pi/4)(A_2 - A_1)$

บทที่ 5

1. $V = \Gamma / (2R)$

2. $V = \Gamma R^2 / [2(R^2 + A^2)^{3/2}]$

3. $C_L \approx 0.712$

$$C_{Di} \approx 0.0213$$

4. มุมปะทะของปีก $\alpha \approx 2.12^\circ$

5. $D_i \approx 792 \text{ lb}$

6. (ก) ปีกตรง: $a \approx 0.0767$ ต่อองศา

(ข) ปีกลู่ 45° : $a \approx 0.0582$ ต่อองศา

7. $M_B \approx -8.31 \text{ N}\cdot\text{m}$

ผนวก ค

ดัชนี

A

Aerodynamic Center, 241
Aerodynamic Force, 2, 15, 19, 66
Aerodynamics, 1, 2, 4, 8, 9, 48, 114, 241, 295, 356
Airfoil, 4, 14, 15, 16, 17, 110, 213, 250, 283, 355
Angle of Attack, 17, 18, 22, 26, 28, 191, 242, 277, 324, 355
Angle of Incidence, 354
Aspect Ratio, 292, 293, 295, 311, 326
Avogadro's Law, 3

B

Bernoulli Equation, 121, 122, 123, 124, 125, 127, 132, 169, 190, 233
Biot-Savart Law, 295, 297, 298, 306, 351
Boundary Layer, 2, 7, 43, 44, 48, 94, 103, 169, 269, 290
Buckingham Pi Theorem, 29, 31

C

Camber, 59, 209, 210, 211, 214, 232, 246, 252, 275, 353
Cambered Airfoil, 242
Center of Pressure, 27, 28, 29, 61, 237, 241, 246, 250, 347, 348
Chord, 16, 17, 18, 19, 20, 61, 210, 251, 300, 354

Circulation, 108, 109, 110, 111, 117, 166, 207, 234, 300, 313
Coefficient of Drag, 19, 24, 26, 48, 49, 55, 103, 290, 319, 344
Coefficient of Lift, 19, 33, 34, 37, 55, 211, 251, 280, 330, 355
Compressible Flow, 35, 45, 78, 114, 120, 133, 136, 139, 150, 270
Continuity Equation, 86, 123, 125, 127, 136, 138
Continuum, 4, 42, 43, 89
Control Volume, 95, 96, 97, 98, 99, 100, 102, 103, 124, 125

Curl, 75, 76, 78, 80, 114, 115

D

Density, 3, 4, 5, 7, 8, 38, 67, 95, 187, 286
Dimensional Analysis, 29, 30, 34, 35, 49, 62, 136
Divergence, 74, 75, 76, 77, 97, 266
Doublet Flow, 150
Doublet, 150, 151, 152, 153, 154, 161, 174, 185, 190, 337
Downwash, 271, 286, 287, 288, 289, 303, 307, 310, 328, 353
Drag Polar, 322, 326, 327

Drag, 1, 2, 15, 16, 19, 54, 156, 236, 317, 355

Dynamic Pressure, 19, 33, 49, 133, 135

E

Energy Equation, 90, 93, 94, 95, 117, 120, 123

Euler Equation, 90

External Flow, 2, 156

F

Finite Wing, 212, 285, 286, 288, 289, 295, 298, 326, 328, 354

G

Gradient, 7, 8, 9, 13, 70, 74, 78, 99, 118, 281

H

Helmholtz Theorem, 295, 300, 301, 303

I

Induced Drag, 59, 288, 289, 290, 301, 312, 318, 328, 337, 355

K

Kelvin Theorem, 5, 224, 225

Kutta Condition, 221, 223, 224, 225, 226, 256, 258, 263, 266, 268

Kutta-Joukowski Theorem, 167, 172, 173, 220, 221, 226, 257, 263, 268, 353

L

Laminar Flow, 53, 54, 55, 102, 104

Laplace Equation, 137, 138, 143, 146, 147, 229, 257

Leading Edge, 16, 17, 18, 19, 22, 166, 230, 266, 277, 354

Lift Coefficient, 19, 33, 34, 37, 55, 211, 251, 280, 330, 355

Lift Curve, 58, 213, 214, 239, 241, 275, 282, 328, 333, 355

Lift, 1, 2, 16, 19, 30, 162, 236, 280, 320, 355

Lift-to-Drag Ratio, 58, 59, 270, 277, 278, 284

M

Mach Number, 6, 30, 34, 36, 45, 46, 56, 57

Mean Free Path, 3, 42

Moment Coefficient, 19, 59, 60, 214, 215, 240, 246, 255, 293, 354

Momentum Equation, 86, 89, 90, 94, 95, 117, 120, 121, 123

N

NACA Airfoil, 29, 54, 55, 57, 58, 212, 248, 271, 278, 355

Normal Force, 16, 17, 19, 27, 61

P

Panel Method, 191, 200, 255, 256, 266, 267, 337

Part I : English Index

Part II : ดัชนีคำภาษาไทย

Pitot Tube, 102, 131, 132, 133, 134

Potential Flow, 116, 221, 256

Prandtl Lifting-Line Theory, 8, 208, 289,
300, 301, 305, 309, 328, 334, 350

Pressure Coefficient, 20, 21, 134, 135,
157, 165, 190, 200, 228, 354

Pressure, 1, 4, 5, 8, 9, 40, 99, 158, 233,
354

R

Reynolds Number, 33, 37, 49, 51, 53, 103

S

Similarity, 34, 35, 36, 62

Sink Flow, 143, 144, 146, 149, 150, 152,
160, 175, 184, 200

Source Flow, 118, 143, 144, 145, 146,
161, 184, 197, 220, 297

Source Panel Method, 191, 200, 255

Speed of Sound, 6, 22, 25, 32, 34, 46, 47,
57, 120, 270

Stagnation Point, 132, 135, 147, 148, 150,
165, 177, 188, 221, 280

Standard Atmosphere, 9, 11, 12, 13, 216,
284

Static Pressure, 4, 5, 20, 131, 132, 133,
134, 135, 207

Stream Function, 111, 117, 119, 137, 205,
206, 218

Streamline, 15, 35, 44, 46, 47, 114, 150,
175, 216, 295

T

Temperature, 1, 3, 5, 6, 8, 12, 37, 66, 85,
136

Thickness Ratio, 182, 183

Thin Airfoil Theory, 184, 186, 227, 242,
244, 250, 255, 275, 307, 330

Trailing Edge, 16, 18, 27, 28, 46, 211,
238, 260, 274, 294

Turbulent Flow, 2

U

Uniform Flow, 139, 141, 142, 143, 146,
156, 176, 184, 196, 256

V

Vector Field, 67, 74, 75

Velocity Potential, 114, 115, 116, 117,
118, 142, 177, 205, 230, 267

Venturi Meter, 124, 126, 127, 130

Viscosity, 6, 7, 8, 9, 12, 89, 139, 173, 229,
350

Vortex Flow, 118, 159, 160, 161, 162, 163,
217

Vortex Lattice Method, 350

Vortex Sheet, 216, 217, 218, 219, 220,
221, 256, 257, 305, 306

Vortex, 118, 159, 160, 161, 162, 218, 237,
285, 302, 355

W

Wind Tunnel, 9, 20, 30, 35, 36, 61, 118,
129, 209, 322

Wing Span, 291, 292, 293, 300, 301, 308,
316, 322, 345, 355

Wing, 1, 4, 19, 20, 30, 208, 294, 316, 335,
355

Wingtip Vortex, 287, 302, 350

Z

Zero-Lift Angle, 214

ก

กฎของบีโธ-ซาวาร์ท, 295, 297, 298, 306, 351

กฎของเคลวิน, 5, 224, 225

การจำแนกชนิดของการไหล, 42

การวิเคราะห์มิติ, 29, 30, 34, 35, 49, 62, 136

การหมุนวน, 108, 109, 110, 111, 120, 167, 216, 234, 300, 313

การไหล, 1, 2, 5, 6, 7, 81, 132, 174, 227, 351

การไหลคงตัว, 86, 101, 107, 111

การไหลจากจุดซ้อน, 150, 151, 152, 153, 154, 161, 172, 185, 188, 221

การไหลจากแหล่งกำเนิด, 118, 143, 144, 146, 150, 174

การไหลซอร์ส, 143, 144, 145, 146, 147, 174, 185, 197, 220, 297

การไหลผ่านปีก, 208, 284, 285, 286, 298, 303, 304

การไหลผ่านแผนอากาศ, 44, 62, 99, 102, 109, 221, 226, 252, 272, 328

การไหลวน, 153

การไหลวอร์เทกซ์, 118, 159, 160, 161, 162, 163, 217

การไหลเอกรูป, 139, 141, 142, 143, 146, 156, 176, 184, 196, 256

ค

ความคล้ายคลึง, 34, 35, 36, 62

ความดัน, 1, 4, 5, 8, 9, 40, 99, 158, 233, 354

ความดันจลน์, 19, 33, 49, 133, 135

ความดันสถิต, 4, 5, 20, 131, 132, 133, 134, 135, 207

ความหนาแน่น, 3, 4, 5, 7, 8, 38, 67, 95, 187, 286

ความหนืด, 6, 7, 8, 9, 12, 89, 139, 173, 229, 350

ความหนืดจลน์, 8

ความเร็วเสียง, 6, 22, 25, 32, 34, 46, 47, 57, 120, 270

ความโค้งของแผนอากาศ, 59, 210, 211, 214, 227, 237, 246, 253, 275, 353

จ

จุดชะงัก, 132, 135, 147, 148, 150, 165, 177, 188, 221, 280

จุดศูนย์กลางความดัน, 27, 28, 29, 61, 237, 241, 246, 250, 347, 348

จุดศูนย์กลางอากาศพลศาสตร์, 241, 246, 294, 347, 348, 349

ช

ชั้นขีดผิว, 2, 7, 43, 44, 48, 94, 103, 169, 269, 290

ชั้นขีดผิวแบบปั่นป่วน, 2

ชั้นขีดผิวแบบลามินาร์, 53, 54, 55, 102, 104

ชายหน้า, 16, 17, 18, 19, 22, 166, 230, 266, 277, 354

ชายหลัง, 16, 18, 27, 28, 46, 211, 238, 260,
274, 294

ซ

ซอร์ส, 143, 144, 145, 146, 147, 174, 185,
197, 220, 297

ด

ดัชนีค้นคำ (Index)

ดับเบิลเลต, 150, 151, 152, 153, 154, 161,
172, 185, 188, 221

ด

ตัวกลางต่อเนื่อง, 4, 43, 89

ท

ทฤษฎีการหมุนวนของเคลวิน, 5, 224, 225

ทฤษฎีจุดต่ำ-จุโควสกี, 167, 172, 173, 221,
223, 236, 258, 263, 268, 353

ทฤษฎีบั๊กกิงแฮมพาย, 31

ทฤษฎีเส้นใยวอร์เทกซ์, 217, 295, 297, 300,
301

ทฤษฎีแนวแรงยกของพรานด์ทล์, 300, 301,
303, 308, 309, 314, 327, 330, 332, 350

ทฤษฎีแพนอากาศบาง, 184, 186, 227, 242,
244, 250, 255, 275, 307, 330

ท่อปีโตต์, 102, 131, 132, 133, 134

ท่อเวนทูรี, 124, 126, 127, 130

บ

บรรยาภาสมาตรฐาน, 9, 11, 12, 13, 216,
284

ป

ปริมาตรควบคุม, 95, 96, 97, 98, 99, 100,
102, 103, 124, 125

ปีก, 1, 4, 19, 20, 30, 208, 294, 316, 335,
355

ปีกยาวจำกัด, 285, 286, 288, 289, 290, 295,
302, 326, 329, 354

พ

แพนอากาศ, 4, 14, 15, 16, 17, 110, 213,
250, 283, 355

แพนอากาศสมมาตร, 175, 190, 191, 211,
214, 237, 241, 245, 250, 284

แพนอากาศโค้ง, 242

พื้นที่ปีก, 30, 33, 56, 169, 284, 292, 293,
320, 323, 355

ฟ

ฟังก์ชันกระแส, 119, 205, 206, 218

ภาคผนวก ค

ม

มุมติดตั้ง, 354

มุมปะทะ, 17, 18, 22, 26, 28, 191, 242,
277, 324, 355

โมเมนต์อากาศพลศาสตร์, 2, 18, 19, 66

ร

แรงต้าน, 1, 2, 15, 16, 19, 54, 156, 216,
316, 355

แรงต้านเหนี่ยวนำ, 59, 288, 289, 290, 301,
312, 318, 328, 337, 355

แรงยก, 1, 2, 16, 19, 30, 162, 227, 280,
319, 355

แรงลอยตัว, 38, 40, 41

ระยะเคลื่อนที่อิสระเฉลี่ย, 3

รูปร่างแพนอากาศ, 55, 209, 210, 290, 300

เลขมัท, 6, 30, 34, 36, 45, 46, 56, 57

เลขเรย์โนลด์, 33, 37, 49, 51, 53, 103

ว

วอร์เทกซ์, 118, 159, 160, 161, 162, 218,

237, 285, 302, 355

วอร์เทกซ์ซีต, 216, 217, 218, 219, 220, 221,

256, 257, 305, 306

วอร์เทกซ์ปลายปีก, 287, 302, 350

วิธีวอร์เทกซ์เลททิส, 350

ศ

ศักย์ความเร็ว, 114, 115, 116, 118, 120,

145, 190, 205, 230, 267

ส

สนามความเร็ว, 68, 74, 75, 76, 77, 83, 108,

118, 154, 298

สมการความต่อเนื่อง, 86, 123, 125, 127,

136, 138

สมการพลังงาน, 90, 93, 94, 95, 117, 120,

123

สมการลาปลาซ, 137, 138, 143, 146, 147,

229, 257

สมการออยเลอร์, 90, 122

สมการเบอร์นูลลี, 121, 122, 123, 124, 125,

127, 132, 169, 190, 233

สมการโมเมนต์, 86, 89, 90, 94, 95, 117,

120, 121, 123

สัมประสิทธิ์ความดัน, 21, 134, 135, 157,

158, 181, 190, 203, 228, 354

สัมประสิทธิ์แรงต้าน, 24, 26, 48, 49, 50, 56,

165, 290, 319, 344

สัมประสิทธิ์แรงยก, 33, 34, 37, 55, 57, 213,
251, 283, 330, 355

สัมประสิทธิ์โมเมนต์, 59, 60, 214, 215, 216,
241, 246, 265, 293, 354

เส้นกระแส, 15, 35, 44, 46, 47, 116, 150,
176, 216, 295

เส้นคอร์ด, 176

เส้นใยวอร์เทกซ์, 217, 295, 297, 300, 301

อ

อนุพันธ์สลิปสแตนเชียล, 83, 84, 85, 86, 88,
121

อากาศพลศาสตร์, 1, 2, 4, 8, 9, 48, 109,
241, 294, 349

อากาศพลศาสตร์ประยุกต์, 2, 33, 48, 51

อากาศยาน, 1, 2, 4, 9, 15, 57, 135, 277,
294, 355

อุโมงค์ลม, 9, 20, 30, 35, 36, 61, 118, 129,
209, 322